Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №1, с. 27–35 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

М.Э. МУМИНОВ, Ё.М. ШЕРМАТОВА

О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Аннотация. На трехмерной решетке рассматривается система трех квантовых частиц (две из них одинаковые (фермионы) и третья частица иной природы), взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения. Доказана конечность числа связанных состояний соответствующего оператора Шрёдингера, в случае, когда потенциалы удовлетворяют некоторым условиям и нуль является регулярной точкой для двухчастичного подгамильтониана. Найдено множество значений масс частиц таких, что оператор Шрёдингера может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Ключевые слова: трехчастичная система на решетке, оператор Шрёдингера, существенный спектр, дискретный спектр, уравнение Вайнберга, виртуальный уровень.

УДК: 517.984

Введение

Существование бесконечного числа собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера (эффект Ефимова [1]) изучалось во многих физических работах [2], [3]. В работе [4] доказано существование эффекта Ефимова, используя метод интегральных уравнений Фаддеева. С другой стороны, в [5] интересным вариационным методом установлен эффект Ефимова для системы трех частиц, из которых две тяжелые ($2H$) и одна легкая ($1L$) в предположении, что только H-L-подсистемы, взаимодействующие с помощью сферически симметрических парных потенциалов, имеют резонанс с нулевой энергией. Далее, используя вариационный метод, использованный в работе [5], в [6] доказано существование эффекта Ефимова без ограничения на массы частиц, взаимодействующих с помощью парных потенциалов (не обязательно сферически симметричных), в случае, когда все двухчастичные подсистемы имеют резонанс с нулевой энергией.

В работах [7] и [8] доказана конечность числа собственных значений трехчастичного дискретного оператора Шрёдингера на трехмерной решетке Z^3 с парными контактными потенциалами взаимодействия, при отсутствии резонанса нулевой энергии у операторов, описывающих двухчастичные подсистемы.

В [9] рассмотрена система трех квантовых частиц (две из них — бозоны, а третья произвольная) на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, описан существенный спектр и доказано существование эффекта Ефимова в случаях, когда либо две, либо три двухчастичные подсистемы системы трех частиц имеют виртуальные уровни на левом крае трехчастичного существенного спектра

Поступила 24.12.2014

при нулевом значении полного квазиимпульса ($K = 0$), а также в этом случае показана конечность числа связанных состояний при малых значениях полного квазиимпульса ($K \neq 0$).

В работе [10] для гамильтониана одной системы трех квантовых частиц (два фермиона взаимодействуют с третьей частицей другой природы) установлено существование эффекта Ефимова в случае, когда масса фермионов достаточно большая, чем масса третьей частицы.

В [11] рассмотрен трехчастичный модельный оператор Шрёдингера H, ассоцированный кванто-механической системой на трехмерной решетке, в которой три частицы (две из них одинаковые) взаимодействуют с помощью контактного потенциала. Доказано, что существует положительное число m^* такое, что при массе третьей частицы, большей этого значения, и когда модель Фридрихса имеет резонанс на пороге существенного спектра, оператор H имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра, а также получена асимптотика для их числа. А при значении массы третьей частицы, меньше m^*, доказана конечность дискретного спектра.

В данной работе рассматривается система трех квантовых частиц (две из них — фермионы, а третья произвольная) на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения. При этом в системе трех частиц имеются только две одинаковые двухчастичные подсистемы, соответствующие фермионам и частицей иной природы. Доказано, что когда двухчастичная подсистема не имеет виртуальных уровней на левом крае трехчастичного существенного спектра, число связанных состояний оператора Шрёдингера конечно. Найдено множество значений масс трех частиц таких, что нуль является регулярной точкой для двухчастичного оператора Шрёдингера при нулевом значении полного квазиимпульса. В этом случае, т. е. когда массы частиц принимают значения из этого множества, доказано, что трехчастичный оператор Шрёдингера может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

1. Описание трехчастичного оператора и формулировка основных результатов

Пусть Z^3 — трехмерная целочисленная решетка, $\ell_2((Z^3)^3)$ — гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(Z^3)^3$ и $\ell_2^{\mathrm{as}}((Z^3)^3)$ — подпространство антисимметричных по первым двум переменным функций в $\ell_2((Z^3)^3)$.

Свободный гамильтониан $\widehat{H}_0$ системы трех квантовых частиц, две из них – одинаковые частицы (фермионы) и третья – частица иной природы, на решетке Z^3 определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell_2((Z^3)^3)$:

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{2m}\Delta_{x_1} + \frac{1}{2m}\Delta_{x_2} + \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3},$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I \otimes I$, $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta \otimes I$, $\Delta_{x_3} = I \otimes I \otimes \Delta$, $m, m_3 > 0$ — массы частиц, Δ — решетчатый Лапласиан — разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т. е.

$$(\Delta\widehat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1} [\widehat{\psi}(x) - \widehat{\psi}(x+s)], \quad \widehat{\psi} \in \ell_2(Z^3).$$

Трехчастичный гамильтониан $\widehat{H}$ системы трех квантовых частиц с парными короткодействующими потенциалами $\widehat{v}_{ij}$, $1 \leq i < j \leq 3$, определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\widehat{H}_0$

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 - \widehat{V}_{13} - \widehat{V}_{23} - \widehat{V}_{12},$$

где $\widehat{V}_{ij}$ — оператор умножения в $\ell_2((Z^3)^3)$,

$$(\widehat{V}_{ij}\widehat{\psi})(x_1, x_2, x_3) = \widehat{v}_{ij}(x_i - x_j)\widehat{\psi}(x_1, x_2, x_3), \quad \widehat{\psi} \in \ell_2^{\mathrm{as}}((Z^3)^3), \ \ 1 \le i < j \le 3,$$

$\widehat{v}_{ij}$ — ограниченная вещественнозначная функция и $\widehat{v}_{13} = \widehat{v}_{23}$.

Всюду в дальнейшем предположим, что потенциалы $\widehat{v}_{13}(s)$ и $\widehat{v}_{23}(s)$, являются неотрицательными, четными функциями на Z^3 и удовлетворяют условию

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^{\rho}\widehat{v}_{ij}(s) = 0, \quad \rho > 3, \tag{1}$$

и

$$\widehat{v}_{12}(s) = \mu\delta_{s_1 s_2},$$

где $|s| = |s^{(1)}| + |s^{(2)}| + |s^{(3)}|$, $s \in Z^3$, $\delta_{s_1 s_2}$ — символ Кронекера, $\mu > 0$. Из условия четности функции $(\widehat{V}_{12}\widehat{\psi})(x_1, x_2, x_3)$ и антисимметричности функции $\widehat{\psi}(x_1, x_2, x_3) = -\widehat{\psi}(x_2, x_1 2, x_3)$, $\widehat{\psi} \in \ell_2^{\mathrm{as}}((Z^3)^3)$, следует $\widehat{V}_{12}\widehat{\psi} = 0$ для всех $\widehat{\psi} \in \ell_2^{\mathrm{as}}((Z^3)^3)$.

Пусть T^3 — трехмерный тор, $L_2((T^3)^n)$, $n = 1, 2, 3,$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(T^3)^n$, $L_2^{\mathrm{as}}((T^3)^2)\big(L_2^{\mathrm{as}}((T^3)^3)\big)$ — подпространство квадратично-интегрируемых антисимметричных (по первым двум переменным) функций в гильбертовом пространстве $L_2((T^3)^2)$ $\big(L_2((T^3)^3)\big)$.

С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}_3 : L_2^{\mathrm{as}}((T^3)^3) \to \ell_2^{\mathrm{as}}((Z^3)^3)$,

$$(\mathcal{F}_3\psi)(n) = \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int_{(T^3)^3} \psi(s)\, e^{-i(n,s)},$$

из координатного представления гамильтониана $\widehat{H}$ перейдем в импульсное представление $\mathbf{H} = \mathcal{F}_3^{-1}\widehat{H}\mathcal{F}_3$,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2.$$

Здесь $\mathbf{H}_0 = \frac{1}{m}\widehat{\Delta}_{k_1} + \frac{1}{m}\widehat{\Delta}_{k_2} + \frac{1}{m_3}\widehat{\Delta}_{k_3}$ и $\mathbf{V}_i$, $i = 1, 2,$ — интегральный оператор типа свертки

$$(\mathbf{V}_\alpha f)(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{(T^3)^3} v(k_\beta - k'_\beta)\delta(k_\alpha - k'_\alpha)\delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3)dk'_1 dk'_2 dk'_3,$$

где

$$\alpha \ne \beta \ne \gamma, \quad v(k) = (\mathcal{F}_1^{-1}\widehat{v}_{13})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s\in Z^3} \widehat{v}_{13}\,(s)\, e^{i(k,s)},$$

$\widehat{\Delta}_{k_1} = \widehat{\Delta} \otimes I \otimes I$, $\widehat{\Delta}_{k_2} = I \otimes \widehat{\Delta} \otimes I$ и $\widehat{\Delta}_{k_3} = I \otimes I \otimes \widehat{\Delta}$, $\widehat{\Delta}$ — оператор умножения на функцию $\varepsilon(k)$:

$$(\widehat{\Delta}f)(k) = \varepsilon(k)f(k), \quad \varepsilon(k) = \sum_{i=1}^{3}(1 - \cos k^{(i)}).$$

Используя разложение в прямой операторный интеграл [12], [13], изучение спектральных свойств оператора $\widehat{H}$ сводится к исследованию спектральных свойств семейства самосопряженных ограниченных операторов $H(K)$, $K \in T^3$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{as}}((T^3)^2)$ по формуле

$$H(K) = H_0(K) - V, \quad V = V_1 + V_2.$$

Здесь $H_0(K)$ является оператором умножения на функцию,

$$\mathcal{E}_K(p, q) = \frac{1}{m}\varepsilon(p) + \frac{1}{m}\varepsilon(q) + \frac{1}{m_3}\varepsilon(K - p - q)$$

и

$$(V_1 f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} v(q-s) f(p,s) ds,$$

$$(V_2 f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} v(p-s) f(s,q) ds.$$

Введем оператор Шрёдингера $h(k)$, $k \in T^3$, соответствующий двухчастичному гамильтониану на решетке и действуюший в $L_2(T^3)$ по формуле $h(k) = h_0(k) - \mathbf{v}$, где $h_0(k)$ — оператор умножения на функцию $E(k;p) = \frac{1}{m}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_3}\varepsilon(k-p)$ и $(\mathbf{v}f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{T^3} v(p-s) f(s) ds$.

Отметим, что из условия (1) следут непрерывность функции $v(\cdot)$. Легко проверить, что $\sigma(\mathbf{v}) = \bigcup\limits_{s \in Z^3} \{\widehat{v}_{13}(s)\} \cup \{0\}$. Отсюда и из неотрицательности функции $\widehat{v}_{13}(\cdot)$ вытекает $\mathbf{v} \geq 0$.

Определение. Оператор $h(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0,0,0)$, имеет резонанс в нуле, если уравнение

$$G(\mathbf{0}, 0)\varphi = \varphi$$

имеет нетривиальное решение $\psi \in C(T^3)$, удовлетворяющее условию $\psi(\mathbf{0}) \neq 0$, где $G(k,z)$, $z \leq 0$, — интегральный оператор, действующий в $C(T^3)$ по формуле

$$(G(k,z)f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{v(p-t) f(t) dt}{E(k;t) - z}.$$

Если единица не является собственным значением оператора $G(\mathbf{0},0)$, то уравнение $h(\mathbf{0})f = 0$ не имеет решения. В таком случае нуль называется регулярной точкой оператора $h(\mathbf{0})$.

Для всех $K \in T^3$ существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из спектра оператора $H_\alpha(K) = H_0(K) - V_\alpha, \alpha = 1, 2$ (см. [13]), точнее

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K)) = \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K)) = \sigma(H_1(K)) = \sigma(H_2(K)).$$

Кроме того, можно показать, что если $h(\mathbf{0}) \geq 0$ (см. [12]), то $H(K) \geq 0$. В этом случае $\sigma(H_1(\mathbf{0})) = \sigma(H_0(\mathbf{0})) = [m(\mathbf{0}), M(\mathbf{0})]$, $m(\mathbf{0}) = \min\limits_{p,q} \mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p,q)$, $M(\mathbf{0}) = \max\limits_{p,q} \mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p,q)$.

Теперь сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема. *Пусть нуль есть регулярная точка оператора* $h(\mathbf{0})$ *и* $h(\mathbf{0}) \geq 0$. *Тогда дискретный спектр оператора* $H(\mathbf{0})$ *конечен.*

Введем множество

$$M = \left\{ (m, m_3) : \frac{\|v\|_{\max}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{dt}{\varepsilon(t)} \frac{m + m_3}{m m_3} < 1, \quad m, m_3 > 0 \right\},$$

где $\|v\|_{\max} = \max\limits_{p} |v(p)|$.

Лемма 1. *Пусть* $(m, m_3) \in M$. *Тогда нуль является регулярной точкой оператора* $h(\mathbf{0})$ *и* $h(\mathbf{0}) \geq 0$.

Из леммы 1 и теоремы 1 получаем

Следствие. Пусть $(m, m_3) \in M$. Тогда оператор $H(\mathbf{0})$ может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

2. Некоторые свойства двухчастичного оператора Шрёдингера

Доказательство леммы 1. Для каждого $\psi \in C(T^3)$ имеем
$$\|G(\mathbf{0},0)\psi\|_{\max} = \max_p \left| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{v(p-t)\psi(t)dt}{E(\mathbf{0};t)} \right| \leq \frac{\|v\|_{\max}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{dt}{\varepsilon(t)} \frac{m+m_3}{mm_3} \|\psi\|_{\max}.$$
Отсюда
$$\|G(\mathbf{0},0)\| \leq \frac{\|v\|_{\max}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{dt}{\varepsilon(t)} \frac{m+m_3}{mm_3}.$$
Поскольку $(m, m_3) \in M$, то $\|G(\mathbf{0},0)\| < 1$. Поэтому нуль является регулярной точкой оператора $h(\mathbf{0})$.

Покажем, что $h(\mathbf{0}) \geq 0$. Предположим обратное, т. е. выполняются условия леммы 1, но оператор $h(\mathbf{0})$ является отрицательным. Поскольку $\inf \sigma_{\text{ess}}(h(\mathbf{0})) = 0$, то оператор $h(\mathbf{0})$ имеет отрицательное собственное значение z. Пусть $h(\mathbf{0})f = zf$. Тогда собственная функция f оператора $h(\mathbf{0})$ является непрерывной. Из последнего равенства имеем
$$\left(\frac{mm_3}{m+m_3} \varepsilon(t) - z \right) f(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} v(s-p) f(s) ds.$$
Отсюда, произведя замену $\varphi(p) = (\frac{mm_3}{m+m_3}\varepsilon(t) - z) f(p)$, получим
$$\varphi(p) = \frac{m+m_3}{mm_3} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{v(t-p)\varphi(t)dt}{\varepsilon(t) - \frac{m+m_3}{mm_3} z}.$$
Следовательно, имеем оценку
$$\|\varphi\|_{\max} < \max_p \frac{m+m_3}{mm_3} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{|v(t-p)\varphi(t)|dt}{\varepsilon(t)} \leq \frac{\|v\|_{\max} ||\varphi||_{\max}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{dt}{\varepsilon(t)} \frac{m+m_3}{mm_3}$$
или
$$1 < \frac{v_{\max}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{dt}{\varepsilon(t)} \frac{m+m_3}{mm_3}.$$
С другой стороны, поскольку $(m, m_3) \in M$, то
$$\frac{v_{\max}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{T^3} \frac{dt}{\varepsilon(t)} \frac{m+m_3}{mm_3} < 1.$$

Получили противоречие. □

Лемма 2 ([14])**.** *Пусть* $h(\mathbf{0}) \geq 0$ *и нуль является регулярной точкой оператора* $h(\mathbf{0})$. *Тогда* $\sigma(h(k)) \subset (0, \infty)$ *для всех* $k \in T^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Оператор $G(k,z)$ имеет представление $G(k,z) = \mathbf{v} r_0(k,z)$, где $r_0(k,z)$ — оператор умножения на функцию $(E(k;p) - z)^{-1}$, $k \in T^3$, $z \leq 0$.

Лемма 3. *Пусть* $h(\mathbf{0}) \geq 0$ *и нуль является регулярной точкой оператора* $h(\mathbf{0})$. *Тогда* $\|G(k,z)\| < 1$ *для всех* $k \in T^3$ *и* $z \leq 0$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. выполняются условия леммы, но $\|G(k,z)\| \geq 1$ для некоторого $k \in T^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $z \leq 0$. Тогда оператор $G(k,z)$ имеет собственное значение λ, $|\lambda| \geq 1$, поскольку он является компактным. Так как для ограниченных операторов A и B каждое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением и оператора BA с той же кратностью (см., например, [15]), то собственное значение λ оператора $G(k,z) = \mathbf{v} r_0(k,z)$, является собственным значением оператора $[r_0(k,z)]^{1/2} \mathbf{v} [r_0(k,z)]^{1/2}$ $\big(r_0(k,z)\mathbf{v}\big)$ с той же кратностью. Отсюда и из положительности оператора $[r_0(k,z)]^{1/2}\mathbf{v}[r_0(k,z)]^{1/2}$ имеем $\lambda \geq 1$. Пусть

$$r_0(k,z)\mathbf{v}\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in L_2(T^3).$$

Тогда $\mathbf{v}\psi = \lambda h_0(k)\psi - \lambda z\psi$. Следовательно, $0 = \lambda h(k)\psi + (\lambda-1)\mathbf{v}\psi - \lambda z\psi$, $\psi \in L_2(T^3)$ или

$$\lambda(h(k)\psi,\psi) = (1-\lambda)(\mathbf{v}\psi,\psi) + \lambda z(\psi,\psi) < 0.$$

Согласно лемме 2 при $f \neq 0$ имеем $(h(k)f,f) \geq 0$. Получили противоречие. □

3. Доказательство теоремы

Согласно равенству $H_1(K) - zI = (I - V_1R_0(K;z))(H_0(K) - zI)$ оператор $W_1(K;z) := (I - V_1R_0(K;z))^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $z \notin \sigma(H_1(K))$, где $R_0(K;z)$ — оператор умножения на функцию $\mathcal{E}_K(\cdot,\cdot) - z$.

Определим компактный оператор $\mathbf{T}_K(z)$ при $z < \inf\sigma(H_1(K))$ в гильбертовом пространстве $L_2((T^3)^2)$ по формуле

$$\mathbf{T}_K(z) = -R_0(K;z)W_1(K;z)K_{12}(z),$$

где $K_{12}(z)$ — интегральный оператор с ядром

$$K_{12}(p,q;s,t) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{v(p-s)v(q-t)}{\mathcal{E}_K(s,q)-z}, \quad p,q,s,t \in T^3.$$

Лемма 4. *Функция $f \in L_2^{\mathrm{as}}((T^3)^2)$ является собственной функцией оператора $H(K)$, соответствующей собственному значению $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ тогда и только тогда, когда она является решением уравнения*

$$f(p,q) = (T_K(z)f)(p,q) - (T_K(z)f)(q,p). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ — собственное значение оператора $H(K)$ и f — соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение $H(K)f = zf$ имеет нетривиальное решение $f \in L_2^{\mathrm{as}}((T^3)^2)$. Так как $R_0(K;z)$, $z \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0(K))$, ограничен в $L_2((T^3)^2)$, имеем

$$f = R_0(K;z)(V_1 + V_2)f.$$

В силу антисимметричности функции f последнее равенство равносильно равенству

$$f(p,q) = R_0(K;z)(\varphi(p,q) - \varphi(q,p)), \tag{3}$$

где

$$\varphi(p,q) = (V_1f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int v(s-p)f(s,q)ds. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), получим

$$\varphi(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{v(s-p)\varphi(s,q)ds}{\mathcal{E}_K(s,q)-z} - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{v(s-p)\varphi(q,s)ds}{\mathcal{E}_K(s,q)-z}.$$

Представим это равенство в операторной форме

$$(I - V_1R_0(K;z))\varphi = -Q\varphi, \tag{5}$$

где

$$(Q\varphi)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{v(s-p)\varphi(q,s)ds}{\mathcal{E}_K(s,q)-z}.$$

Учитывая, что $W_1(K;z) = (I - V_1R_0(K;z))^{-1}$, $z \in C \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$, в силу (5)

$$\varphi = -W_1(K;z)Q\varphi. \tag{6}$$

Далее в правой части уравнения (6) заменим φ на равенство (4), имеем $\varphi = -W_1(K;z)K_{12}f$. Подставив это выражение в (3), получим уравнение (2).

Легко проверить, что если уравнение (2) имеет нетривиальное решение f, то оно является собственной функцией оператора $H(K)$, соответствующей собственному значению $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$. □

Замечание. Уравнение (2) есть аналог уравнения Вайнберга, которое получено для трехчастичного непрерывного оператора Шрёдингера.

Лемма 5. *Операторнозначные функции $R_0(\mathbf{0};\cdot)V_1$ и $V_1R_0(\mathbf{0};\cdot)$, определенные в $(-\infty,0)$, со значениями в $L_2((T^3)^2)$ являются непрерывными в смысле операторной топологии в $(-\infty,0)$ и $\lim\limits_{z\to-0} R_0(\mathbf{0};z)V_1 = R_0(\mathbf{0};0)V_1$, $\lim\limits_{z\to-0} V_1R_0(\mathbf{0};z) = V_1R_0(\mathbf{0};0)$.*

Доказательство. Утверждения леммы покажем для $R_0(\mathbf{0};\cdot)V_1$. Для $V_1R_0(\mathbf{0};\cdot)$ доказательство производится аналогично. Из непрерывности векторнозначной функции $f(z) = (\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p,q)-z)^{-1}$ в $(-\infty,0)$ и функции $v(\cdot)$ в T^3 получим непрерывность операторнозначной функции $R_0(\mathbf{0};\cdot)V_1$ в $(-\infty,0)$ в смысле операторной топологии.

Заметим, что $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \in (T^3)^2$ является единственной нывырожденной точкой минимума для функции $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\cdot,\cdot)$ и поэтому существуют числа $C', C'' > 0$ такие, что

$$C'(p^2+q^2) \le \mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p,q) \le C''(p^2+q^2) \quad \text{при} \quad p,q \in T^3. \tag{7}$$

Следовательно, $R_0(\mathbf{0};0)V_1$ является ограниченным оператором в $L_2((T^3)^2)$. Из равенства

$$\|(R_0(\mathbf{0};z)V_1 - R_0(\mathbf{0};0)V_1)f\|^2 = \int_{(T^3)^2} \left| \frac{z}{(\mathcal{E}_0(p,q)-z)\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p,q)} \int_{T^3} v(s-p)f(s,p)ds \right|^2 dp\,dq$$

получим неравенство

$$\|R_0(\mathbf{0};z)V_1 - R_0(\mathbf{0};0)V_1\|^2 \le C \int_{(T^3)^2} \int_{T^3} \frac{z^2}{|(\mathcal{E}_0(p,q)-z)\mathcal{E}_0(p,q)|^2} |v(s-p)|^2 ds\,dp\,dq.$$

Согласно неравенству (7) имеем

$$\|R_0(\mathbf{0};z)V_1 - R_0(\mathbf{0};0)V_1||^2 \le C \int_{(T^3)^2} \frac{z^2}{|(p^2+q^2-z)(p^2+q^2)|^2} dp\,dq \le C|z|,$$

где $C>0$ не зависит от z. Отсюда $\|R_0(\mathbf{0};z)V_1 - R_0(\mathbf{0};0)V_1\| \to 0$ при $z \to -0$. □

Имеет место представление

$$(V_1R_0(\mathbf{0};z)f)(p_1,p_2) = \left[\mathbf{v}r_0(p_1, z - \frac{1}{m}\varepsilon(p_1)) \otimes If\right](p_1,p_2).$$

Поэтому если $h(\mathbf{0}) \ge 0$ и нуль является регулярной точкой оператора $h(\mathbf{0})$, то согласно лемме 3

$$\|V_1R_0(\mathbf{0};z)\| < 1, \quad z \le 0. \tag{8}$$

Отсюда и из леммы 5 вытекает

Лемма 6. *Пусть $h(\mathbf{0}) \ge 0$ и нуль является регулярной точкой оператора $h(\mathbf{0})$. Тогда оператор $(I - V_1R_0(\mathbf{0};z))^{-1}$ при $z<0$ существует и определен в $L_2((T^3)^2)$. Кроме того, $\lim\limits_{z\to-0}(I - V_1R_0(\mathbf{0};z))^{-1} = (I - V_1R_0(\mathbf{0};0))^{-1}$ в смысле операторной топологии.*

Лемма 7. *Пусть $h(\mathbf{0}) \ge 0$ и нуль является регулярной точкой оператора $h(\mathbf{0})$. Тогда $\lim\limits_{z\to-0} T_{\mathbf{0}}(z) := T_{\mathbf{0}}(0)$ в смысле операторной топологии.*

Доказательство. Из (8) оператор имеем

$$W_1(\mathbf{0};z)=\sum_{l=0}^{\infty}[V_1R_0(\mathbf{0};z)]^l.$$

Оператор

$$T_{\mathbf{0}}(z)=-R_0(\mathbf{0};z)W_1(\mathbf{0};z)K_{12}(z)=\left(I+R_0(\mathbf{0};z)V_1\sum_{l=1}^{\infty}[V_1R_0(\mathbf{0};z)]^{(l-1)}\right)R_0(\mathbf{0};z)K_{12}(z)=$$
$$=-R_0(\mathbf{0};z)K_{12}(z)+R_0(\mathbf{0};z)V_1W_1(\mathbf{0};z)R_0(\mathbf{0};z)K_{12}(z),\quad (9)$$

где $R_0(\mathbf{0};z)K_{12}(z)$ является интегральным оператором с ядром

$$K(p,q;s,t;z)=\frac{v(p-s)v(q-t)}{(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p,q)-z)(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(s,q)-z)},\quad p,q,s,t\in T^3.$$

Поскольку $(\mathbf{0},\mathbf{0})\in(T^3)^2$ является единственной невырожденной точкой минимума для функции $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(\cdot,\cdot)$, то легко проверить сходимость интеграла

$$\int_{(T^3)^4}|K(p,q;s,t;z)|^2dp\,dq\,ds\,dt,\quad z\le 0.$$

Поскольку функция $K(\cdot;z)$ является квадратично-интегрируемой на $(T^3)^4$ при $z\le 0$ и сходится почти всюду к $K(\cdot;0)$ при $z\to 0$, то по теореме Лебега оператор $R_0(\mathbf{0};z)K_{12}(z)$ сходится по норме к $R_0(\mathbf{0};0)K_{12}(0)$ при $z\to 0$. Отсюда и (9) согласно леммам 5, 6 получим утверждение леммы. □

Завершение доказательства теоремы. Предположим обратное, т. е. пусть выполняются условия теоремы, а оператор $H(\mathbf{0})$ имеет бесконечное число отрицательных собственных значений

$$z_1\le\cdots\le z_k\le\cdots<0,\quad \lim_{k\to\infty}z_k=0.$$

Обозначим через $\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\ldots$ собственные (ортонормальные) функции, соответствующие собственным значениям $z_1\le\cdots\le z_k\le\cdots<0$. Тогда эти собственные функции удовлетворяют уравнению (2)

$$\varphi_n(p,q)=(T_{\mathbf{0}}(z_n)\varphi_n)(p,q)-(T_{\mathbf{0}}(z_n)\varphi_n)(q,p),\quad n=1,2,\ldots\ .$$

Отсюда и из леммы 7 получим противоречие $1=\|\varphi_n\|\le 2\|T_{\mathbf{0}}(z_n)\varphi_n\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Литература

[1] Ефимов В.Н. *Связанные состояния трех резонансно взаимодействующих частиц*, Ядерная физика **12** (5), 1080–1091 (1970).

[2] Amado R.D., Noble J.V. *Efimov's effect: a new pathology of three-particle systems.* II, Phys. Rev. D. **5** (8), 1992–2002 (1971).

[3] Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц* (Наука, М., 1985).

[4] Яфаев Д.Р. *К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера*, Матем. сб. **9** (4), 567–592 (1974).

[5] Ovchinnikov Yu.N., Sigal I.M. *Number of bound states of three-body systems and Efimov's effect*, Ann. Phys. **123** (2), 274–295 (1989).

[6] Tamura H. *The Efimov effect of three-body Schrödinger operator*, J. Funct. Anal. **95** (2), 433–459 (1991).

[7] Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. *Конечность дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке*, Теорет. и матем. физика **111** (1), 94–108 (1997).

[8] Лакаев С.Н., Саматов С.М. *О конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке*, Теор. и матем. физика **129** (3), 415–431 (2001).

[9] Лакаев С.Н., Муминов М.Э. *Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке*, Теор. и матем. физика **135** (3), 478–503 (2003).

[10] Лакаев С.Н., Шерматов М.Х. *О спектре гамильтониана одной системы трех квантовых частиц на решетке*, УМН **54** (6), 165–166 (1999).

[11] Dell'Antonio G.F., Muminov Z.I., and Shermatova Y.M. *On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three-particles on lattices*, J. Phys. A: Math. Theor., №44 (2011) 315302 doi: 10.1088/1751-8113/44/31/315302.

[12] Муминов М.Э. *О конечности дискретного спектра оператора Шрёдингера трех частиц на решетке*, Теорет. и матем. физика **154** (2), 363–371 (2008).

[13] Albeverio S., Lakaev S.N., and Muminov Z.I. *On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices*, Math. Nachrichten **280** (7), 699–716 (2007).

[14] Муминов М.Э. *О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке*, Теор. и матем. физика **153** (3), 381–387 (2007).

[15] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Учеб. пособие (Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1980).

М.Э. Муминов

доцент, Малайзийский технологический университет,
факультет наук,
Джохор Бахру, Скудай, 81310, Малайзия,

e-mail: mmuminov@mail.ru

Ё.М. Шерматова

докторант, Самаркандский государственный университет,
Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140101, Республика Узбекистан

M.E. Muminov and E.M. Shermatova

On finiteness of discrete spectrum of three-particle Schrödinger operator on a lattice

Abstract. On three-dimensional lattice we consider a system of three quantum particles (two of them are identical (fermions) and the third one is of another nature) that interact with the help of paired short-range potentials of attraction. We prove the finiteness of a number of bound states of respective Schrödinger operator in a case when potentials satisfy some conditions and the zero is a regular point for two-particle subhamiltonian. We find a set of particles masses' values such that the Schrödinger operator may have only finite number of eigenvalues lying to the left from essential spectrum.

Keywords: three-particle system on a lattice, Schrödinger operator, essential spectrum, discrete spectrum, Vineberg equation, virtual level.

M.E. Muminov

Associate Professor, University of Technology Malaysia,
Faculty of Science, UTM,
Johor Bahru, Skudai, 81310, Malaysia,

e-mail: mmuminov@mail.ru

E.M. Shermatova

Doctorant, Samarkand State University,
15 Universiteskii blvd., Samarkand, 140101 Republic of Uzbekistan