Известия вузов. Математика
2016, № 1, с. 3–14

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

П.Д. АНДРЕЕВ, В.В. СТАРОСТИНА

ГЕОМЕТРИЯ КАСАТЕЛЬНОГО КОНУСА К G-ПРОСТРАНСТВУ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ВЫДЕЛЕННЫМ СЕМЕЙСТВОМ ОТРЕЗКОВ

Аннотация. Приводится конструкция касательного конуса к G-пространству Буземана с выделенным семейством отрезков с дополнительным условием неположительности кривизны по Буземану относительно этого выделенного семейства. Доказывается, что построенный конус обладает геометрическими свойствами, аналогичными свойствам касательного конуса стандартного G-пространства неположительной кривизны. Ранее конструкция касательного конуса позволила первому автору доказать гипотезу Г. Буземана для G-пространств неположительной кривизны, утверждающую, что всякое такое пространство является топологическим многообразием. Построенный нами касательный конус может служить основным инструментом для обобщения этой теоремы на рассматриваемый класс пространств.

Ключевые слова: G-пространство Буземана, выделенное семейство отрезков, неположительная кривизна, гипотеза Буземана, касательный конус.

УДК: 514.1

Введение

В статье П.Д. Андреева [1] изучается топологическое строение G-пространств Буземана неположительной кривизны. В частности, там доказывается, что всякое такое пространство является топологическим многообразием. Это подтверждает в указанном классе пространств известную гипотезу Г. Буземана [2], утверждающую, что всякое G-пространство является многообразием.

П.Д. Андреев в доказательстве использует конструкцию касательного конуса к G-пространству неположительной кривизны и его геометрические свойства. В данной работе мы обобщаем указанную конструкцию применительно к классу G-пространств Буземана неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков.

Понятие G-пространства с выделенным семейством отрезков было введено Г. Буземаном и Б. Фадке в работах [3] и [4]. Аксиоматика G-пространства X с выделенным семейством отрезков сходна с аксиоматикой стандартных G-пространств, введенной в [2], но опирается не на все семейство отрезков в X, а лишь на определенным образом выделенное подсемейство. Основным примером такого пространства может служить произвольное нормированное пространство, в котором в качестве выделенного семейства принимается семейство аффинных отрезков. Стандартное G-пространство X также можно считать G-пространством

Поступила 27.05.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-00219-а.

с выделенным семейством отрезков. В этом случае выделенное семейство отрезков в X — это семейство всех его отрезков.

Некоторые геометрические исследования в пространствах с выделенным семейством отрезков включают лишь часть аксиом Буземана–Фадке. Так аксиомы **A** и **B** в работах Е.Н. Сосова [5] и [6] можно рассматривать как часть аксиоматики G-пространств. Аналогичные аксиомы приводятся в работе Б. Клейнера [7]. В этой работе семейство отрезков, удовлетворяющее указанным аксиомам, называется *адекватным*. Пространство, являющееся выпуклым относительно адекватного семейства отрезков, называется *часто выпуклым пространством* (often convex space). Фактически, выпуклость относительно выделенного семейства отрезков означает неположительность кривизны по Буземану для такого класса пространств.

Основная цель статьи — построение касательного конуса в G-пространстве неположительной кривизны по Буземану относительно выделенного семейства отрезков и изучение его свойств. Символом Σ обозначим выделенное семейство отрезков, удовлетворяющее аксиомам G-пространства Буземана–Фадке и аксиоме неположительности кривизны. Метрическое пространство X с метрикой d и таким выделенным семейством отрезков Σ для краткости будем называть Σ-пространством и обозначать как тройку (X, d, Σ).

В общем случае конструкция касательного конуса к метрическому пространству не является новой. В книге ([8], с. 385–389) приводятся два возможных подхода к построению такого конуса в общем случае. Еще один существенно новый подход выполнен в статье [5], где касательный конус называется *касательным пространством по Буземану*.

Наша задача состояла в построении касательного конуса как пространства с выделенным семейством отрезков. Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть (X, d, Σ) — Σ-пространство с отмеченной точкой $p \in X$, $K_pX = (X, d^*)$ — его касательный конус с вершиной p. Тогда в пространстве K_pX существует такое выделенное семейство отрезков Σ^*, что тройка (X, d^*, Σ^*) является Σ-пространством, причем справедливы следующие свойства*:

(1) $d^*(x, y) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$;
(2) *тождественное отображение* $\mathrm{Id} : X \to X$ *является гомеоморфизмом пространства (X, d) на пространство (X, d^*)*;
(3) *подсемейство в Σ^*, состоящее из выделенных отрезков, проходящих через точку p, совпадает с аналогичным подсемейством в Σ, причем вдоль каждого такого отрезка $d^* = d$*;
(4) *на пространстве (X, d^*) действует группа H положительных гомотетий с центром в точке p.*

1. Предварительные сведения

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Открытый шар с центром $o \in X$ радиусом r обозначается $U(o, r)$, соответствующий замкнутый шар — $B(o, r)$. Для произвольного пути $\gamma : [a, b] \to X$ стандартным образом определяется его длина $\ell(\gamma)$ (см. [8], с. 39).

Определение 1. *Отрезком* $[xy]$ в метрическом пространстве (X, d), соединяющим точки $x, y \in X$, называется образ спрямляемого пути $\gamma : [0, 1] \to X$ с $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$, длина которого равна расстоянию $d(x, y)$:

$$\ell(\gamma) = d(x, y).$$

Точки x и y при этом называются *концами* отрезка $[xy]$. При этом порядок точек x и y не является существенным: $[xy] = [yx]$. Пространство (X, d) называется *геодезическим пространством*, если в нем любые две точки можно соединить отрезком. В общем случае отрезок, соединяющий две данные точки, может быть определен не однозначно.

Определение 2. Пусть (X, d) — конечно компактное геодезическое пространство. Предположим, что в X задано семейство отрезков Σ так, что при этом выполнены следующие аксиомы.

(1) Любые две точки $x, y \in X$ соединяются единственным отрезком $[xy]$ семейства Σ.
(2) Для любого отрезка семейства Σ всякий содержащийся в нем отрезок также принадлежит Σ.
(3) Для любой точки $x \in X$ существует такое положительное число $r(x)$, что в открытом шаре $U(x, r(x))$ выполняется свойство продолжения отрезков семейства Σ: для любых точек $y, z \in U(x, r(x))$ существует такая точка $w \in U(x, r(x))$ и такой отрезок $[zw] \in \Sigma$, что $y \in [zw]$.
(4) В X выполняется свойство единственности продолжения отрезков семейства Σ: если для $[xy], [xz] \in \Sigma$ пересечение $[xy] \cap [xz]$ содержит точку, отличную от x, то либо $[xy] \subset [xz]$, либо $[xz] \subset [xy]$.
(5) Если отрезок $[xy]$ является пределом в смысле метрики Хаусдорфа последовательности отрезков $[x_n y_n]$, принадлежащих Σ, то $[xy] \in \Sigma$.

Тогда пространство X называется G-пространством Буземана относительно семейства отрезков Σ. Само это семейство будем называть выделенным семейством отрезков в X.

Аксиомы (1) и (2) были введены в ([5], аксиомы **A** и **B**). Остальные перечисленные выше аксиомы являются интерпретацией стандартных аксиом G-пространства (см., например, [3]) на языке отрезков выделенного семейства Σ.

Определение 3. Пусть (X, d) — G-пространство Буземана относительно выделенного семейства отрезков Σ. Пространство X называется G-пространством неположительной кривизны относительно Σ, если в нем выполнена следующая аксиома неположительности кривизны.

- Для любых трех точек $x, y, z \in X$ выполнено следующее. Пусть m — середина выделенного отрезка $[xy]$ и n — середина выделенного отрезка $[xz]$. Тогда
$$d(m, n) \leq \frac{1}{2} d(y, z).$$

Далее в нашей работе рассматриваются в основном G-пространства неположительной кривизны. Для краткости далее всякое такое пространство будем обозначать как тройку (X, d, Σ) и называть Σ-пространством.

Замечание 1. Аксиома (5) в определении 2 является следствием неположительности кривизны. Поэтому из определения Σ-пространства ее следует изъять.

В определении выделенного семейства отрезков в касательном конусе пространства X используем понятие предела по ультрафильтру ω. Общую теорию фильтров и пределов по фильтрам можно найти, например, в [9]. Здесь используем следующую трактовку предела последовательности точек пространства по неглавному ультрафильтру на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Определение 4. Пусть ω — неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$. Точка $b \in X$ метрического пространства (X, d) называется пределом последовательности a_n по ω, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid d(a_n, b) < \varepsilon\}$ принадлежит ω. Обозначим $b = \lim\limits_{\omega} a_n$.

Заметим, что если последовательность a_n содержится в компактном подмножестве X, то ее предел по неглавному ультрафильтру существует и однозначно определен.

2. Основная конструкция

Пусть задано Σ-пространство (X, d, Σ). Зафиксируем точку $p \in X$. Произвольную точку $x \in X$ соединим с точкой p отрезком из выделенного семейства. Для произвольного $t \geq 1$ определим на X метрику d_t. Для точки $x \in X$ через x_t будем обозначать точку на выделенном отрезке $[px]$, для которой

$$d(p, x_t) = \frac{d(p,x)}{t}.$$

Метрика d_t определяется равенством $d_t(x,y) = t \cdot d(x_t, y_t)$. В частности, $d_1 = d$. Очевидно, d_t является метрикой при любом $t \geq 1$, и метрическое пространство (X, d_t) подобно пространству (X, d) с коэффициентом t. Гомотетии $h_t : X \to X$ пространства (X, d) на пространства (X, d_t) с коэффициентом t определяются равенствами $h_t(x_t) = x$ для всех $x \in X$. В частности, $h_t(p) = p$, т. е. точка p является общим центром для всех указанных гомотетий.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для любых двух точек $x, y \in X$ существует предел $d^*(x,y) = \lim\limits_{t\to+\infty} d_t(x,y)$.*
(2) *Функция $d^* : X \times X \to \mathbb{R}$ является метрикой на X.*
(3) *Для любых $x, y \in X$ выполнено неравенство $d^*(x,y) \leq d(x,y)$.*
(4) *Метрическое пространство (X, d^*) является геодезическим пространством.*
(5) *Если $[px] \in \Sigma$, то этот отрезок также является и отрезком в смысле метрики d^*.*

Доказательство. (1) Доказательство аналогичного утверждения приведено в ([5], теорема 1).

(2) Выберем произвольные различные точки $x, y \in X$. Покажем, что $d^*(x,y) > 0$. Утверждение является очевидным следствием неравенства треугольника для псевдометрики в случае $d(p,x) \neq d(p,y)$.

Рассмотрим случай $d(p,x) = d(p,y)$. Не уменьшая общности, можем считать, что $d(p,x) = d(p,y) = 1$ и в шаре $B(p,1)$ выполняется свойство продолжения выделенных отрезков. Выберем точку $\overline{x}$ на продолжении выделенного отрезка $[px]$ за точку p так, чтобы $d(p,\overline{x}) = 1$. Такая точка определена однозначно.

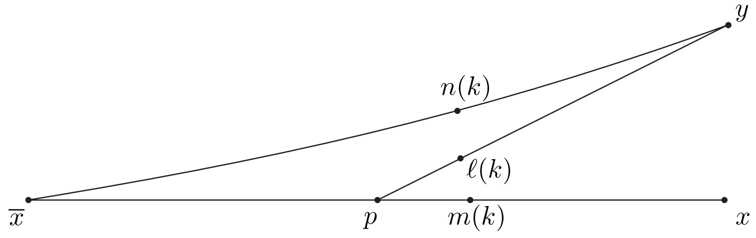

Рис.

Предположим, что $d^*(x,y) = \lim\limits_{t\to+\infty} t \cdot d(x_t, y_t) = 0$. Для каждого $k \in [0,1]$ на выделенном отрезке $[\overline{x}x]$ выберем точку $m(k)$ такую, что $d(\overline{x}, m(k)) = 2k$, а на выделенном отрезке $[\overline{x}y]$ — точку $n(k)$ такую, что $d(\overline{x}, n(k)) = k \cdot d(\overline{x}, y)$. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ функцию $f(k) = d(m(k), n(k))$.

Функция $f(k)$ положительна, а из свойства неположительности кривизны следует, что она является выпуклой и возрастающей. Поэтому для каждого $k \in (0,1)$ она имеет как левую, так и правую производные, которые положительны. Далее получим противоречие с этим фактом.

Пусть $k \geq \frac{1}{2}$. В этом случае

$$d(p, m(k)) = d(\overline{x}, m(k)) - d(\overline{x}, p) = k \cdot d(\overline{x}, x) - d(\overline{x}, p) = 2k - 1.$$

Обозначим

$$t = \frac{1}{2k-1}. \tag{2.1}$$

Тогда точка $m(k)$ совпадает с x_t, для которой по определению $d(p, x_t) = \frac{1}{t} \cdot d(p, x) = \frac{1}{t}$.

Пусть также $l(k) \in [py]$ — точка, совпадающая с y_t. По условию $d(p,x) = d(p,y)$, поэтому

$$d(p, l(k)) = d(p, m(k)) = 2k - 1.$$

Оценим правую производную функции $f(k)$ при $k = \frac{1}{2}$:

$$f'_{+}(1/2) = \lim_{k \to 1/2+0} \frac{f(k) - f(1/2)}{k - 1/2}.$$

Из неравенства треугольника имеем

$$\frac{f(k) - f(1/2)}{k - 1/2} = \frac{d(m(k), n(k)) - f(1/2)}{k - 1/2} \leq \frac{d(m(k), l(k))}{k - 1/2} + \frac{d(l(k), n(k)) - f(1/2)}{k - 1/2}.$$

Учитывая (2.1), получаем

$$\frac{d(m(k), l(k))}{k - 1/2} = 2t \cdot d(x_t, y_t),$$

где правая часть по предположению стремится к нулю при $t \to +\infty$, т. е. при $k \to 1/2 + 0$

$$\lim_{k \to 1/2+0} \frac{d(m(k), l(k))}{k - 1/2} = 0.$$

В итоге получаем оценку

$$\lim_{k \to 1/2+0} \frac{d(m(k), n(k)) - f(1/2)}{k - 1/2} \leq \lim_{k \to 1/2+0} \frac{d(l(k), n(k)) - f(1/2)}{k - 1/2}.$$

В то же время, положительная при $1/2 \leq k < 1$ выпуклая функция $d(l(k), n(k))$ является убывающей. Значит, ее правая производная отрицательна. Противоречие. Следовательно, предположение $d^*(x,y) = 0$ ложно и для различных точек $x, y \in X$ имеем $d^*(x,y) > 0$, т. е. псевдометрика d^* является метрикой.

(3) Выберем произвольные точки $x, y \in X$, соединим их с точкой p соответствующими отрезками выделенного семейства $[px]$ и $[py]$. Для произвольного параметра $t_1 > 1$ получим точку x_{t_1} на выделенном отрезке $[px]$ и точку y_{t_1} на выделенном отрезке $[py]$. Аналогично, для параметра $t_2 > 1$ получаем точки $x_{t_2} \in [px]$ и $y_{t_2} \in [py]$. Пусть $t_2 > t_1 > 1$. Тогда из условия неположительности кривизны следует $d(x_{t_2}, y_{t_2}) \leq \frac{t_1}{t_2} \cdot d(x_{t_1}, y_{t_1})$, поэтому имеем соотношение $d_{t_2}(x,y) \leq d_{t_1}(x,y)$.

Следовательно, положительная функция $\varphi_{(x,y)}(t) = d_t(x,y)$ является невозрастающей, и так как метрика d^* является пределом метрик d_t, то для всех $x, y \in X$ и всех $t \geq 1$ выполняется

$$d^*(x,y) \leq d_t(x,y) \leq d(x,y). \tag{2.2}$$

(4) Поскольку метрическое пространство (X, d_t) подобно конечно компактному геодезическому пространству (X, d), то (X, d_t) также является конечно компактным геодезическим пространством. Отсюда легко следует, что между любыми двумя точками $x, y \in X$ есть середина m в смысле предельной метрики d^*. Следовательно, пространство (X, d^*) выпукло по Менгеру. Являясь пределом конечно компактных пространств, пространство (X, d^*) конечно компактно. Отсюда получаем, что (X, d^*) — геодезическое пространство.

(5) Пусть $[px] \in \Sigma$. Из определения метрики d_t следует, что $[px]$ также является отрезком в метрике d_t. Из условия $d^*(x, y) = \lim\limits_{t \to +\infty} d_t(x, y)$ получаем, что $[px]$ в метрике d^*, как предел отрезков $[px]$ метрик d_t, является отрезком. □

Из утверждений (2) и (3), аналогично лемме 4 и следствию 1 в [1], получаем

Следствие 1. Метрики d и d^* на множестве X эквивалентны.

Последнее утверждение леммы 1 допускает следующее усиление. Для произвольного $t \geq 1$ будем считать семейство отрезков

$$\Sigma_t = h_t^*(\Sigma) \tag{2.3}$$

выделенным семейством отрезков в метрике d_t. Здесь $h_t : X \to X$ — определенная выше гомотетия пространства (X, d) на пространство (X, d_t), а h_t^* — индуцированное отображение семейства подмножеств X на себя. Понятно, что пространство (X, d_t) по отношению к семейству Σ_t обладает всеми свойствами, которые выполняются для пространства (X, d) по отношению к семейству Σ.

Лемма 2. *Для любой точки $x \in X$ и любого $t \geq 1$ выделенный отрезок $[px] \in \Sigma$ поточечно совпадает с выделенным отрезком $[px]_t = h_t^*([px_t]) \in \Sigma_t$.*

Доказательство. Пусть $[px]$ и $[px]_t$ — соответственно, выделенные отрезки в смысле метрик d и d_t, соединяющие точку p с точкой x.

Для $s \geq 1$ обозначим $z = x_s \in [px]$. Заметим также, что $p = p_t$. Тогда

$$z_t = (x_s)_t = x_{st} = (x_t)_s \in [p_t x_t] \subset [px].$$

Следовательно, $z \in [px]_t$, т. е. всякая точка отрезка $[px]$ является и точкой отрезка $[px]_t$. □

Далее в метрическом пространстве (X, d^*) определим систему выделенных отрезков.

Будем рассматривать только натуральные значения параметров $t = n \in \mathbb{N}$ так, что

$$d_n(x, y) = n \cdot d(x_n, y_n).$$

В этом случае мы имеем возможность воспользоваться понятием предела по неглавному ультрафильтру на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Зафиксируем произвольно такой неглавный ультрафильтр ω. Пусть $[xy]_n$ — последовательность выделенных отрезков в метриках d_n, соединяющих точки x и y, с аффинными параметризациями $\gamma_n : [0, 1] \to X$, при которых $\gamma_n(0) = x$ и $\gamma_n(1) = y$. При всяком $s \in [0, 1]$ последовательность $\gamma_n(s)$ ограничена в смысле метрики d:

$$d(p, \gamma_n(s)) \leq n \cdot (d(p, x_n) + d(x_n, y_n)) \leq n \cdot (2 \cdot d(p, x_n) + d(p, y_n)) = 2 \cdot d(p, x) + d(p, y) = \mathrm{const}\,.$$

Из конечной компактности пространства X следует, что при всяком $s \in [0, 1]$ существует предел

$$\gamma^*(s) = \lim_{\omega} \gamma_n(s),$$

причем отображение $\gamma^* : [0,1] \to X$ непрерывно. Докажем, что γ^* в действительности является аффинной параметризацией некоторого отрезка в смысле метрики d^*, соединяющего x с y.

Для любых $s, r \in [0,1]$ при $s < r$ по определению имеем $\gamma^*(s) = \lim\limits_{\omega} \gamma_n(s)$ и $\gamma^*(r) = \lim\limits_{\omega} \gamma_n(r)$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$

$$A_s = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid d(\gamma_n(s), \gamma^*(s)) < \frac{\varepsilon \cdot d^*(x,y)}{3} \right\} \in \omega$$

и

$$A_r = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid d(\gamma_n(r), \gamma^*(r)) < \frac{\varepsilon \cdot d^*(x,y)}{3} \right\} \in \omega.$$

Поэтому

$$A_s \cap A_r \in \omega. \tag{2.4}$$

По определению $d^*(\gamma^*(s), \gamma^*(r)) = \lim\limits_{n \to +\infty} d_n(\gamma^*(s), \gamma^*(r))$. Значит, при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$|d^*(\gamma^*(s), \gamma^*(r)) - d_n(\gamma^*(s), \gamma^*(r))| < \frac{\varepsilon \cdot d^*(x,y)}{3}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) и сходимости $d_n(x,y) \to d^*(x,y)$ при $n \to +\infty$ получаем, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых справедлива оценка

$$\left| \frac{d^*(\gamma^*(s), \gamma^*(r))}{d^*(x,y)} - \frac{d_n(\gamma_n(s), \gamma_n(r))}{d_n(x,y)} \right| < \varepsilon.$$

Тот факт, что при всех $n \in \mathbb{N}$ отображение γ_n является аффинной параметризацией отрезка в метрике d_n, означает

$$\frac{d_n(\gamma_n(s), \gamma_n(r))}{d_n(x,y)} = r - s,$$

т. е.

$$\left| \frac{d^*(\gamma^*(s), \gamma^*(r))}{d^*(x,y)} - (r - s) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, устремляя ε к нулю, получаем

$$d^*(\gamma^*(s), \gamma^*(r)) = (r - s) \cdot d^*(x,y).$$

Таким образом, γ^* действительно является аффинной параметризацией отрезка $[xy]_*$ в смысле метрики d^*.

Замечание 2. Если $\gamma^* : [0,1] \to X$ — аффинная параметризация выделенного отрезка в метрике d^*, соединяющего точку x с точкой y, то простая проверка показывает, что отображение $\overline{\gamma}^* : [0,1] \to X$, $\overline{\gamma}^*(t) = \gamma^*(1-t)$ аффинно параметризует выделенный отрезок, соединяющий точку y с x. Следовательно, $\overline{\gamma}^*([0,1])$ как множество точек совпадает с $\gamma^*([0,1])$. Таким образом, отрезок $[xy]_* = \gamma^*([0,1]) = \overline{\gamma}^*([0,1]) = [yx]_*$ как подмножество в X не зависит от порядка точек x и y.

Определение 5. Отрезок $[xy]_* = \gamma^*([0,1])$, являющийся пределом выделенных отрезков $[xy]_n = \gamma_n([0,1])$ по неглавному ультрафильтру ω, будем называть выделенным отрезком в смысле метрики d^*. Семейство отрезков, построенных по такой схеме, обозначим Σ^*. Для любых $x, y \in X$ отрезок $[xy]_* \in \Sigma^*$ определен однозначно, т. е. семейство Σ^* удовлетворяет аксиоме **A** Е.Н. Сосова (аксиоме (1) определения 2).

Далее убедимся, что для семейства Σ^* выполняется аксиома (2) (аксиома **B** Е.Н. Сосова).

Утверждение 1. Пусть $\gamma^* : [0,1] \to X$ — аффинная параметризация отрезка $[xy]_* \in \Sigma^*$, $\gamma^*(0) = x$, $\gamma^*(1) = y$. Пусть $z = \gamma^*(s)$ для $s \in (0,1)$. Тогда отображение $\overline{\gamma} : [0,1] \to X$, заданное формулой $\overline{\gamma}(\lambda) = \gamma^*(\lambda s)$, задает отрезок семейства Σ^*, соединяющий точку x с z.

Доказательство. Пусть $\{[xy]_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность выделенных отрезков в метриках d_n с аффинными параметризациями $\gamma_n : [0,1] \to X$. Обозначим $\gamma_n(s) = z_n$. Для точек z_n выполняется

$$\frac{d_n(x,z_n)}{d_n(x,y)} = s. \tag{2.6}$$

По определению отрезка $[xy]_*$ имеем $z = \lim\limits_{\omega} z_n$.

Пусть $\delta_n : [0,1] \to X$, $\delta_n(0) = x$, $\delta_n(1) = z$ — аффинные параметризации выделенных отрезков $[xz]_n$ в метриках d_n, соединяющих точки x и z.

Для произвольного $\lambda \in [0,1]$ выполняются равенства

$$\frac{d_n(x,\delta_n(\lambda))}{d_n(x,z)} = \lambda$$

и

$$\frac{d_n(x,\gamma_n(\lambda s))}{d_n(x,y)} = \lambda s. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) также следует

$$\frac{d_n(x,\gamma_n(\lambda s))}{d_n(x,z_n)} = \lambda.$$

Применяя условие неположительности кривизны метрики d_n к треугольнику $\triangle xzz_n$ и точкам $\gamma_n(\lambda s) \in [xz]_n$ и $\delta_n(\lambda) \in [xz_n]_n$, получаем $d_n\left(\gamma_n(\lambda s), \delta_n(\lambda)\right) \le \lambda d_n(z,z_n)$.

Из соотношений $z = \lim\limits_{\omega} z_n$, $\gamma^*(\lambda s) = \lim\limits_{\omega} \gamma_n(\lambda s)$, и подобия метрик d и d_n следует

$$\gamma^*(\lambda s) = \lim_{\omega} \delta_n(\lambda).$$

Таким образом, отображение $\overline{\gamma} : [0,1] \to X$, $\overline{\gamma}(\lambda) = \gamma^*(\lambda s)$, как предел по ультрафильтру ω аффинных параметризаций выделенных отрезков $[xz]_n$, определяет выделенный отрезок в смысле метрики d^*, соединяющий точку x с z. □

Следствие 2. Для любого отрезка семейства Σ^* всякая его часть также является отрезком семества Σ^*.

Доказательство. Предположим, что $[xy]_* \in \Sigma^*$. Выберем произвольно две точки u и v на отрезке $[xy]_*$ так, что выполнен порядок $x - u - v - y$. По утверждению 1 $[xv]_* \subset [xy]_*$. Принимая во внимание замечание 2, делаем вывод, что $[xv]_*$ как множество точек совпадает с $[vx]_*$ и $[vx]_* \in \Sigma^*$. Аналогично, $[vu]_* \subset [vx]_*$ и $[uv]_* = [vu]_* \in \Sigma^*$. □

Следующее утверждение является очевидным следствием построения семейства Σ^* как предела семейств Σ_n по ультрафильтру ω и того факта, что каждое пространство (X, d_n) обладает свойством продолжаемости отрезков и является пространством неположительной кривизны относительно семейств Σ_n.

Утверждение 2. Пространство (X, d^*) удовлетворяет аксиомам продолжаемости отрезков и неположительности кривизны относительно семейства отрезков Σ^*.

Далее показываем, что семейства Σ и Σ^* обладают общими отрезками, содержащими точку p.

Утверждение 3. Для любой точки $x \in X$ выделенный отрезок $[px] \in \Sigma$ поточечно совпадает с выделенным отрезком $[px]_* \in \Sigma^*$.

Доказательство следует из леммы 2 и определения семейства Σ^*. □

Утверждение 4. Если точка p принадлежит выделенному отрезку $[xy] \in \Sigma$, то p принадлежит также выделенным отрезкам $[xy]$ в смысле метрик d_t при произвольном $t \geq 1$ и отрезку $[xy] \in \Sigma^*$.

Доказательство аналогично лемме 2 и утверждению 3. □

Утверждение 5. Если точка p не принадлежит выделенному отрезку $[xy] \in \Sigma$, то p также не принадлежит выделенному отрезку $[xy] \in \Sigma^*$.

Доказательство. Рассмотрим следующие два случая.

1) $d(x,y) < d(x,p) + d(p,y)$.

В этом случае из (2.2) имеем $d^*(x,y) \leq d(x,y)$, а по лемме 2 $d^*(x,p) = d(x,p)$ и $d^*(p,y) = d(p,y)$. Отсюда получаем $d^*(x,y) < d^*(x,p) + d^*(p,y)$, т. е. точка p не принадлежит никакому, в том числе выделенному, отрезку $[xy]$ в смысле метрики d^*.

2) $d(x,y) = d(x,p) + d(p,y)$, т. е. p содержится в некотором отрезке с концами x и y, но этот отрезок не входит в Σ.

Соединим точки p и x выделенным отрезком $[px]$, точки p и y — выделенным отрезком $[py]$ (по лемме 2 данные отрезки являются выделенными для всех метрик d, d_t, d^*).

Заметим, что достаточно рассмотреть случай $d(x,p) = d(p,y)$. Действительно, предположим, что утверждение не выполняется для произвольной пары точек x, y, например, при $d(x,p) > d(p,y)$. Тогда выберем точку $\overline{x}$ выделенного отрезка $[xp]$, для которой $d(\overline{x},p) = d(p,y)$. Теперь, пользуясь свойством неположительности кривизны и следствием 2, несложно доказать, что и для пары точек $\overline{x}, y$ наше утверждение также не будет выполняться. Поэтому далее считаем $d(x,p) = d(p,y)$.

Соединим точки x и y выделенным отрезком $[xy] \in \Sigma$ и выделенными отрезками $[xy]_n \in \Sigma_n$. Пусть z — середина $[xy]$ и z_n — середина $[xy]_n$.

Для $t \geq 1$ стандартным образом определяются точки x_t на $[px]$ и y_t на $[py]$. Обозначим через z_{nt} середину выделенного отрезка $[x_t y_t]_n$ в смысле метрики d.

Далее определим точки $a_t, b_t \in [xy]$ по правилу $d(x,a_t) = d(y,b_t) = d(x,x_t) = d(y,y_t)$.

Имеем равенства $d(p,x_t)/d(p,x) = \frac{1}{t}$, и так как по условию $d(x,y) = d(x,p) + d(p,y)$ и $d(x,p) = d(p,y)$, то $d(x,p) = \frac{1}{2} \cdot d(x,y)$. Кроме того, поскольку z — середина $[xy]$, то $d(x,x_t)/d(p,x) = d(x,a_t)/d(x,z) = (t-1)/t$.

Следовательно, из условия неположительности кривизны в смысле Буземана, получаем

$$d(a_t, x_t) \leq \frac{t-1}{t} \cdot d(z,p).$$

Аналогично, $d(b_t, y_t) \leq (t-1)/t \cdot d(z,p)$.

Оценим величину $d(p, z_n)$. Из неравенства треугольника, условия выпуклости функции d и вышеприведенных оценок имеем

$$\begin{aligned} d(p,z_n) &= t \cdot d(p,z_{nt}) \geq t \cdot (d(p,z) - d(z,z_{nt})) \geq \\ &\geq t \cdot \left(d(p,z) - \frac{1}{2} \cdot (d(a_t,x_t) + d(b_t,y_t)) \right) \geq t \cdot \left(d(p,z) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{t-1}{t} \cdot d(p,z) \right) = \\ &= t \cdot \frac{1}{t} \cdot d(p,z) = d(p,z) = \mathrm{const}\,. \end{aligned}$$

Следовательно, точка p не является предельной точкой для последовательности z_n — середин выделенных отрезков $[x,y]_n$ и не может принадлежать отрезку из семейства Σ^* с концами x и y. $\square$

Итак, через точку p проходят одни и те же выделенные отрезки во всех пространствах (X,d), (X,d_t) при всех $t \geq 1$ и (X,d^*).

Лемма 3. *Для любых точек $x,y \in X$ и любого $t \geq 1$ выполняется равенство*

$$d^*(x_t,y_t) = \frac{1}{t}\cdot d^*(x,y).$$

Доказательство. Имеем

$$d^*(x_t,y_t) = \lim_{s\to\infty} d_s(x_t,y_t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot d\left((x_t)_s,(y_t)_s\right) = \lim_{s\to\infty} s\cdot d(x_{ts},y_{ts}) = \\ = \frac{1}{t}\cdot \lim_{ts\to\infty} ts\cdot d(x_{ts},y_{ts}) = \frac{1}{t}\cdot d^*(x,y). \quad \square$$

Следовательно, на пространстве (X,d^*) действует группа положительных гомотетий с центром в точке p.

Аксиома (5) в определении 2 автоматически следует из неположительности кривизны. Значительно более насыщенным является доказательство выполнения аксиомы (4).

Утверждение 6. Семейство отрезков Σ^* на пространстве (X,d^*) обладает свойством единственности продолжения отрезков.

Доказательство. Предположим, что существуют четыре различные точки $x_1,x_2,y,z \in X$, для которых $y \in [x_1z]_*$, $y \in [x_2z]_*$ и $d^*(x_1,y) = d^*(x_2,y)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $d^*(x_1,y) = d^*(x_2,y) = d^*(y,z) = 1$.

Зададим убывающую бесконечно малую последовательность положительных чисел ε_n. Для каждого ε_n имеем

$$A_n = \{k\in\mathbb{N} \mid d(y,m_k) < \varepsilon_n\} \in \omega, \quad B_n = \{k\in\mathbb{N} \mid d(y,l_k) < \varepsilon_n\} \in \omega.$$

Здесь m_k и l_k — середины отрезков $[x_1z]_k$ и $[x_2z]_k$ соответственно. Следовательно,

$$C_n = A_n \cap B_n \in \omega.$$

Выделим строго возрастающую последовательность натуральных чисел n_i так, что $n_i \in C_i$. Рассмотрим точки $\overline{x}_{1i} = (x_1)_{n_i}$, $\overline{x}_{2i} = (x_2)_{n_i}$, $\overline{y}_i = y_{n_i}$, $\overline{z}_i = z_{n_i} \in X$. Далее, пусть $\widetilde{x}_{1i} \in X$ — такая точка, что $\overline{x}_{1i} \in [\overline{y}_i\widetilde{x}_{1i}]$ и $d(\overline{y}_i,\widetilde{x}_{1i}) = n_i\cdot d(\overline{y}_i,\overline{x}_{1i})$. Точки $\widetilde{x}_{2i}$ и $\widetilde{z}_i$ определяются аналогично. Наконец, пусть $\overline{m}_i$ — середина отрезка $[\overline{x}_{1i}\overline{z}_i]$, $\widetilde{m}_i$ — середина отрезка $[\widetilde{x}_{1i}\widetilde{z}_i]$ и m_i — середина отрезка $[x_1z]_{n_i}$. При таких обозначениях имеем следующие оценки:

$$d(\widetilde{x}_{1i},\widetilde{x}_{2i}) \geq n_i\cdot d(\overline{x}_{1i},\overline{x}_{2i}) \geq n_i\cdot d^*(\overline{x}_{1i},\overline{x}_{2i}) = d^*(x_1,x_2), \tag{2.8}$$

$$d(\overline{y}_i,\widetilde{x}_{1i}) = n_i\cdot d(\overline{y}_i,\overline{x}_{1i}) \geq n_i\cdot d^*(\overline{y}_i,\overline{x}_{1i}) = d^*(y,x_1) = 1. \tag{2.9}$$

Аналогичная (2.9) оценка верна для $d(\overline{y}_i,\widetilde{x}_{2i})$. Наконец, оценим величину $d(\overline{y}_i,\widetilde{m}_i)$. Из выпуклости метрики d после несложных выкладок имеем

$$d(\overline{y}_i,\widetilde{m}_i) \leq d(\overline{y}_i,\overline{m}_i) + d(\overline{m}_i,\widetilde{m}_i) < \frac{1}{n_i}\cdot\varepsilon_i + \frac{n_i-1}{n_i}d(\overline{y}_i,\widetilde{m}_i),$$

откуда

$$d(\overline{y}_i,\widetilde{m}_i) < \varepsilon_i. \tag{2.10}$$

Пусть $(x_1)_*$, $(x_2)_*$ и z_* — точки накопления для последовательностей $\widetilde{x}_{1i}$, $\widetilde{x}_{2i}$ и $\widetilde{z}_i$ соответственно. Тогда из (2.10) следует, что точка p служит серединой отрезка $[(x_1)_* z_*]$. Аналогично можно получить, что p является серединой также и отрезка $[(x_2)_* z_*]$. Оценка (2.9) означает, что точки $(x_1)_*$ и $(x_2)_*$ не совпадают с точкой p, т. е. указанные отрезки не вырождены, а оценка (2.8) позволяет сделать вывод, что точки $(x_1)_*$ и $(x_2)_*$ различны. Приходим к противоречию со свойством единственности продолжения выделенных отрезков в смысле метрики d. □

Свойства пространства (X, d^*, Σ^*) объединяет

Теорема 2. *Пусть (X, d, Σ) — Σ-пространство, тогда (X, d^*, Σ^*) также является Σ-пространством, причем выполнены следующие условия*:

(1) $d^*(x, y) \le d(x, y) \quad \forall x, y \in X$;
(2) *тождественное отображение* $\mathrm{Id} : X \to X$ *является гомеоморфизмом пространства (X, d) на пространство (X, d^*)*;
(3) *подсемейство в Σ^*, состоящее из выделенных отрезков, проходящих через точку p, совпадает с аналогичным подсемейством в Σ, причем вдоль каждого такого отрезка $d^* = d$*;
(4) *на пространстве (X, d^*) действует группа H положительных гомотетий с центром в точке p.*

Следуя [1], пространство $K_p(X) = (X, d^*, \Sigma^*)$ будем называть *касательным конусом* над (X, d, Σ) *с вершиной p* по ультрафильтру ω.

Заметим, что построенное нами семейство выделенных отрезков Σ^*, вообще говоря, зависит от выбора неглавного ультрафильтра ω, в то время как метрика d^* от такого выбора не зависит. При этом каждый выбор ультрафильтра порождает свое семейство выделенных отрезков, для которого справедливы утверждения теоремы 2. В общем случае полученное семейство выделенных отрезков не инвариантно относительно действия группы H. Однако естественно предположить, что среди разных семейств Σ^* найдется инвариантное относительно H семейство. Это утверждение сформулируем в виде гипотезы.

Гипотеза. *Пусть (X, d, Σ) — Σ-пространство, d^* — метрика касательного конуса с вершиной p. Тогда существует такое выделенное семейство отрезков Σ^* на пространстве (X, d^*), что Σ-пространство (X, d^*, Σ^*) обладает свойствами, перечисленными в теореме 2, и семейство Σ^* инвариантно относительно действия на X группы H.*

Теорема 2 опирается на операцию предела по неглавному ультрафильтру, доказательство существования которого требует привлечения аксиомы выбора. Нерешенной проблемой остается конструктивное доказательство существования выделенного семейства отрезков Σ^* с теми же свойствами, что и в теореме 2.

Литература

[1] Андреев П.Д. *Доказательство гипотезы Буземана для G-пространств неположительной кривизны*, Алгебра и анализ **26** (2), 1–20 (2014).
[2] Буземан Г. *Геометрия геодезических* (Физматлит, М., 1962).
[3] Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with distinguished geodesics* (New York–Basel–Marcel, Dekker Inc., 1987).
[4] Busemann H., Phadke B.B. *Novel results in the geometry of geodesics*, Adv. Math. **101** (2), 180–219 (1993).
[5] Сосов Е.Н. *Касательное пространство по Буземану*, Изв. вузов. Матем., № 6, 67–71 (2005).
[6] Сосов Е.Н. *О метрическом пространстве всех N-сетей в пространстве неположительной кривизны по Буземану*, Изв. вузов. Матем., № 6, 74–77 (2006).
[7] Kleiner B. *Local structure of spaces with curvature bounded above*, Math. Z. **231** (3), 409–456 (1999).

[8] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии* (Ин-т компьют. исследований, М.–Ижевск, 2004).

[9] Bourbaki N. *Topologie générale*, Paris, Hermann, 1940 [Русский перевод: Бурбаки Н. *Общая топология* (Физматгиз, М., 1958).]

П.Д. Андреев

доцент, кафедра математического анализа, алгебры и геометрии,
Северный (Арктический) Федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
наб. Северной Двины, д. 17, г. Архангельск, 163002, Россия,

e-mail: pdandreev@mail.ru

В.В. Старостина

ассистент, кафедра математического анализа, алгебры и геометрии,
Северный (Арктический) Федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
наб. Северной Двины, д. 17, г. Архангельск, 163002, Россия,

e-mail: irrefragable@yandex.ru

V.V. Starostina and P.D. Andreev

Geometry of tangent cone to G-space of nonpositive curvature with distinguished family of segments

Abstract. We study a construction of the tangent cone for Busemann G-space with distinguished family of segments with additional condition of Busemann curvature nonpositivity. We prove that the constructed cone has geometric properties analogous to the properties of the tangent cone of the standard G-space of nonpositive curvature. Earlier the tangent cone construction was used by the first author for proving H. Busemann's conjecture for G-spaces of nonpositive curvature stating that every such space is a topological manifold. The constructed tangent cone can be considered as a main tool for the generalization of this theorem to the presented class of spaces.

Keywords: Busemann G-space, distinguished family of segments family, nonpositive curvature, Busemann conjecture, tangent cone.

P.D. Andreev

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Northern (Arctic) Federal University,
17 Severnoi Dviny Embankment, Arkhangelsk, 163002 Russia,

e-mail: pdandreev@mail.ru

V.V. Starostina

Assistant, Chair of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Northern (Arctic) Federal University,
17 Severnoi Dviny Embankment, Arkhangelsk, 163002 Russia,

e-mail: irrefragable@yandex.ru