

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной деятельности КФУ

Проф. Д.К. Нурғалиев

" 12 " 2014 г.



**Программа дисциплины**

Б1.В.ДВ.1 Современные методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных

Направление подготовки: 02.06.01 Компьютерные и информационные науки

Направленность (профиль) подготовки: 01.01.07 – Вычислительная математика

Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань 2014

## 1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целью освоения дисциплины является подготовка квалифицированных специалистов в области разработки и применения метода конечных элементов для моделирования полей различной физической природы, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Курс «Современные методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных» входит в разряд дисциплин по выбору.  
Осваивается на 2 курсе в 4 семестре.

Для успешного освоения данной дисциплины нужно освоение в качестве предшествующих следующих дисциплин: "Вычислительная математика", "Современные численные методы линейной алгебры", "Уравнения математической физики".

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Знать: классическую и обобщенную формулировку краевых задач для уравнений математической физики; основы теории сплайн-аппроксимации функциональных пространств Соболева; метод конечных элементов для решения краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений.

Уметь: определять обобщенные решения стационарных и нестационарных краевых задач математической физики; строить и программировать схемы метода конечных элементов для решения краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений.

Владеть: навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов; Владеть: навыками применения стандартных пакетов программ для решения указанных выше задач.

Демонстрировать: способность и готовность: строить схемы метода конечных элементов произвольного порядка точности для основных краевых задач для стационарных и нестационарных задач математической физики второго порядка; применять пакеты программ для решения указанных выше задач; применять полученные знания на практике

В результате освоения дисциплины формируются компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК- 2	способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях

#### 4. Структура и содержание дисциплины (модуля)

##### 4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов (лекции 18 ч., практика 18 ч., самостоятельная работа 72 ч.).

Итоговая форма контроля: зачет.

№	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)		
				лекции	практика	Самост. работа
1	Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.	4	1-3	3	0	2
2	Теория МКЭ для двумерных эллиптических задач.	4	4-7	12	0	12
3	Схемы МКЭ для двумерных нестационарных задач.	4	8-10	3	0	2
4	Программная реализация МКЭ на основе линейных элементов для эллиптических задач.	4	11-12	0	8	32
5	Пакет программ <code>pdetool</code> для решения двумерных стационарных и нестационарных задач математической физики.	4	13-15	0	10	24

##### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:** классическая формулировка эллиптических, параболических и гиперболических краевых задач. Пространства Соболева. Обобщенная формулировка краевых задач.

**Тема 2. Теория МКЭ для двумерных эллиптических задач:** Пространства конечных элементов. Лагранжевы элементы различного порядка. МКЭ на основе лагранжевых элементов. Система МКЭ. Алгоритм формирования системы МКЭ. Алгоритм вычисления

матрицы и вектора сил. Алгоритм решения задачи. Численное интегрирование. Разрешимость схем с численным интегрированием. Точность схем МКЭ.

**Тема 3. Схемы МКЭ для двумерных нестационарных задач:** Полудискретные схемы МКЭ для начально-краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. Формулировка схемы МКЭ в виде задачи Коши. Схемы МКЭ для задач на собственные значения для эллиптических операторов.

**Тема 4. Программная реализация МКЭ на основе линейных элементов для эллиптических задач:** Построение двумерных треугольных сеток в MatLab. Определение геометрии области. Кодировка треугольных сеток. Создание и хранение разреженных матриц. Программирование рассылки элементов. Расчетные формулы для линейных элементов. Способы задания коэффициентов уравнения. Вклад элементов в систему МКЭ. Учет краевых условий. Формирование системы МКЭ. Формирование и решение тестовых задач. Численное исследование точности метода.

**Тема 5. Пакет программ pdetool для решения двумерных стационарных и нестационарных задач математической физики:** Структура пакета программ pdetool. Решение простейшей двумерной задачи эллиптического типа. О схемах МКЭ, реализованных в пакете. Определение геометрии области. Построение сеток в пакете pdetool. Кодировка сеток. Определение уравнений. Задание краевых и начальных условий. Решение задачи. Виды графического представления решения. Экспорт данных и решения в MatLab.

## **5. Образовательные технологии**

Обучение происходит в форме лекционных и практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины "Современные численные методы линейной алгебры" на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА АСПИРАНТОВ (СРА) включает следующие виды работ:

1. Изучение дополнительного материала. Темы:

1. Эквивалентные нормировки пространств Соболева. Лемма Брамбла-Гильберта.
2. Операторные уравнения в гильбертовых пространствах. Лемма Лакса-Мильграма.
3. Системы алгебраических уравнений с разреженными матрицами. Прямые методы их решения. Алгоритмы перенумерации неизвестных.
4. Явные и неявные методы решения задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Понятие о жесткости задачи.
5. Язык программирования MatLab: числовые данные, операции над векторами и матрицами, основные конструкции языка, ввод-вывод числовых данных.

2. Выполнение домашних заданий: Примерные вопросы:

1. Докажите, что из интегрального тождества следует, что справедливо как уравнение во всех точках области, так и краевые условия
2. Сформулируйте интегральное тождество и определите множества функций при краевых условиях а) Дирихле; б) Неймана; с) смешанных условиях.
3. Дайте определение обобщенного решения краевых задач предыдущего пункта. Докажите, что гладкое обобщенное решение является решением краевой задачи.
4. Дайте определение системы МКЭ в случае, когда решается первая краевая задача.
5. Дайте определение системы МКЭ в случае краевой задачи Неймана.
6. Дайте определение системы МКЭ в случае смешанной краевой задачи.
7. Сформулируйте алгоритм формирования системы МКЭ в следующих случаях:
  - а) решается первая краевая задача.
  - б) решается третья краевая задача.
  - с). решается смешанная краевая
8. Докажите, что схема МКЭ для задачи Дирихле для уравнения Пуассона имеет единственное решение.
9. Докажите, что схема МКЭ для задачи Неймана для уравнения Пуассона имеет неединственное решение.
10. Докажите, что из интегрального тождества следует, что справедливо как уравнение во всех точках области, так и краевые условия для параболической задачи
11. Сформулируйте интегральное тождество и определите множества функций при краевых условиях а) Дирихле; б) Неймана; с) смешанных условиях для гиперболической задачи.
12. Напишите MatLab-функцию, которая позволяет исследовать зависимость погрешности решения схемы МКЭ от шага сетки а) в равномерной сеточной норме; б) в норме  $L_2$ ; с) в норме  $W_2^1$ .
13. Опишите и обоснуйте входные и выходные данные функции сборки системы МКЭ.
14. Получите задачу Коши для системы ОДУ после аппроксимации задачи Дирихле для уравнения теплопроводности методом конечных элементов на основе линейных треугольных конечных элементов. Укажите формулы вычисления матрицы жесткости и матрицы масс.
15. Получите задачу Коши для системы ОДУ после аппроксимации задачи Неймана для уравнения теплопроводности методом конечных элементов на основе линейных треугольных конечных элементов. Укажите формулы вычисления матрицы жесткости и матрицы масс.

16. Получите задачу Коши для системы ОДУ после аппроксимации смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности методом конечных элементов на основе линейных треугольных конечных элементов. Укажите формулы вычисления матрицы жесткости и матрицы масс.

17. Получите задачу Коши для системы ОДУ после аппроксимации задачи Дирихле для уравнения колебания мембраны методом конечных элементов на основе линейных треугольных конечных элементов. Укажите формулы вычисления матрицы жесткости и матрицы масс.

18. Получите задачу Коши для системы ОДУ после аппроксимации задачи Неймана для уравнения колебания мембраны методом конечных элементов на основе линейных треугольных конечных элементов. Укажите формулы вычисления матрицы жесткости и матрицы масс.

19. Получите задачу Коши для системы ОДУ после аппроксимации смешанной краевой задачи для уравнения колебания мембраны методом конечных элементов на основе линейных треугольных конечных элементов. Укажите формулы вычисления матрицы жесткости и матрицы масс.

## **7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

### **7.1. Регламент дисциплины**

**Форма контроля: зачет**

**Промежуточная форма контроля** – оценка успешности выполнения самостоятельных заданий

### **7.2. Оценочные средства текущего контроля**

Примеры вопросов для самостоятельной работы

1. Классическая формулировка эллиптических, параболических и гиперболических краевых задач.
2. Пространства Соболева.
3. Обобщенная формулировка начально-краевых задач.
4. Пространства конечных элементов.
5. Лагранжевы элементы различного порядка.
6. МКЭ на основе лагранжевых элементов.
7. Система МКЭ.
8. Алгоритм формирования системы МКЭ.
9. Алгоритм вычисления матрицы и вектора сил.
10. Алгоритм решения задачи.
11. Полудискретные схемы МКЭ для начально-краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов.
12. Формулировка схемы МКЭ в виде задачи Коши.
13. Схемы МКЭ для задач на собственные значения для эллиптических операторов.

### **7.3. Вопросы к зачету**

Для получения зачета необходимо выполнить семестровое задание.

Примеры заданий.

1. Решить данную краевую задачу эллиптического типа в заданной составной области, используя `pdetool`. Получить графическое представление решения в заданном виде. Исследовать зависимость погрешности решения от числа узлов сетки.

2. Решить данную начально-краевую задачу параболического типа в заданной составной области, используя pdeool. Получить графическое представление решения в заданном виде. Исследовать зависимость погрешности решения от числа узлов сетки.

3. Решить данную начально-краевую задачу гиперболического типа в заданной составной области, используя pdeool. Получить графическое представление решения в заданном виде. Исследовать зависимость погрешности решения от числа узлов сетки.

4. Решить данную задачу на собственные значения для эллиптического оператора в заданной составной области, используя pdeool. Получить графическое представление решения в заданном виде. Исследовать зависимость погрешности первого собственного числа от числа узлов сетки.

#### 7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
ПК-2	способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях	С учетом полученных знаний, аспирант способен подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях	Подготовка публикации аспирантом, выступление на итоговой конференции

### 8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В процессе обучения аспирантов по дисциплине основными формами обучения являются: аудиторные занятия, включающие лекции, и самостоятельная работа. Тематика лекций соответствует содержанию программы дисциплины

Обязательным условием освоения дисциплины является самостоятельная работа аспиранта, выполнение которой аспирант демонстрирует при выполнении семестровой работы. Подобная форма обучения развивает навыки поиска научной литературы, ее анализа, составления резюме прочитанного текста, приемов аргументации защищаемых гипотез, т.е. ведения научно-исследовательской работы и ее защиты в рамках профессиональных дискуссий. Аналогичные цели должны преследоваться и при ориентации аспирантов на самостоятельный поиск новых материалов по текущим разделам и чтение дополнительной литературы.

#### Методические рекомендации по самостоятельной работе аспирантов

Самостоятельная работа является обязательной составляющей деятельности аспиранта по изучению дисциплины. Самостоятельная работа направлена на более глубокое изучение отдельных тем дисциплины, систематизацию полученных знаний. Задания для самостоятельной работы включают виды работ, перечисленные выше. В программе дисциплины также указана трудоемкость самостоятельной работы по каждой

из тем. Это – время, необходимое для выполнения всех заданий по теме аспирантом с хорошей успеваемостью и средним темпом работы. Время, затрачиваемое каждым конкретным аспирантом, может существенно отличаться от указанного. В связи с этим, планирование рабочего времени каждым аспирантом должно осуществляться самостоятельно. Однако можно выделить некоторые общие рекомендации. Начинать самостоятельные занятия следует с начала семестра и проводить их регулярно. Не следует откладывать работу из-за «нерабочего настроения». Не следует пытаться выполнить всю самостоятельную работу за один день, накануне представления ее результатов. В большинстве случаев это просто физически невозможно. Гораздо более эффективным является распределение работы на несколько дней: это способствует более качественному выполнению заданий и лучшему усвоению материала. Важно полнее учесть обстоятельства своей работы, уяснить, что является главным на данном этапе, какую последовательность работы выбрать, чтобы выполнить ее лучше и с наименьшими затратами времени и энергии. Для плодотворной работы немаловажное значение имеет обстановка, организация рабочего места. Место работы, по возможности, должно быть постоянным. Работа на привычном месте более плодотворна. Продуктивность работы зависит от правильного чередования труда и отдыха. Помните, что максимальная длительность устойчивости внимания – 45 минут. При появлении рассеянности есть необходимость прервать работу на 3 – 5 минут, но не следует покидать рабочее место. Каждые 1.5 – 2 часа необходимо делать перерыв на 10-15 минут. Желательно сопровождать перерыв интенсивной физической активностью.

## **9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

### **9.1. Основная литература**

1. Даутов Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика" / Р. З. Даутов, М. М. Карчевский. Изд. 2-е, испр. Казань: Казанский университет, 2011. 237 с.: ил.; 21. Библиогр.: с. 228-229 (25 назв.). Предм. указ.: с. 234-237. ISBN 978-5-98180-993-42.
2. Даутов Р.З. Программная реализация метода конечных элементов в MATLAB - Казань, КФУ, 2014, 106 с. [http://repository.kpfu.ru/?p\\_id=99042](http://repository.kpfu.ru/?p_id=99042)
3. Даутов Р.З. Практикум по курсу численные методы. Решение задачи Коши для системы ОДУ. - Казань, КФУ, 2014, 100 с. [http://repository.kpfu.ru/?p\\_id=99043](http://repository.kpfu.ru/?p_id=99043)
4. Глазырина Л. Л. Введение в численные методы: 3. учебное пособие / Л. Л. Глазырина, М. М. Карчевский; Казан. федер. ун-т. Казань: Казанский университет, 2012. 121 с.

### **9.2. Дополнительная литература**

1. Карчевский, М. М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: учебное пособие / М. М. Карчевский, М. Ф. Павлова.—Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2008.—227 с.
2. Самарский А. А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. 3-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2005. 288 с.



3. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов: [Учебное пособие]. - Казань: Казанский университет. 2012. - 240 с. (с грифом УМО). [http://kpfu.ru/publication?p\\_id=47325](http://kpfu.ru/publication?p_id=47325)

### **9.3. Интернет-ресурсы:**

Лекции по численным методам математической физики

(<http://www.znaniium.com/bookread.php?book=364601>)

Численные методы. Курс лекций (<http://e.lanbook.com/view/book/378/>)

Численные методы и программирование (<http://znaniium.com/bookread.php?book=452274>)

Проекционные итерационные методы решения уравнений и вариационных неравенств с нелинейными операторами теории монотонных операторов

(<http://www.znaniium.com/bookread.php?book=445170>)

## **10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

занятия проводятся в компьютерном классе, снабженном доской (лекции) и в компьютерном зале (практика)

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО аспирантуры (Приказ Минобрнауки РФ от 30.07.2014 № 866)

Автор(ы): Даутов Р.З.

Рецензенты:

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института ВМ и ИТ КФУ от 11 сентября 2014 г. протокол № 1.