УДК 517.958:539.3

Тимергалиев С.Н., доктор ф.-м. н., профессор, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Углов А.Н.,кандидат ф.-м. н., доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Якупова Г.А., старший преподаватель, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУШАРА

Аннотация. Изучается разрешимость нелинейных краевых задач трехмерной теории упругости для изотропного неоднородного полушара при кинематических граничных условиях. Целью работы является доказательство теоремы существования решений. Метод исследования заключается в сведении исходной системы уравнений равновесия к системе трехмерных сингулярных интегральных уравнений, разрешимость которой устанавливается с использованием символа сингулярного оператора и принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: Упругий изотропный неоднородный полушар, уравнения равновесия, краевая задача, трехмерные сингулярные интегральные уравнения, символ сингулярного оператора, теорема существования.

В области V, занятой упругим телом, рассматривается система уравнений вида

$$\sigma^{kj}_{,j} + f_k + X_k = 0,\ k = 1,2,3 \tag{1}$$

(здесь и далее по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3), в которой приняты обозначения:

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma^{j3}\omega_2 - \sigma^{j2}\omega_3\right),\ f_2 = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma^{j1}\omega_3 - \sigma^{j3}\omega_1\right),$$

$$f_3 = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma^{j2}\omega_1 - \sigma^{j1}\omega_2\right);$$

$$\sigma^{jj} = 2\mu\varepsilon_{jj} + \lambda\varepsilon,\ \sigma^{jk} \equiv \sigma^{kj} = \mu\varepsilon_{jk},\ j \neq k;\ \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}; \tag{2}$$

$$\varepsilon_{jk} = e_{jk} + æ_{jk}, e_{jj} = u_{j,j}, e_{jk} = u_{j,k} + u_{k,j}, æ_{jj} = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_j^2)/2,$$

$$æ_{jk} = -\omega_j\omega_k, j \neq k, k = 1,2,3; \omega_1 = \left(u_{3,2} - u_{2,3}\right)/2,$$

$$\omega_2 = \left(u_{1,3} - u_{3,1}\right)/2,\ \omega_3 = \left(u_{2,1} - u_{1,2}\right)/2;\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)};$$

здесь и далее символ $a_{,j}$ означает частную производную $a_{,j} = \partial a/\partial x_j$.

Система уравнений (1) совместно с соотношениями (2) описывает состояние равновесия упругого изотропного неоднородного тела [1, с.83-84]. При этом: σ^{kj}- компоненты напряжений, ε_{jk} - компоненты деформаций, $u = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор перемещений, $X_k (k = 1,2,3)$ - компоненты объемных внешних сил, действующих на упругое тело; μ - модуль упругости при сдвиге, λ - параметр Ляме, $E = E(x)$ - модуль упругости при растяжении, $\nu = \nu(x)$ - коэффициент Пуассона, $x = (x_1, x_2, x_3)$ - точка упругого тела.

Если в системе (1) напряжения и деформации заменить их выражениями из (2), то получим систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\Delta u_k + \theta_{,k}/(1-2\nu) + l_k(u) + g_k(u) + X_k/\mu = 0, k = 1,2,3, \tag{3}$$

где $$l_k(u) = \left[\mu_{,k}e_{kk} + \mu_{,j}e_{kj} + \lambda_{,k}(e_{11} + e_{22} + e_{33})\right]/\mu,$$

$$g_k(u) = \frac{1}{\mu}\left\{f_k(u) + \frac{\partial}{\partial x_k}[(\mu+\lambda)(æ_{11} + æ_{22} + æ_{33})] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu æ_{jk}\right)\right\}, \tag{4}$$

$\theta = div\, u,\ \Delta$ - оператор Лапласа.

Заметим, что в случае линейных задач $g_k(u) \equiv 0, k = 1,2,3.$ Кроме того, если тело однородное, то $l_k(u) \equiv 0, k = 1,2,3.$

Задача А. *Требуется найти решение* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *системы (3) в полушаре* $V: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\ (x_3 \geq 0)$, *удовлетворяющее на его границе* ∂V *условию*

$$u = 0. \tag{5}$$

Задачу А будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия: $a)\ E(x),\ \nu(x) \in W_p^{(1)}(V), p > 3;\ b) X_k \in L_p(V), p > 3,$ $k = 1,2,3.$

Определение. *Обобщенным решением задачи А назовем вектор перемещений* $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V), p > 3,$ *почти всюду (п.в.) удовлетворяющий системе (3) и граничному условию (5).*

Здесь $W_p^{(j)}(V)(j = 1,2)$ - пространства Соболева. В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(j)}(V)$ с $p > 3$ обобщенное решение $u \in C_\alpha^1(\bar{V})$, а $E(x),\ \nu(x) \in C_\alpha(\bar{V}), \alpha = (p - 3)/p$.

Решение задачи А будем искать в виде

$$u(x) = \iiint_V G(y,x)\rho(y)\,dy, \quad dy = dy_1\,dy_2 dy_3, \tag{6}$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ - произвольная вектор-функция, принадлежащая пространству $L_p(V), p > 3$; $G(y,x)$ - гармоническая функция Грина задачи Дирихле, которая в случае полушара V имеет вид [2, с.428]:

$$G(y,x) = \frac{1}{4\pi|y-x|} - \frac{R}{4\pi|y||y^* - x|} - \frac{1}{4\pi|\bar{y} - x|} + \frac{R}{4\pi|y||\bar{y}^* - x|},$$

$y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = R^2 y/|y|^2$ - точка, симметричная точке $y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ относительно сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$; $\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3)$ и $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, -y_3^*)$ - точки, симметричные соответственно точкам $y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) \in V_1 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge R^2, x_3 \ge 0$ относительно плоскости $x_3 = 0$; $\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3) \in V_2 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le R^2, x_3 \le 0$; $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, -y_3^*) \in V_3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge R^2, x_3 \le 0$; $|y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$.

Найдем производные до второго порядка включительно функции $u(x)$. Непосредственным дифференцированием под знаком интеграла в (6) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv u_{,j}(x) = \iiint_V \frac{\partial G(y,x)}{\partial x_j}\rho(y)\,dy \equiv u_{,j}(\rho)(x), j = 1,2,3. \tag{7}$$

Отметим, что $u_{,j}$ - линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(V)$ в $C_\alpha(\bar{V})$ при $p > 3$. Для нахождения вторых производных $u(x)$ воспользуемся формулой (15) из [3, с.240]. В результате для них п.в. в V получаем представления

$$u_{k,kj}(\rho_k)(x) = -\frac{1}{3}\delta_{kj}\rho_k(x) + \frac{1}{4\pi}\iiint_{E_3} \frac{f_{kj}\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)}{|y-x|^3}\rho_k^*(y)\,dy, j,k = 1,2,3, \quad (8)$$

$$f_{kj}\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) = \frac{3(y_k - x_k)(y_j - x_j) - \delta_{kj}|y-x|^2}{|y-x|^2},$$

где $\rho_k^*(y) = \rho_k(y)$ при $y \in V$, $\rho_k^*(y) = -\left(\frac{R^5}{|y|^5}\right)\rho_k\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right)$ при $y \in V_1$, $\rho_k^*(y) = -\rho_k(\bar{y})$ при $y \in V_2$, $\rho_k^*(y) = \left(\frac{R^5}{|y|^5}\right)\rho_k\left(\frac{R^2}{|y|^2}\bar{y}\right)$ при $y \in V_3$; E_3 - трехмерное евклидово пространство; $\delta_{kj} = 1$ при $k = j$ и $\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$.

Заметим, что функция $f_{kj}\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)$ является характеристикой сингулярного оператора $u_{k,kj}$ [4, с. 43]. Обозначив $\theta = (y-x)/|y-x| = (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \theta_j = (y_j - x_j)/|y-x|$, $j = 1,2,3$, характеристику можно представить в виде $f_{kj}(\theta) = 3\theta_k\theta_j - \delta_{kj}, k,j = 1,2,3$. Непосредственные вычисления показывают, что $\iint_{S_1} f_{kj}(\theta)\,ds = 0$; кроме того, очевидно, $\iint_{S_1}\left|f_{kj}(\theta)\right|^q ds \leq const,\ k,j = 1,2,3,\ 1/p + 1/q = 1,\ p > 3, S_1$ – единичная сфера. Следовательно [4, с. 18], $u_{k,kj}$ суть ограниченные операторы в $L_p(V), p > 3$.

Соотношения (6), (7), (8) вносим в (3). В результате для определения функции $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ придем к системе трехмерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$\rho_k(x) - \frac{\beta(x)}{4\pi}\iiint_{E_3} \frac{f_{kj}(\theta)}{|y-x|^3}\rho_j^*(y)\,dy - l_k(\rho) = g_k(\rho) + F_k(x), x \in V, \quad (9)$$

$$F_k(x) = \frac{3(1-2\nu)(1+\nu)}{(2-3\nu)E}X_k(x), l_k(\rho) \equiv l_k(u(\rho)), g_k(\rho) \equiv g_k(u(\rho)),$$

$$\beta(x) = \frac{3}{4-6\nu}, \qquad k = 1,2,3.$$

Из соотношений (4) с учетом вышеустановленных свойств операторов $u_{,j}$, $u_{k,kj}$, $j,k = 1,2,3$, условий $a), b)$, легко получаем, что l_k - линейные вполне непрерывные, g_k - нелинейные ограниченные операторы в $L_p(V)$; $F_k(x) \in L_p(V), p > 3, k = 1,2,3.$

При изучении разрешимости системы (9), в которой правую часть временно считаем фиксированной, будем следовать [4]. В основе исследования разрешимости многомерных сингулярных интегральных уравнений лежит вычисление символа сингулярных операторов. Через $\Phi_{kj}(x,\theta)$ обозначим символ сингулярного оператора

$$A_{kj}\rho_j = \delta_{kj}\rho_j - \frac{\beta(x)}{4\pi}\iiint\limits_{E_3}\frac{f_{kj}(\theta)}{|y-x|^3}\rho_j^*(y)\,dy - \delta_{kj}l_j(\rho), x\in V, j,k=1,2,3$$

(по j нет суммирования).

Займемся вычислением $\Phi_{kj}(\theta)$. Для этого используем формулу [4, с.109]:

$$\Phi_{kj}(x,\theta) = \delta_{kj} - \frac{\beta(x)}{4\pi}\iiint_{E_3}\frac{f_{kj}(y/|y|)}{|y|^3}e^{-i(y,z)}\,dy, \tag{10}$$

где $\theta = z/|z|, z=(z_1,z_2,z_3), (y,z) = y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 = |y||z|\cos\gamma$ - скалярное произведение векторов y,z; γ - угол между y,z; i - мнимая единица.

Вычисляя интегралы в (10), для символов $\Phi_{kj}(\theta)$ получаем соотношения

$$\Phi_{jj}(x,\theta) = \beta\left(1-2\nu+\theta_j^2\right), \Phi_{jk}(x,\theta) = \beta\theta_j\theta_k, j\neq k, \theta_j = \frac{z_j}{|z|}, j,k=1,2,3.$$

В соответствии с теоремой 3.40 из [4, с.192] находим

$$\Delta_1 = \Phi_{11}(x,\theta) = \beta(1-2\nu+\theta_1^2),\ \Delta_2 = det\left(\Phi_{jk}\right)_{2\times 2} =$$
$$= \beta^2[(1-2\nu)^2+(1-2\nu)(\theta_1^2+\theta_2^2)],$$
$$\Delta_3 = det\left(\Phi_{jk}\right)_{3\times 3} = 2\beta^3(1-2\nu)^2(1-\nu). \tag{11}$$

Пусть коэффициент Пуассона $\nu=\nu(x)$ удовлетворяет условию

$$-1 < \nu(x) \leq \nu_0 < 1/2\ \ \forall x\in\bar{V}, \nu_0 = const. \tag{12}$$

Тогда из (11) легко получаем

$$|\Delta_1| > 0{,}3(1-2\nu_0), |\Delta_2| > [0{,}3(1-2\nu_0)]^2, |\Delta_3| > 2(1-\nu_0)(0{,}3)^3(1-2\nu_0)^2$$
$$\forall x\in\bar{V},\ \forall\theta\in S_1,$$

откуда следует, что точные нижние границы модулей определителей Δ_j положительны. Следовательно [4, с.192], индекс системы (9) равен нулю и к ней применима альтернатива Фредгольма. Пусть $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in L_p(V), p > 3$ - ненулевое решение системы (9) при нулевой правой части: $g_k(\rho) + F_k(x) \equiv 0, k = 1,2,3$. Этому решению по формуле (6) соответствует вектор перемещения $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V), p > 3$, удовлетворяющий граничному условию (5) и п.в. системе однородных линейных уравнений

$$\sigma_{e,j}^{kj} = 0,\ k = 1,2,3, \tag{13}$$

где $\sigma_e^{jj} = 2\mu e_{jj} + \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}), \sigma_e^{jk} = \mu e_{jk}, j \neq k, j, k = 1,2,3.$

Равенства в (13) соответственно умножим на u_1, u_2, u_3, интегрируем по V и сложим. После этого с учетом (5) интегрируем по частям. В результате получим

$$\iiint_V \{(1-2\nu)[(\sigma_e^{11})^2 + (\sigma_e^{22})^2 + (\sigma_e^{33})^2] + 2(1+\nu)[(\sigma_e^{12})^2 + (\sigma_e^{22})^2 + (\sigma_e^{13})^2]\}\, dV = 0,$$

откуда следует $e_{jk} = 0, k = 1,2,3$, следовательно, $u_k = 0, k = 1,2,3$. Тогда $\rho = 0$ п.в. в V.

Таким образом, существует обратный оператор $(I-P)^{-1}$, ограниченный в $L_p(V), p > 3$, с помощью которого (9) сведется к эквивалентной системе вида

$$\rho - G\rho = 0, \tag{14}$$

где приняты обозначения: $G\rho = (I-P)^{-1}(g(\rho) + F)$, $P\rho = (P_1\rho, P_2\rho, P_3\rho)$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $g(\rho) = \big(g_1(\rho), g_2(\rho), g_3(\rho)\big)$,

$$P_k\rho = \frac{\beta}{4\pi} \iiint_{E_3} \frac{f_{kj}(\theta)}{|y-x|^3} \rho_j^*(y)\, dy + l_k(\rho), \theta = \frac{y-x}{|y-x|}, k = 1,2,3.$$

Имеет место

Лемма. *Пусть выполнены условия* $(a), (b)$, *неравенство (12). Тогда* G *- нелинейный ограниченный оператор в* $L_p(V), p > 3$, *причем для любых* $\rho^j (j = 1,2) \in L_p(V), p > 3$, *принадлежащих шару* $\|\rho^j\|_{L_p(V)} < r$, *справедлива* *оценка* $\|G(\rho^1) - G(\rho^2)\|_{L_p(V)} \leq (q_1 + q_2 r) r \|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p(V)}$, *где* q_j $(j = 1,2)$ - *известные постоянные, не зависящие от* r.

Предположим, что радиус r шара и внешние силы, действующие на упругое тело, таковы, что выполняются условия

$$q = (q_1 + q_2 r) r < 1, \|G(0)\|_{L_p(V)} < (1 - q) r, G(0) = (I - P)^{-1} F. \quad (15)$$

В этих условиях к уравнению (14) можно применить принцип сжатых отображений [5, с.146], согласно которому уравнение (14) в шаре $\|\rho\|_{L_p(V)} < r$ имеет единственное решение $\rho \in L_p(V), p > 3$.

Зная $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, по формуле (6) находим решение $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V), p > 3$ задачи А.

Таким образом, доказана следующая основная теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* $(a), (b)$ *неравенства (12), (15). Тогда нелинейная краевая задача для упругого изотропного неоднородного полушара при кинематических граничных условиях имеет единственное обобщенное решение в некотором шаре пространства* $W_p^{(2)}(V), p > 3$.

Литература

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – 5-е изд., доп. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

3. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М: Наука, 1968. – 576 с.

4. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – Л.: Физматгиз, 1962. – 256 с.

5. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

Timergaliev S.N. doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University

Uglov A.N. candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University

Yakupova G.A. Senior Lecturer, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University

ONE METHOD OF SPATIAL SOLUTION OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELASTIC INHOMOGENEOUS HABIT

Abstract: The solvability of nonlinear boundary value problems of the theory of three-dimensional elasticity for arbitrary elastic inhomogeneous isotropic habit at the kinematic boundary conditions is studied. The aim is to prove the existence theorems of solutions. Method of study is to reduce the original system of equilibrium equations to a system of three-dimensional singular integral equations, the solvability of which is set with use of singular operator symbol and the principle of compressed representations.

Key words: Elastic isotropic inhomogeneous body, equilibrium equations, boundary value problem, three-dimensional singular integral equations, singular operator symbol, existence theorem.