Известия вузов. Математика
2016, № 7, с. 34–43
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

П.А. ДУБОВИК

ЭРМИТОВЫ f-СТРУКТУРЫ НА 6-МЕРНЫХ ФИЛИФОРМНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Аннотация. В работе рассмотрены левоинвариантные f-структуры на 6-мерных филиформных группах Ли. Указаны достаточные условия, при которых специальные левоинвариантные f-структуры на этих группах Ли принадлежат классу эрмитовых f-структур. Предъявлены частные примеры таких f-структур.

Ключевые слова: метрическая f-структура, левоинвариантная f-структура, связность Леви-Чивита, нильпотентная алгебра Ли, эрмитова f-структура, филиформная группа Ли.

УДК: 514.765

Введение

В современной дифференциальной геометрии и ее приложениях важную роль играют аффинорные структуры на гладких многообразиях, т. е. тензорные поля типа $(1, 1)$, реализованные в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении. Наиболее известными из них являются почти комплексные структуры J ($J^2 = -\mathrm{id}$), структуры почти произведения P ($P^2 = \mathrm{id}$), h-структуры ($h^3 - h = 0$) (например, [1]). С 1960-х гг. значительную роль стали играть f-структуры ($f^3 + f = 0$), впервые введенные К. Яно [2], которые обобщают почти комплексные и почти контактные структуры. Отметим, что метрические f-структуры являются важнейшим объектом в обширной обобщенной эрмитовой геометрии — области дифференциальной геометрии, развиваемой с середины 1980-х гг. [3].

Среди гладких многообразий важное место отводится однородным гладким многообразиям групп Ли — однородным пространствам. При этом на таких пространствах реализуются инвариантные относительно действия группы дифференциально-геометрические структуры. В частности, сами группы Ли являются однородными пространствами относительно действия левыми сдвигами. Инвариантные относительно левых сдвигов дифференциальные структуры на группах Ли называются левоинвариантными.

В дифференциальной геометрии однородных многообразий групп исследование инвариантных дифференциально-геометрических (в частности, аффинорных) структур является одним из фундаментальных направлений. Значительное место здесь принадлежит однородным Ф-пространствам, которые называют также обобщенными симметрическими пространствами [1], [4]–[6]. Известно, что однородные Ф-пространства порядка k обладают обширным запасом канонических структур классического типа, в том числе и f-структурами [1], [7], [8]. При этом важным примером является тот случай, когда группа Ли сама является однородным Ф-пространством порядка k. Также широко изучаются инвариантные структуры на нильпотентных группах Ли. Важным примером нильпотентных групп Ли индекса два

Поступила 14.12.2014

является классическая группа Гейзенберга и ее различные обобщения [9], [10]. Например, с использованием канонических f-структур в работе [11] рассматриваются левоинвариантные f-структуры на 6-мерной обобщенной группе Гейзенберга, а в работе [12] — левоинвариантные f-структуры на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2,1)$.

В данной работе рассмотрены левоинвариантные f-структуры на 6-мерных филиформных группах Ли. Такие группы являются нильпотентными группами Ли индекса пять. Доказаны некоторые достаточные условия принадлежности этих f-структур такому классу обобщенной эрмитовой геометрии как эрмитовы f-структуры. Для каждой из этих групп Ли приведены примеры эрмитовых f-структур на них. Отметим, что впервые обширные классы инвариантных эрмитовых f-структур на однородных многообразиях предъявлены в работе [13] с использованием канонических f-структур на однородных Ф-пространствах порядка k.

1. Аффинорные структуры на гладких многообразиях. f-структуры

Определение 1. Пусть M — гладкое многообразие. Тогда *аффинорной структурой* на M называется тензорное поле типа $(1,1)$, реализованное как $C^\infty(M)$-линейное отображение $F:\mathfrak{B}(M)\to\mathfrak{B}(M)$, где $\mathfrak{B}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M. Другими словами, для любой точки $p\in M$, $F_p : M_p \to M_p$ — линейный оператор, где M_p — касательное пространство в точке p.

Пусть M — однородное многообразие группы Ли G с действием $G\times M\to M$, $(g,x)\to T_g x$, где отображение T_g удовлетворяет двум аксиомам:

$$T_{u\circ v} = T_u\circ T_v,\quad T_e = \mathrm{id}.$$

Определение 2. Аффинорная структура F называется *инвариантной* относительно группы Ли G, если при любом $g\in G$ имеет место равенство

$$dT_g\circ F = F\circ dT_g.$$

Более подробно, для любых $g\in G$ и любых $Y\in M_x$ справедливо равенство

$$(dT_g)_x\circ F_x(Y) = F_{T_g x}\circ(dT_g)_x Y,$$

где $x\in M$, M_x — касательное пространство к M в точке x.

Если $M=G$, а в качестве отображения T_g рассмотреть левый сдвиг L_g, то аффинорная структура F называется *левоинвариантной структурой* на группе Ли G.

Напомним, что f-структурой на многообразии M называется поле эндоморфизмов f, действующих в его касательном расслоении и удовлетворяющих условию $f^3+f=0$ ([2]). Число $r=\dim\operatorname{Im} f$ постоянно для всех точек из M и называется рангом f-структуры ([14]). Кроме того, число $\dim\operatorname{Ker} f=\dim M - r$ обычно называют дефектом f-структуры и обозначают $\operatorname{def} f$. Легко видеть, что частные случаи $\operatorname{def} f=0$ и $\operatorname{def} f=1$ для f-структур приводят к почти комплексным и почти контактным структурам соответственно.

Пусть M — f-многообразие, $\mathfrak{B}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M. Тогда $\mathfrak{B}(M)=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f$. При этом $\operatorname{Im} f$ и $\operatorname{Ker} f$ — взаимно дополнительные распределения, которые обычно называют первым и вторым фундаментальным распределением f-структуры соответственно. Ясно, что эндоморфизмы $l=-f^2$ и $m=\mathrm{id}+f^2$ являются взаимно дополнительными проекторами на распределения $\operatorname{Im} f$ и $\operatorname{Ker} f$ соответственно [14]. Заметим, что сужение F заданной f-структуры на $\operatorname{Im} f$ есть почти комплексная структура, т. е. $F^2=-\mathrm{id}$.

2. Метрические f-структуры

Отметим, что метрические f-структуры — частный случай *обобщенной почти эрмитовой структуры* или GAH-структуры ранга r на (псевдо)римановом многообразии (M, g) ([15]).

Приведем кратко некоторые сведения из обобщенной эрмитовой геометрии (более подробно см. в [3], [15]).

Определение 3 ([3])**.** f-структура на римановом многообразии $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *метрической* f-структурой, если $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

В этом случае тройка (M, g, f) называется *метрическим f-многообразием.* Далее через ∇ будем обозначать связность Леви-Чивита риманова многообразия $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Тогда для f-структуры f имеем ([16], с. 311):

$$\nabla_X(f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y.$$

Тензор T типа $(2, 1)$ на f-многообразии, определенный формулой [3]

$$T(X,Y) = \frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

называется *композиционным тензором.* Композиционный тензор T играет фундаментальную роль в геометрии метрических f-структур.

Приведем основные классы метрических f-структур, указав для них определяющие свойства [1], [3]:

Kf	*келерова f-структура*:	$\nabla f = 0$;
Hf	*эрмитова f-структура*:	$T(X,Y) = 0$;
$\mathbf{G_1f}$	*f-структура класса G_1*:	$T(X,X) = 0$;
Kill f	*киллингова f-структура*:	$\nabla_X(f)X = 0$;
NKf	*приближенно келерова f-структура, или NKf-структура.*	$\nabla_{fX}(f)fX = 0$

Приведем отношения включения между классами метрических f-структур [1]:

$$\mathbf{Kf} \subset \mathbf{Hf} \subset \mathbf{G_1f}; \quad \mathbf{Kf} \subset \mathbf{Kill\ f} \subset \mathbf{NKf} \subset \mathbf{G_1f}.$$

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — левоинвариантная риманова метрика на G. Тогда связность Леви-Чивита ∇ на римановом многообразии $(G, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ определяется формулой ([17], с. 187)

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] + U(X,Y), \tag{1}$$

где U — симметрическое билинейное отображение из $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, определенное формулой

$$2\langle U(X,Y), Z\rangle = \langle X, [Z,Y]\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \tag{2}$$

3. Эрмитовы f-структуры на 6-мерных филиформных группах Ли

1. **Филиформные группы Ли.** Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли размерности m. Пусть также

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \supset \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^1] \supset \dots \supset \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{i-1}] \supset \dots \supset \mathfrak{g}^q = \{0\}$$

— нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Число q называется *ниль-индексом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{g}^q = \{0\}$ и $\mathfrak{g}^{q-1} \neq \{0\}$.

Определение 4 ([18])**.** Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ размерности $m \geq 3$ называется *филиформной*, если $\dim \mathfrak{g}^k = m - k - 1$ для $k = 1, \dots, m-1$. Группа Ли G называется *филиформной*, если ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является филиформной.

Рассмотрим некоторые примеры филиформных алгебр Ли. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует несколько $(n+1)$-мерных филиформных алгебр Ли, которые представляют интерес [18].

1. *Алгебра Ли* L_n. Это $(n+1)$-мерная филиформная алгебра Ли. Пусть $e_0, e_1, \ldots, e_n$ — базис алгебры L_n. Тогда нетривиальные скобки Ли задаются условием

$$[e_0, e_i] = e_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

2. *Алгебра Ли* Q_n $(n = 2k+1)$. В базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$ нетривиальные скобки Ли задаются условием

$$[e_0, e_i] = e_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$[e_i, e_{n-i}] = (-1)^i e_n, \quad i = 1, \ldots, k.$$

В базисе $z_0, z_1, \ldots, z_n$, где $z_0 = e_0 + e_1$, $z_i = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, нетривиальные скобки Ли задаются условием

$$[z_0, z_i] = z_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-2,$$
$$[z_i, z_{n-i}] = (-1)^i z_n, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Впервые понятие филиформных групп Ли и алгебр Ли было введено в [19].

2. **6-мерные филиформные алгебры Ли.** Более подробно остановимся на филиформных группах Ли и f-структурах на них. Для этого рассмотрим классификацию 6-мерных нильпотентных алгебр Ли [20]. В соответствии с данной классификацией существует 22 типа неразложимых 6-мерных нильпотентных алгебр Ли, среди которых 5 алгебр Ли являются филиформными. Укажем коммутаторные соотношения на базисных векторах $e_1, \ldots, e_6$ данных филиформных алгебр Ли:

1) $\mathfrak{g}_1 : [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6 (L_5)$;
2) $\mathfrak{g}_2 : [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_6$;
3) $\mathfrak{g}_3 : [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_5,\ [e_2, e_4] = e_6$;
4) $\mathfrak{g}_4 : [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_4,\ [e_2, e_4] = e_5,\ [e_3, e_4] = e_6 \quad (Q_5)$;
5) $\mathfrak{g}_5 : [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_2, e_3] = e_4,\ [e_2, e_4] = e_5,\ [e_3, e_4] = e_6$.

Далее рассмотрим каждую филиформную алгебру Ли в отдельности, предполагая, что задана связная группа Ли G с соответствующей филиформной алгеброй Ли. На этих группах Ли рассмотрим стандартную евклидову метрику $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и левоинвариантные метрические f-структуры. Выясним некоторые достаточные условия принадлежности этих f-структур классу эрмитовых f-структур.

1. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}_1$. Отметим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ является алгеброй Ли L_5 (см. п. 1 раздела 3). Вычислим действие симметрического билинейного отображения U, определенного равенством (2), на базисных векторах $e_1, e_2, \ldots, e_6$ алгебры $\mathfrak{g}_1$. Согласно (2) получим

$$2\langle U(e_1, e_1), e_i \rangle = \langle e_1, [e_i, e_1] \rangle + \langle [e_i, e_1], e_1 \rangle = 0.$$

Таким образом,

$$\langle U(e_1, e_1), e_i \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

Откуда следует $U(e_1, e_1) = 0$. Аналогично можно показать, что $U(e_i, e_i) = 0$ при $i = 2, \ldots, 5$. Более того,

$$U(e_1, e_2) = U(e_2, e_4) = U(e_2, e_5) = U(e_3, e_5) = U(e_3, e_6) = U(e_4, e_6) = 0.$$

Вычислим $U(e_1, e_3)$. Согласно равенству (2) имеем

$$\langle U(e_1, e_3), e_i \rangle = 0, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6,$$
$$2\langle U(e_1, e_3), e_2 \rangle = \langle e_1, [e_2, e_3] \rangle + \langle [e_2, e_1], e_3 \rangle = -1.$$

Откуда следует $2U(e_1,e_3)=-e_2$. Аналогично рассуждая, можем получить

$$U(e_1,e_4)=-\frac{1}{2}e_3,\quad U(e_1,e_5)=-\frac{1}{2}e_4,\quad U(e_1,e_6)=-\frac{1}{2}e_5,$$

$$U(e_2,e_3)=U(e_3,e_4)=U(e_4,e_5)=U(e_5,e_6)=\frac{1}{2}e_1.$$

В силу симметричности отображения U все случаи разобраны. Пусть

$$X=\sum_{i=1}^{6}\alpha_i e_i,\quad Y=\sum_{i=1}^{6}\beta_i e_i \tag{3}$$

— разложение векторов $X,Y\in\mathfrak{g}_1$ по базису. Так как отображение U билинейно, можем записать

$$U(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{6}\alpha_i\beta_j U(e_i,e_j).$$

Таким образом, с учетом действия отображения U на базисные векторы алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ окончательно имеем

$$\begin{aligned}2U(X,Y)=(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4+\alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5)e_1-\\ -(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)e_2-(\alpha_1\beta_4+\alpha_4\beta_1)e_3-(\alpha_1\beta_5+\alpha_5\beta_1)e_4-(\alpha_1\beta_6+\alpha_6\beta_1)e_5.\end{aligned} \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_1$ удовлетворяет условию $e_1\in\operatorname{Ker} f$. Тогда $[fX,fY]=0$ и $U(fX,fY)\in\operatorname{Ker} f$ для любых $X,Y\in\mathfrak{g}_1$.*

Доказательство. В силу равенств (3) и того, как определена скобка Ли на базисных векторах, имеем

$$[fX,fY]=[\alpha_2fe_2+\alpha_3fe_3+\dots+\alpha_6fe_6,\beta_2fe_2+\beta_3fe_3+\dots+\beta_6fe_6]=0.$$

Аналогично рассуждая, можем получить

$$2U(fX,fY)=(\alpha'_2\beta'_3+\alpha'_3\beta'_2+\alpha'_3\beta'_4+\alpha'_4\beta'_3+\alpha'_4\beta'_5+\alpha'_5\beta'_4+\alpha'_5\beta'_6+\alpha'_6\beta'_5)e_1\in\operatorname{Ker} f,$$

где α'_i, β'_i, $i=2,\dots,6$, — координаты векторов fX и fY в базисе $e_1,\dots,e_6$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ соответственно. □

Теорема 1. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_1$ удовлетворяет условию $e_1\in\operatorname{Ker} f$. Тогда f является эрмитовой f-структурой.*

Доказательство. Как упоминалось выше, эрмитовость f-структуры означает равенство нулю композиционного тензора T для любых $X,Y\in\mathfrak{g}_1$. Вычислим композиционный тензор T. Для выражения $\nabla_{fX}(f)fY$ с учетом равенства (1) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}\nabla_{fX}(f)fY=\nabla_{fX}f^2Y-f\nabla_{fX}fY=\frac{1}{2}[fX,f^2Y]+\\ +U(fX,f^2Y)-f\left(\frac{1}{2}[fX,fY]+U(fX,fY)\right)=U(fX,f^2Y)\in\operatorname{Ker} f.\end{aligned}$$

Аналогично можем получить

$$\nabla_{f^2X}(f)f^2Y=U(f^2X,f^3Y)=-U(f^2X,fY)\in\operatorname{Ker} f.$$

Таким образом,

$$T(X,Y)=\frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)fY-\nabla_{f^2X}(f)f^2Y)=\frac{1}{4}f(U(fX,f^2Y)+U(f^2X,fY))=0$$

для любых $X,Y\in\mathfrak{g}_1$. $\square$

Пример 1. В качестве примера можно рассмотреть f-структуру f со следующим действием на базисных векторах алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$: $f(e_1)=f(e_2)=0$, $f(e_3)=-e_4$, $f(e_4)=e_3$, $f(e_5)=e_6$, $f(e_6)=-e_5$.

2. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}_2$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству равенства (4), для симметрического билинейного отображения U можем получить

$$\begin{aligned}2U(X,Y)&=(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4+\alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5)e_1+\\&+(-\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1+\alpha_3\beta_6+\alpha_6\beta_3)e_2-(\alpha_1\beta_4+\alpha_4\beta_1+\alpha_2\beta_6+\alpha_6\beta_2)e_3-\\&-(\alpha_1\beta_5+\alpha_5\beta_1)e_4-(\alpha_1\beta_6+\alpha_6\beta_1)e_5.\end{aligned}\tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_2$ удовлетворяет любому из условий*:
1) $e_1,e_3\in\operatorname{Ker}f$;
2) $e_1,e_6\in\operatorname{Ker}f$;
3) $e_3,e_5\in\operatorname{Ker}f$;
4) $e_2,e_4,e_5\in\operatorname{Ker}f$;
5) $e_2,e_3,e_5\in\operatorname{Ker}f$.

Тогда векторы $[fX,fY]$, $U(fX,fY)\in\operatorname{Ker}f$ для любых $X,Y\in\mathfrak{g}_2$.

Доказательство. Пусть, например, $e_1,e_3\in\operatorname{Ker}f$. Так как ядро и образ f-структуры пересекаются лишь по нулевому вектору, то $e_1,e_3\notin\operatorname{Im}f$. В силу того как определена скобка Ли на базисных векторах алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$ имеем

$$[fX,fY]=[\alpha_2fe_2+\alpha_4fe_4+\alpha_5fe_5+\alpha_6fe_6,\beta_2fe_2+\beta_4fe_4+\beta_5fe_5+\beta_6fe_6]=0,$$

где α_i, β_i, $i=2,4,5,6$, — координаты векторов X, Y в базисе алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$. Аналогично, учитывая (5), можем получить

$$2U(fX,fY)=(\alpha'_4\beta'_5+\alpha'_5\beta'_4+\alpha'_5\beta'_6+\alpha'_6\beta'_5)e_1-(\alpha'_2\beta'_6+\alpha'_6\beta'_2)e_3\in\operatorname{Ker}f,$$

где α'_i, β'_i, $i=2,4,5,6$, — координаты векторов fX и fY в базисе $e_1,\dots,e_6$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$ соответственно. Остальные случаи доказываются аналогично. $\square$

Теорема 2. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_2$ удовлетворяет любому из условий:*
1) $e_1,e_3\in\operatorname{Ker}f$;
2) $e_1,e_6\in\operatorname{Ker}f$;
3) $e_3,e_5\in\operatorname{Ker}f$;
4) $e_2,e_4,e_5\in\operatorname{Ker}f$;
5) $e_2,e_3,e_5\in\operatorname{Ker}f$.

Тогда f является эрмитовой f-структурой.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, нужно лишь воспользоваться леммой 2.

Пример 2. В качестве примера можно рассмотреть f-структуру f со следующим действием на базисных векторах алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$: $f(e_1)=f(e_3)=0$, $f(e_2)=-e_4$, $f(e_4)=e_2$, $f(e_5)=e_6$, $f(e_6)=-e_5$.

3. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}_3$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству равенства (4), для симметрического билинейного отображения U можем получить

$$2U(X,Y) = (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)e_1 + \\ + (-\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 + \alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4)e_2 - (\alpha_1\beta_4 + \alpha_4\beta_1 + \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2)e_3 - \\ - (\alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2)e_4 - (\alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)e_5. \quad (6)$$

Лемма 3. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_3$ удовлетворяет любому из условий*:
1) $e_1, e_3, e_4 \in \operatorname{Ker} f$;
2) $e_1, e_5, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;
3) $e_2, e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
4) $e_2, e_4, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
5) $e_2, e_4, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;
6) $e_3, e_4, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
7) $e_3, e_4, e_6 \in \operatorname{Ker} f$.
Тогда векторы $[fX, fY]$, $U(fX, fY) \in \operatorname{Ker} f$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}_3$.

Доказательство. Пусть, например, $e_1, e_3, e_4 \in \operatorname{Ker} f$. В силу того, как определена скобка Ли на базисных векторах алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$ можем получить

$$[fX, fY] = [\alpha_2 fe_2 + \alpha_5 fe_5 + \alpha_6 fe_6, \beta_2 fe_2 + \beta_5 fe_5 + \beta_6 fe_6] = 0,$$

где α_i, β_i, $i = 2, 4, 5, 6$, — координаты векторов X, Y в базисе алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$. Аналогично, учитывая (6), можем получить

$$2U(fX, fY) = (\alpha'_5\beta'_6 + \alpha'_6\beta'_5)e_1 - (\alpha'_2\beta'_5 + \alpha'_5\beta'_2)e_3 - (\alpha'_2\beta'_6 + \alpha'_6\beta'_2)e_4 \in \operatorname{Ker} f,$$

где α'_i, β'_i, $i = 2, 4, 5, 6$, — координаты векторов fX и fY в базисе $e_1, \ldots, e_6$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$ соответственно. □

Теорема 3. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_3$ удовлетворяет любому из условий*:
1) $e_1, e_3, e_4 \in \operatorname{Ker} f$;
2) $e_1, e_5, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;
3) $e_2, e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
4) $e_2, e_4, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
5) $e_2, e_4, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;
6) $e_3, e_4, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
7) $e_3, e_4, e_6 \in \operatorname{Ker} f$.
Тогда f является эрмитовой f-структурой.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, нужно лишь воспользоваться леммой 3.

Пример 3. В качестве примера можно рассмотреть f-структуру f со следующим действием на базисных векторах алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$: $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = 0$, $f(e_5) = e_6$, $f(e_6) = -e_5$.

4. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}_4$. Отметим, что алгебра $\mathfrak{g}_4$ соответствует примеру 2 п. 1 раздела 3, другими словами, является алгеброй Ли Q_5. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству

равенства (4), для симметрического билинейного отображения U можем получить:

$$2U(X,Y) = (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)e_1 + \\ + (-\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4)e_2 + (\alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2)e_3 - \\ - (\alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 + \alpha_3\beta_6 + \alpha_6\beta_3)e_4 - (\alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)e_5.$$

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_4$ удовлетворяет любому из условий*:
1) $e_1, e_4 \in \operatorname{Ker} f$;
2) $e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
3) $e_2, e_6 \in \operatorname{Ker} f$.
Тогда векторы $[fX, fY]$, $U(fX, fY) \in \operatorname{Ker} f$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}_4$.

Теорема 4. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_4$ удовлетворяет любому из условий*:
1) $e_1, e_4 \in \operatorname{Ker} f$;
2) $e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
3) $e_2, e_6 \in \operatorname{Ker} f$.
Тогда f является эрмитовой f-структурой.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, нужно лишь воспользоваться леммой 4.

Пример 4. В качестве примера можно рассмотреть f-структуру f со следующим действием на базисных векторах алгебры Ли $\mathfrak{g}_4$: $f(e_1) = f(e_4) = 0$, $f(e_2) = -e_3$, $f(e_3) = e_2$, $f(e_5) = e_6$, $f(e_6) = -e_5$.

5. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}_5$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству равенства (4), для симметрического билинейного отображения U можем получить

$$2U(X,Y) = (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)e_1 + \\ + (-\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4)e_2 + (\alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1)e_3 - \\ - (\alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 + \alpha_3\beta_6 + \alpha_6\beta_3)e_4 - (\alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)e_5.$$

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 5. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_5$ удовлетворяет любому из условий*:
1) $e_1, e_4 \in \operatorname{Ker} f$;
2) $e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
3) $e_2, e_5, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;
4) $e_2, e_3, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;
5) $e_2, e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$.
Тогда векторы $[fX, fY]$, $U(fX, fY) \in \operatorname{Ker} f$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}_5$.

Теорема 5. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на филиформной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_5$ удовлетворяет любому из условий*:
1) $e_1, e_4 \in \operatorname{Ker} f$;
2) $e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$;
3) $e_2, e_5, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;

4) $e_2, e_3, e_6 \in \operatorname{Ker} f$;
5) $e_2, e_3, e_5 \in \operatorname{Ker} f$.
Тогда f является эрмитовой f-структурой.

Доказательство теоремы аналогично доказательству 1, нужно лишь воспользоваться леммой 5.

Пример 5. В качестве примера можно рассмотреть f-структуру f со следующим действием на базисных векторах алгебры Ли $\mathfrak{g}_5$: $f(e_3) = f(e_5) = 0$, $f(e_1) = -e_4$, $f(e_4) = e_1$, $f(e_6) = e_2$, $f(e_2) = -e_6$.

Автор признателен научному руководителю Виталию Владимировичу Балащенко за консультации и ценные советы.

Литература

[1] Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. *Однородные пространства: теория и приложения* (Полиграфист, Ханты-Мансийск, 2008).

[2] Yano K. *On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$*, Tensor **14**, 99–109 (1963).

[3] Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий*, Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. ВИНИТИ АН СССР **18**, 25–71 (1986).

[4] Степанов Н.А. *Основные факты теории φ-пространств,* Изв. вузов. Матем., № 3, 88–95 (1967).

[5] Феденко А.С. *Пространства с симметриями* (Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1977).

[6] Ковальский О. *Обобщенные симметрические пространства* (Мир, М., 1984).

[7] Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах*, Матем. сб. **186** (11), 3–34 (1995).

[8] Балащенко В.В. *Канонические f-структуры гиперболического типа на регулярных Ф-пространствах,* УМН **53** (4), 213–214 (1998).

[9] Kaplan A. *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules,* Geom. Dedicata **11** (2), 127–136 (1981).

[10] Kaplan A. *On the geometry of groups of Heisenberg type*, Bull. London Math. Soc. **15** (1), 35–42 (1983).

[11] Balashchenko V.V. *Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group*, Kragujevac J. Math. **35** (2), 209–222 (2011).

[12] Балащенко В.В., Дубовик П.А. *Левоинвариантные f-структуры на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2,1)$*, Вестн. БГУ. Сер. 1. Матем. Физ. Информ., № 3, 112–117 (2013).

[13] Балащенко В.В. *Однородные эрмитовы f-многообразия*, УМН **56** (3), 159–160 (2001).

[14] Яно К., Кон М. *CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях* (Наука, М., 1990).

[15] Кириченко В.Ф. *Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **47** (6), 1208–1223 (1983).

[16] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства* (Мир, М., 1964).

[17] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2 (Наука, М., 1981).

[18] Khakimdjanov Yu., Goze M., Medina A. *Sympletic or contact structures on Lie groups*, Differential Geometry Appl. **21** (1), 41–54 (2004).

[19] Vergne M. *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France **98** (1), 81–116 (1970).

[20] Морозов В.В. *Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка,* Изв. вузов. Матем., № 4, 161–171 (1958).

П.А. Дубовик

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь,

`e-mail:` geometryk@gmail.com

P.A. Dubovik

Hermitian f-structures on 6-dimensional filiform Lie groups

Abstract. We consider left-invariant f-structures on 6-dimensional filiform Lie groups. We indicate some sufficient conditions under which the special left-invariant f-structures on these Lie groups belong to the class of Hermitian f-structures. We also present particular examples of the corresponding f-structures.

Keywords: metric f-structure, left-invariant f-structure, the Levi-Civita connection, nilpotent Lie algebra, Hermitian f-structure, filiform Lie group.

P.A. Dubovik

Belarussian State University,
4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus,

`e-mail:` geometryk@gmail.com