

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по образовательной деятельности
Татарский Д.А.
« 16 » сентября 20 15 г.



Программа дисциплины

Б1.Б.8 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки: 12.03.04 Биотехнические системы и технологии

Профиль подготовки: —

Квалификация выпускника: бакалавр

Казань 2015

1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целью освоения дисциплины "Математический анализ" является изучение теоретических основ дифференциального и интегрального исчисления. Современный научный работник или инженер должен в достаточной степени хорошо владеть как классическими, так и современными математическими методами исследования, которые могут применяться в его области. Для этого необходимо, прежде всего, иметь необходимые знания, уметь правильно обращаться с математическим аппаратом, в частности, методами математического анализа, знать границы допустимого использования рассматриваемой математической модели.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.Б.8 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 12.03.04 Биотехнические системы и технологии и относится к базовой части. Осваивается на 1, 2 курсах, 1, 2, 3 семестры. Дисциплина находится в программе 1-го, 2-го и 3-го семестров. Для освоения дисциплины необходимы хорошие знания алгебры и геометрии в объеме средней школы. Дисциплина является одной из основных, необходима для изучения всех физических курсов и для успешной профессиональной деятельности.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен знать:

- теоретические основы математического анализа;

уметь:

- использовать знание теоретических основ математического анализа при анализе различных функций, использовать теоретические понятия и практические методы при решении задач, возникающих в различных физических курсах;

владеть:

основными понятиями теории функций одной и многих переменных, методами дифференцирования и интегрирования функций, приемами работы с рядами и интегралами от функций многих переменных; демонстрировать способность и готовность:

- использовать знание теоретических основ математического анализа при анализе различных функций, использовать теоретические понятия и практические методы при решении задач, возникающих в различных физических курсах.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-2	способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2)

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 12 зачетных(ые) единиц(ы) 432 часа(ов).
 Форма промежуточного контроля дисциплины экзамен в 1 семестре; экзамен во 2 семестре; экзамен в 3 семестре.

	Раздел дисциплины	Семестр	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
1.	Тема 1. Элементы теории множеств.	1	2	2	0	2
2.	Тема 2. Теория пределов.	1	6	8	0	8
3.	Тема 3. Понятие функции. Понятие предельного значения функции.	1	8	6	0	6
4.	Тема 4. Производная и дифференциал функции.	1	10	10	0	10
5.	Тема 5. Неопределенный интеграл.	1	10	10	0	10
6.	Тема 6. Определенный интеграл.	2	13	8	0	6
7.	Тема 7. Функции нескольких переменных.	2	14	8	0	4
8.	Тема 8. Теория рядов	2	13	10	0	4
9.	Тема 9. Ряды Фурье.	2	14	10	0	4
10.	Тема 10. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.	3	10	10	0	10
11.	Тема 11. Двойные и n -- кратные интегралы.	3	8	10	0	10
12.	Тема 12. Криволинейные интегралы.	3	10	8	0	8
13.	Тема 13. Поверхностные интегралы.	3	8	8	0	8
.	Итоговая форма контроля	1	0	0	0	36
.	Итоговая форма контроля	2	0	0	0	36
.	Итоговая форма контроля	3	0	0	0	36
	Итого		126	108	0	198

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Элементы теории множеств.

Операции над множествами и их свойства. Подмножества. Отображения множеств. Инъекция, сюръекция, биекция. Композиция отображений. Числовые множества. Метод математической индукции. Комплексные числа. Верхние и нижние грани числовых множеств. **Тема 2. Теория пределов.**

Числовые последовательности. Сходящиеся последовательности. Бесконечно малые (большие) последовательности. Основные теоремы о пределах последовательностей. Число e . Монотонные последовательности. Подпоследовательности. Предельные точки последовательности. Критерий Коши.

Тема 3. Понятие функции. Предельное значение функции.

Непрерывность. Понятие функции. Понятие предельного значения функции. Понятие непрерывности функции. Классификация бесконечно-малых функций. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы. Классификация точек разрыва. Понятие равномерной непрерывности функций. Верхняя и нижняя грани функции. Основные теоремы о непрерывных функциях на сегменте.

Тема 4. Производная и дифференциал функции.

Определение производной. Основные правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Дифференциал. Производные, дифференциалы высших порядков.

Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правила раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора. Различные виды остаточного члена в формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора в приближенных вычислениях. Применение дифференциального исчисления к исследованию поведения функции и построению графиков. (Признак монотонности функции. Возрастание и убывание функции. Экстремум. Направление выпуклости, точки перегиба. Асимптоты. Построение графика). Приближенное решение уравнений методом "вилки", методом итераций, методом "хорд" и "касательных". Оценки скорости сходимости этих методов.

Тема 5. Неопределенный интеграл.

Неопределенный интеграл. Основные методы и формулы интегрирования. Алгебра многочленов. Разложения рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых иррациональностей. Интегрирование дифференциального бинома. Интегрирование некоторых тригонометрических и гиперболических выражений.

Тема 6. Определенный интеграл.

Понятие определенного интеграла. Суммы Дарбу и их свойства. Существование определенного интеграла для непрерывных и кусочно-непрерывных функций. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Формулы среднего значения. Связь с неопределенным интегралом. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические и физические приложения. Приближенное вычисление и оценка погрешностей.

Тема 7. Функции нескольких переменных.

Понятие функции нескольких переменных. Предельное значение функции. Непрерывность. Частные производные. Дифференцируемость функции. Дифференциал. Дифференцируемость сложной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент. Неявные функции. Зависимость функций. Условный экстремум. Замена переменных.

Тема 8. Теория рядов

Числовые ряды. Критерий Коши сходимости. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся рядах. Степенные ряды. Теорема Абеля. Разложение функций в степенные ряды.

Тема 9. Ряды Фурье.

Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье. Ряд Фурье по ортогональной системе элементов евклидова пространства. Неравенство Бесселя. Полные и замкнутые системы. Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Сходимость и равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Влияние гладкости функции на порядок ее коэффициентов Фурье. Почленное дифференцирование ряда Фурье. Комплексная форма ряда Фурье. Понятие обобщенной функции.

Тема 10. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

Несобственные интегралы и признаки сходимости. Интеграл Фурье и его комплексная форма. Интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Непрерывность интегралов, зависящих от параметра. Эйлеровы интегралы.

Тема 11. Двойные и n – кратные интегралы.

Двойной интеграл и его основные свойства. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных. Геометрические и физические приложения. Тройные и n – кратные интегралы. Их свойства и способы вычислений. Приближенное вычисление кратных интегралов. Понятие несобственных кратных интегралов.

Тема 12. Криволинейные интегралы.

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го родов. Сведение криволинейных интегралов к обыкновенным. Основные свойства, приложения. Формула Грина.

Тема 13. Поверхностные интегралы.

Задание поверхности с помощью векторных функций. Односторонние и двусторонние поверхности. Понятие площади поверхности. Понятие поверхностных интегралов 1-го и 2-го родов. Вычисление поверхностных интегралов, их приложения. Формулы Остроградского и Стокса и их приложения.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лекционная форма подачи материала

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Примеры задач для самостоятельной (домашней) работы: см. приложение 1.

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

7.1. Регламент дисциплины

Суммарно по дисциплине можно получить максимум 100 баллов, из них текущий контроль в течение семестра оценивается в 50 баллов, экзамен - в 50 баллов.

20 баллов – контрольная работа №1

20 баллов – контрольная работа №2

10 баллов – расчетное задание

Итого: 20+20+10=50 баллов

7.2. Оценочные средства текущего контроля

Проверка расчетных заданий:

1. Расчетные задания по математике. Математический анализ: Неопределенный и определенный интегралы (I семестр). Составители: Н.Ф.Дмитриева, Б.С.Никитин, В.Г.Подольский. Казань:-2003.

2. Расчетные задания по математике. математический анализ: Функции многих переменных (II семестр). составители: С.П.Гаврилов, Н.Ф.Дмитриева, В.Г.Подольский.- Казань:-2003.

3. Расчетные задания по математике, математический анализ. Ряды. Составитель: Анчиков А.М. Казань,-2006.

4. Расчетные задания по математике. Математический анализ: Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметров. (III семестр). Составители: Р. Л. Валиуллин, Н.Ф.Дмитриева, Б.С.Никитин.-Казань:-2004.

Проведение устных опросов и контрольных работ:

Типовые задания для контрольных работ указаны в приложении 2.

Тема 1. Элементы теории множеств.

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 2. Теория пределов.

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 3. Понятие функции. Предельное значение функции. Непрерывность.

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 4. Производная и дифференциал функции.

Спецификация контрольной работы (пример контрольной работы: см.приложение 2):

1. Предел последовательности.
2. Предел функции.
3. Производная первого, второго порядка от функции, заданной явно/ неявно/ параметрически.
4. Дифференциал первого, второго порядка от функции, заданной явно/ неявно/ параметрически.
5. Формула Тейлора. Приложения формулы Тейлора.
6. Геометрические приложения (экстремум, касательная и нормаль к графику функции)

Тема 5. Неопределенный интеграл.

Спецификация контрольной работы (пример контрольной работы: см.приложение 2):

1. Элементарные интегралы. Интегрирование функции методом введения нового аргумента, подстановки, замены.
2. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование дробно-рациональной функции.
4. Интегрирование выражений, содержащих иррациональности. (подстановки Эйлера, интеграл от дифференциального бинома)
5. Интегрирование тригонометрических функций.

Тема 6. Определенный интеграл.

Спецификация контрольной работы (пример контрольной работы: см.приложение 2):

1. Определенный интеграл.
2. Вычисление длины дуги.
3. Вычисление объема тела по известному поперечному сечению.
4. Нахождения центра масс, момента инерции.

Тема 7. Функции нескольких переменных.

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 8. Теория рядов

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 9. Ряды Фурье.

Спецификация контрольной работы (пример контрольной работы: см.приложение 2):

1. Абсолютная/условная сходимость числового ряда. Равномерная сходимость функционального ряда.
2. Степенные ряды. Радиус сходимости. Суммирование степенных рядов, разложение в степенной ряд.

Тема 10. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 11. Двойные и n -- кратные интегралы.

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 12. Криволинейные интегралы.

устный опрос: основные понятия раздела.

Тема 13. Поверхностные интегралы.

Спецификация контрольной работы (пример контрольной работы: см. приложение 2):

1. Абсолютная/условная сходимость числового ряда. Равномерная сходимость функционального ряда.
2. Степенные ряды. Радиус сходимости. Суммирование степенных рядов, разложение в степенной ряд.
3. Кратные интегралы. Их приложения.
4. Криволинейный/поверхностный интеграл.
5. Формула Стокса, Остроградского

7.3. Билеты к экзамену

А) Первый курс, первый семестр.

Билет 1

1. Отображение множеств. Композиция отображений. Производные высших порядков сложной, обратной функций и функций, заданной параметрически.

Билет 2

1. Свойства непрерывных функций на сегменте (теорема о сохранении знака, об обращении в нуль).
Интегрирование квадратичных иррациональностей.

Билет 3

1. Асимптоты графика функции.
Интегрирование простейших дробей.

Билет 4

1. Достаточные условия локального экстремума.
Число e .

Билет 5

1. Предельное значение функции (определения). Свойства пределов функций. Первообразная для непрерывной функции. Формула Ньютона - Лейбница.

Билет 6

1. Свойства сходящихся последовательностей, связанных неравенствами.
Высшие производные некоторых элементарных функций ($\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, a^x).

Билет 7

1. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
Основные сведения о полиномах и их разложение на множители.

Билет 8

1. Ограниченные и неограниченные последовательности. Монотонные последовательности и их пределы.
Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

Билет 9

1. Числовая последовательность и ее предел.

Интегрирование простейших и рациональных дробей.

Билет 10

1. Понятие множеств, операции над ними. Верхние и нижние грани числовых множеств. Формула Лейбница для n-ой производной.

Билет 11

1. Точки разрыва и их классификация.
Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей.

Билет 12

1. Дифференциалы высших порядков.
Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции на сегменте.

Билет 13

1. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба графика.
Определение определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости.

Билет 14

1. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная форма комплексного числа.
Определенный интеграл с верхним переменным пределом и его свойства.

Билет 15

1. Свойства непрерывных функций на сегменте (теоремы о промежуточных значениях, об ограниченности).
Замена переменной под знаком определенного интеграла.

Билет 16

1. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их связь.
Определенный интеграл, его основные свойства.

Билет 17

1. Комплексные числа. Возведение в степень и извлечение корня.
Формула Тейлора. Остаточный член.

Билет 18

1. Производная функции. Дифференцируемость. Правила дифференцирования.

Интегрирование по частям. Интеграл
$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Билет 19

1. Первый замечательный предел и его следствия.
Суммы Дарбу и их следствия.

Билет 20

1. Второй замечательный предел и его следствия.
Монотонность функции. Локальный экстремум. Необходимое условие.

Билет 21

1. Непрерывность функции. Действия над непрерывными функциями.
Интегрирование дифференциального бинома.

Билет 22

1. Основные свойства сходящихся последовательностей, связанных равенствами. Дифференциал, его геометрический смысл. Инвариантность формы первого дифференциала.

Билет 23

1. Первое правило Лопиталья.
Замена переменной под знаком неопределенного интеграла.

Билет 24

1. Второй замечательный предел и его следствия.
Теоремы Ролля, Коши для дифференцируемых функций на сегменте.

Билет 25

1. Сравнение бесконечно малых функций. Выделение главной части.
Интегрирование квадратичных иррациональностей.

Билет 26

1. Необходимое и достаточное условие точек перегиба.
Интегрирование дифференциального бинома.

Б) Первый курс, второй семестр

Билет 1

1. Дифференцируемость функций n переменных. Инвариантность формы 1-го дифференциала.
Почленное интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов.

Билет 2

1. Огибающая и дискриминантная кривая однопараметрического семейства кривых.
Коэффициенты Фурье и ряд Фурье по тригонометрической системе функций.

Билет 3

1. Соприкосновение кривых. Соприкасающаяся окружность.
Разложение функций в ряд Фурье по синусам и косинусам.

Билет 4

1. Сложная функция и ее дифференцирование.
О перестановке членов условно сходящегося ряда.

Билет 5

1. Зависимость и независимость функций (теорема).
Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Билет 6

1. Понятие частной производной. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью.
Интегральный признак сходимости числового ряда.

Билет 7

1. Формула Тейлора для функций и переменных.
Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Билет 8

1. Непрерывность функции n переменных. Теорема о сохранении знака непрерывной функции.
Признак Даламбера сходимости числового ряда.

Билет 9

1. Неявная функция. Теорема о существовании и единственности неявной функции.
Признаки сравнения сходимости числового ряда.

Билет 10

1. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных.
Некоторые приложения степенных рядов.

Билет 11

1. Локальный экстремум (необходимое и достаточное условие).
Функциональный ряд. Сходимость. Равномерная сходимость.

Билет 12

1. Определение функции n переменных. Предел функции, повторные пределы.
Ортогональные системы функций. Коэффициенты и ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Билет 13

1. Дифференцирование функций, неявно определяемых посредством системы функциональных уравнений.
Интервал и радиус сходимости числового ряда.

Билет 14

1. Производная по направлению. Градиент.
Задача о наименьшем квадратичном уклонении.

Билет 15

1. Подмножества евклидова пространства n измерений.
Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленный предельный переход).

Билет 16

1. Сложная функция n переменных, ее непрерывность (теорема).
Равномерная сходимость степенных рядов (теорема).

Билет 17

1. Последовательность точек в n -мерном пространстве и ее предел.

Разложение функций в степенные ряды. Основная теорема о разложениях.

Билет 18

1. Условный экстремум функции n переменных.
Признак Дирихле сходимости числового ряда.

Билет 19

1. Замена переменных в дифференциальных выражениях для функции одного аргумента.
Признак Лейбница сходимости числового ряда.

Билет 20

1. Евклидово пространство n измерений.
Ряд Фурье в комплексной форме.

Билет 21

1. Замена переменных в дифференциальных выражениях с частными производными.
Полнота и замкнутость ортогональной системы.

В) Второй курс, третий семестр

Билет 1

1. Несобственный интеграл, зависящий от параметра 1-го рода. Равномерная сходимость.
Признак Вейерштрасса.
Вычисление площади гладкой поверхности.

Билет 2

1. Γ -функция и ее свойства.
Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с интегралами 1-го рода. Вычисление.

Билет 3

1. Γ -функция, Ψ - функция. Связь между ними.
Формула Стокса.

Билет 4

1. Замена переменных в тройных интегралах.
Сведение поверхностного интеграла 1-го рода к двойному.

Билет 5

1. Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра.
Формула Грина.

Билет 6

1. Вычисление тройного интеграла.
Приложения поверхностных интегралов.

Билет 7

1. Тройной интеграл, его свойства.
 Γ -функция и ее свойства.

Билет 8

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность.
Формула Стокса.

Билет 9

1. Вычисление двойного интеграла.
Приложения поверхностных интегралов.

Билет 10

1. Суммы Дарбу. Классы интегрируемых функций по плоской области.
Угол между двумя линиями на поверхности.

Билет 11

1. Двойной интеграл. Свойства.
Криволинейные интегралы 1-го рода. Сведение к обыкновенному интегралу.

Билет 12

1. Абсолютная сходимость несобственного интеграла 1-го рода. Признаки абсолютной сходимости.
Формула Грина.

Билет 13

1. Понятие n -мерного интеграла. Задача взаимного притяжения двух тел.
Некоторые приложения криволинейных интегралов.

Билет 14

1. Объем в криволинейных координатах.
Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши.

Билет 15

1. Отображение трехмерных областей. Криволинейные координаты (сферические, цилиндрические).
Кривые на поверхности. Длина дуги. Угол между двумя линиями на поверхности.

Билет 16

1. Несобственные интегралы 1-го рода. Сходимость. Критерий Коши.
Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Билет 17

1. Отображение двумерных областей. Криволинейные координаты и площадь плоской фигуры.
Криволинейные интегралы 2-го рода и их вычисление.

Билет 18

1. Интеграл Пуассона - Эйлера.
Формула Остроградского.

Билет 19

1. Дифференцирование и интегрирование собственного интеграла, зависящего от параметра.

Приложения двойных интегралов.

Билет 20

1. Интеграл Дирихле.
Понятие поверхности. Параметризация.

Билет 21

1. Дифференцирование и интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.
Криволинейные интегралы 1-го рода. Сведение к обыкновенному интегралу.

Билет 22

1. Замена переменных в двойном интеграле.
Признак Дирихле условной сходимости несобственного интеграла.

7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
ОПК-2	способностью выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат	Знание основных терминов дисциплины. Умение решать основные задачи	Контрольная работа №1, контрольная работа №2, устный опрос на практических занятиях, проверка домашнего задания, экзамен билеты №1-26, №1-21, №1-22.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Работа на практических занятиях предполагает решение задач, подготовку домашнего задания.

При подготовке к экзамену необходимо опираться прежде всего на лекции, а также на источники, которые указывались на занятиях в течение семестра.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Основная литература

Основы математического анализа : [учеб. для студентов 1 и 2 курсов вузов и ун-тов : в 2 ч.] / Г.М. Фихтенгольц . изд. 8-е, стереотипное. Санкт-Петербург : Лань, 2006 . ; 21 . (Учебники для вузов, Специальная литература) . ISBN 5-9511-0010-0, 3000.

Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1. - 10-е изд., стер. – СПб: Лань, 2015. - 448 с. // <http://e.lanbook.com/view/book/65055/>

Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й.- 9-е изд.,стер.- СПб: Лань, 2008. -

464 с. // http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=411

Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев .- Москва : Астрель : АСТ, 2007 .? 654, [1] с. : ил. ; 22 .- Предм. указ.: с. 639-649 .? ISBN 5-17-004601-4 ((АСТ)) , 5000 .? ISBN 5-271-01318-9 ((Астрель)) .? ISBN 985-13-8593-X ((Харвест)) .

Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович .? Москва : АСТ : Астрель, 2007 . 558, [2] с. : ил. ; 22 .? ISBN 5-17-010062-0 ((АСТ)) .ISBN 5-271-03601-4 ((Астрель)) .

9.2. Дополнительная литература

Математический анализ: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 164 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-005487-2, 500 экз.

<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=342088>

Протасов, Ю. М. Математический анализ [Электронный ресурс] : учеб.пособие / Ю. М. Протасов. - М.: Флинта : Наука, 2012. - 168 с. - ISBN 978-5-9765-1234-4 (Флинта), ISBN 978-5-02-037708-0 (Наука). <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=455635>

Фихтенгольц Г.М.Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 1.- 9-е, стер.- СПб: Лань, 2009.- 608 стр.

http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=407

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1.- 10-е изд., стер.- СПб:

Лань, 2016. - 608 стр.

http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=71768

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Т.1.- 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004. - 648 стр.

http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=59376

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: Часть II.- 5-е изд.- М.: Физматлит, 2009. – 464 с.

http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=2736

Будак Б.М., Фомин Кратные интегралы и ряды. М., 1967.

Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды.- 3-е изд.- М.: Физматлит, 2002. - 549 стр

http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_id=2123

Анчиков А.М. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметров. Изд-во Казан.гос. ун-та, Казань, 1998. 145 экз.

Анчиков А.М. Ряды (Учебно-методическое пособие) Изд-во Казан.гос. ун-та, Казань, 2003.

Анчиков А.М., Валиуллин Р.Л., Даишев Р.А. Введение в математический анализ в вопросах и задачах. Изд-во Казан.гос. ун-та, Казань, 2006. 49 экз.

Анчиков, А.М. Введение в математический анализ в вопросах и задачах [Текст : электронный ресурс] / А.М. Анчиков, Р.Л. Валиуллин, Р.А. Даишев ; Казан.гос. ун-т, Физ. фак. — Электронные данные (1 файл: 0,35 Мб) .— (Казань : Научная библиотека Казанского федерального университета, 2014) .— Загл. с экрана .— Режим доступа: открытый.

Оригинал копии: Введение в математический анализ в вопросах и задачах : [для студентов 1 курса физ. фак.] / А.М. Анчиков, Р.Л. Валиуллин, Р.А. Даишев ; Казан.гос. ун-т, Физ. фак. — Казань : [Казан.гос. ун-т], 2006 .— 69 с. ; 20.

<http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-759223.pdf>

Кропотова Т.В., Подольский В.Г., Интегрирование функций одного переменного: примеры и задачи. Часть 1. - Казнь, 2004. -74 с. 234 экз.

Кропотова, Т.В. Интегрирование функций одного переменного : примеры и задачи / Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский ; Казан.гос. ун-т, Физ. фак. — Казань : [б. и.], 2004.

Ч. 1: [Неопределенный интеграл [Текст : электронный ресурс] : основные понятия, свойства, методы интегрирования] .— Электронные данные (1 файл: 0,43 Мб) .— (Казань : Научная библиотека Казанского федерального университета, 2014) .— Загл. с экрана .— Режим доступа: открытый.

Оригинал копии: [Неопределенный интеграл : основные понятия, свойства, методы интегрирования] .— Казань : [б. и.], 2004 .— 74 с. ; 21.

<http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-747761.pdf>

9.3. Интернет-ресурсы:

А. В. Аминова Элементы теории множеств - http://www.ksu.ru/f6/k6/bin_files/teoriya_mnoghestv!4.pdf

А. М. Анчиков, Р. Л. Валиуллин, Р. А. Даишев Введение в математический анализ в вопросах и задачах - <http://toig-kazan.narod.ru/education/I/Matan.pdf>

А. Ю. Даньшин Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы - http://www.ksu.ru/f6/bin_files/krint2010!40.pdf

Сайт кафедры теории относительности и гравитации КФУ - <http://old.kpfu.ru/f6/k6/index.php?id=1>

Сайт кафедры теории относительности и гравитации КФУ - <http://toig-kazan.narod.ru/education.htm>

Т. В. Кропотова, В. Г. Подольский Интегрирование функций одного переменного: примеры и задачи. Часть I - http://www.ksu.ru/f6/k6/bin_files/integr_m!23.pdf

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Освоение дисциплины "Математический анализ" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе "ZNANIUM.COM", доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС "ZNANIUM.COM" содержит произведения крупнейших российских учёных, руководителей государственных органов, преподавателей ведущих вузов страны, высококвалифицированных специалистов в различных сферах бизнеса. Фонд библиотеки сформирован с учетом всех изменений образовательных стандартов и включает учебники, учебные пособия, УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, специальные периодические издания и издания, выпускаемые издательствами вузов. В настоящее время ЭБС ZNANIUM.COM соответствует всем требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВО) нового поколения. Учебно-методическая литература для данной дисциплины имеется в наличии в электронно-библиотечной системе Издательства "Лань" , доступ к которой предоставлен обучающимся. ЭБС Издательства "Лань" включает в себя электронные версии книг издательства "Лань" и других ведущих издательств учебной литературы, а также электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам. ЭБС Издательства "Лань" обеспечивает доступ к научной, учебной литературе и научным периодическим изданиям по максимальному количеству профильных направлений с соблюдением всех авторских и смежных прав. учебные аудитории Института физики

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 12.03.04 "Биотехнические системы и технологии".

Автор(ы): А.В.Аминова
Рецензент(ы): А.А.Попов

Программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии Института физики « 16 » сентября 2015 г.

Приложения:

Приложение 1 «Банк типовых задач для самостоятельного решения»;

Приложение 2 «Типовые контрольные работы».

Приложение 1

к программе дисциплины «Математический анализ»

Банк типовых задач для самостоятельного решения

1 семестр:

1. Вычислить пределы числовых последовательностей и функций.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7-n+n^2}}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}).$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 6n + 7}{3n^2 + 20n - 1} \right)^{-n+1}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^3) - (1+3x)}{x+x^5}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x+1} - 2}{\ln(1+4x)}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}.$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9}.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}.$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}.$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}.$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 + 8}{3x^2 + 10} \right)^{x+2}.$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}.$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x + \cos x)^{1/\operatorname{tg} x}.$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos x + \sin \frac{1}{x} \ln(1+x)}.$$

2. Найти дифференциал dy . $y = x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$, $x > 0$.

3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7,76$

4. Найти производную.

$$1) y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}.$$

$$2) y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}).$$

$$3) y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}.$$

$$4) y = \sin \sqrt{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 3x}{3 \cos 6x}.$$

$$5) y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$6) y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2 + \sqrt{5} \operatorname{th} x}{2 - \sqrt{5} \operatorname{th} x}.$$

$$7) y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2) \ln \operatorname{arctg} x}.$$

$$8) y = \frac{1}{24} (x^2 + 8) \sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^4}{16} \arcsin \frac{2}{x},$$

$$x > 0.$$

$$9) y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}.$$

$$10) y = \frac{1}{\sin \alpha} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha).$$

$$11) \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin \left(\frac{t^3}{3} + t \right). \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin \left(\frac{t^3}{3} + t \right). \end{cases}$$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей

$$\text{значению параметра } t = t_0 \cdot \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

6. Найти производную n -го порядка: $y = xe^{ax}$.

7. Найти производную указанного порядка: $y = (2x^2 - 7) \ln(x-1)$, $y^5 = ?$.

8. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

9. Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению: $y = xe^{-x^2/2}$.

$$xy' = (1 - x^2)y.$$

10. Построить график функций с помощью производной первого порядка.

$$1) y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9; 2) y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1, 4]$$

12. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков. 1) $y = x^2 - 4x - (x - 2)\ln(x - 1)$, $x_0 = 2$.

2) $y = 4x - x^2 - 2\cos(x - 2)$, $x_0 = 2$.

13. Найти асимптоты и построить графики функций: $y = \frac{17 - x^2}{4x - 5}$.

14. Провести полное исследование функций и построить их график: 1) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

2) $y = \sqrt[3]{(2 - x)(x^2 - 4x + 1)}$. 3) $y = -\sqrt[3]{(x + 3)(x^3 + 6x + 6)}$. 4) $y = \ln(\cos x + \sin x)$.

5) $y = \left(\frac{1}{\sin x + \cos x} \right)$.

15. Найти неопределенные интегралы: 1) $\int (4 - 3x)e^{-3x} dx$, 2) $\int \arctg \sqrt{4x - 1} dx$,

3) $\int (3x + 4)e^{3x} dx$.

16. Вычислить определенные интегралы: 1) $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$, 2) $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx$.

3) $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx$.

17. Найти неопределенные интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$. 2) $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$. 3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

18. 4) $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$.

19. . Вычислить определенные интегралы: 1) $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$. 2) $\int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}$.

3) $\int_0^1 \frac{4\arctg x - x}{1 + x^2} dx$. 4) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}$.

20. Найти неопределенные интегралы. 1) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx$. 2) $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$. 3) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$.

4) $\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx$.

21. . Найти неопределенные интегралы: 1) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx$. 2) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx$.

3) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx$. 4) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx$. 5) $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx$.

6) $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx$. 7) $\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx$. 8) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$.

22. Вычислить определенные интегралы: 1) $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1 - \cos x)}$. 2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}$.

3) $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1 + \cos x)}$. 4) $\int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}$. 5) $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}$.

6) $\int_{\operatorname{arccos}(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx$. 7) $\int_0^{\operatorname{arccos}(1/\sqrt{7})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx$.

8) $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx$. 9) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx$. 10) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx$. 11) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx$.

12) $\int_0^1 \frac{4\sqrt{x-1} - \sqrt{3x-1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} dx$. 13) $\int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx$. 14) $\int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} dx$.

15) $\int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} dx$. 16) $\int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx$. 17) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$. 18) $\int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

23. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx$. 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx$. 3) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx$. 4) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9 \sqrt{x^4}} dx$.

24. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

1) $y = (x-2)^3$, $y = 4x-8$. 2) $y = x\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq 3)$. 3) $y = 4-x^2$, $y = x^2-2x$.

4) $y = \sin x \cos^2 x$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq \pi/2)$.

25. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases}$
 $x = 2(x \geq 2)$. $y = 2(y \geq 2)$. $y = 4(0 < x < 8\pi, y \geq 4)$. $x = 2(x \geq 2)$.

26. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в

полярных координатах: 1) $r = 4 \cos \varphi$, $r = 2(r \geq 2)$. 2) $r = \cos 2\varphi$.

3) $r = \sqrt{3} \cos \varphi$, $r = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$. 4) $r = 4 \sin 3\varphi$, $r = 2(r \geq 2)$.

27. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе

координат: 1) $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$. 2) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$

3) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$ 4) $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

28. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \pi.$ $0 \leq t \leq 2\pi.$ $0 \leq t \leq 2.$

4) $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \pi.$

29. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

1) $\rho = 3e^{3\varphi/4},$ 2) $\rho = 2e^{4\varphi/3},$ 3) $\rho = \sqrt{2}e^\varphi,$ 4) $\rho = 5e^{5\varphi/12},$
 $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$ $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$ $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$ $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

30. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями: 1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = y, z = 0 (y \geq 0).$

2) $z = x^2 + 4y^2, z = 2.$ 3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$ 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$

31. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками

функций. Ось вращения Ox : 1) $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$ 2) $\begin{cases} 2x - x^2 - y = 0, \\ 2x^2 - 4x + y = 0. \end{cases}$

3) $y = 3 \sin x, y = \sin x,$ 4) $y = 5 \cos x, y = \cos x,$
 $0 \leq x \leq \pi.$ $x = 0, x \leq 0.$

2 семестр:

1. Найти сумму ряда. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}$.

2. Исследовать на сходимость ряд: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{1}{n+1}\right)$. 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$. 5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. Найти область сходимости ряда. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + 1}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} (x-3)^n$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} \sin^{3n} x$.

4. Найти сумму ряда. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+5)x^{n-1}$.

5. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x . 1) $\frac{9}{20-x-x^2}$. 2) $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

Исследовать функцию $u(x; y; z)$ на экстремум (13–15).

13. 1) $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$;

2) $u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$;

3) $u = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$; 4) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$;

5) $u = zyz(16 - x - y - 2z)$; 6) $u = xy^2z^3(49 - x - 2y - 3z)$.

17. Исследовать на экстремум непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x; y)$, заданную неявно условиями:

1) $x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0, u > 2$;

2) $25x^2 + y^2 + 16u^2 - 50x + 64u - 311 = 0, u < -2$;

3) $x^2 + 4y^2 + 9u^2 - 6x + 8y - 36u = 0, u > 2$;

4) $(x^2 + y^2 + u^2)^2 = 8(x^2 + y^2 - u^2), u > 0$;

5) $(x^2 + y^2 + u^2 + 9)^2 = 100(x^2 + y^2), u < 0$.

18. Исследовать на строгий экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x; y)$, заданную неявно уравнением:

- 1) $x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0$;
- 2) $2x^2 + 2y^2 + u^2 + 8yu - u + 8 = 0$;
- 3) $x^3 - y^2 + u^2 - 3x + 4y + u - 8 = 0$;
- 4) $(x^2 + y^2)^2 + u^4 - 8(x^2 + y^2) - 10u^2 + 16 = 0$.

19. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относительно заданного уравнения связи:

- 1) $u = xy, x + y - 1 = 0$; 2) $u = x^2 + y^2, 3x + 2y - 6 = 0$;
- 3) $u = x^2 - y^2, 2x - y - 3 = 0$; 4) $u = xy^2, x + 2y - 1 = 0$;
- 5) $u = \cos^2 x + \cos^2 y, x - y - \pi/4 = 0$.

21. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относительно заданного уравнения связи:

- 1) $u = 5 - 3x - 4y, x^2 + y^2 = 25$; 2) $u = 1 - 4x - 8y, x^2 - 8y^2 = 8$;
- 3) $u = x^2 + xy + y^2, x^2 + y^2 = 1$;
- 4) $u = 2x^2 + 12xy + y^2, x^2 + 4y^2 = 25$;
- 5) $u = x/a + y/b, x^2 + y^2 = r^2, r > 0$.

16. Определить статический момент относительно плоскости $z = 0$ однородной ($\rho = \rho_0 = \text{const}$) поверхности:

- 1) $x + y + z = a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

17. Определить аппликату центра масс полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$ с поверхностной плотностью:

- 1) $\rho = \rho_0$; 2) $\rho = \rho_0 \sqrt{x^2 + y^2}$; 3) $\rho = \rho_0(x^2 + y^2), \rho_0 = \text{const}$.

18. Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- 2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq R$;
- 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq x$; 4) $z = 2 - (x^2 + y^2)/2, z \geq 0$;
- 5) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, u \in [0; 1], v \in [0; \pi]$.

19. Вычислить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородной ($\rho = \rho_0 = \text{const}$) поверхности:

- 1) $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- 2) $z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq r^2$.

5. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

$$1) f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2/3, \\ 0, & \text{если } x > 2/3. \end{cases}$$

10. Пусть $\hat{f}(y) = F[f(x)]$. Доказать, что:

$$1) F[e^{i\alpha x} f(x)] = \hat{f}(y - \alpha), \quad \alpha \in R;$$

$$2) F[f(x - \alpha)] = e^{-i\alpha y} \hat{f}(y), \quad \alpha \in R;$$

$$3) F[\cos \alpha x \cdot f(x)] = \frac{\hat{f}(y - \alpha) + \hat{f}(y + \alpha)}{2}, \quad \alpha \in R;$$

$$4) F[\sin \alpha x \cdot f(x)] = \frac{\hat{f}(y - \alpha) - \hat{f}(y + \alpha)}{2i}, \quad \alpha \in R.$$

15. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на R , абсолютно интегрируема на R и имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(y)|^2 dy,$$

где $\hat{f}(y) = F[f]$, $\tilde{f}(y) = F^{-1}[f]$.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, указать промежутки, в которых сумма ряда Фурье равна функции $f(x)$, и найти сумму ряда в указанной точке x_0 (4–11).

$$4. f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad x_0 = \pi.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0; \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \pi/4, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -\pi/4, & -\pi \leq x < 0; \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -a, & -\pi \leq x < 0; \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

3 семестр:

$$1. \text{ Изменить порядок интегрирования. } \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx.$$

2. Вычислить.

$$1) \iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

$$2) \iint_D ye^{xy/2} dx dy; D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 2, x = 4.$$

$$3) \iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz; V \begin{cases} x = 0, y = 1, y = x, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

$$4) \iiint_V x dx dy dz; V: y = 10x, y = 0, x = 1, z = xy, z = 0.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$1) y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4. \quad 2) y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

4. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ -поверхностная

плотность. Найти массу пластинки: 1) $D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0); \mu = 7x^2 + y.$

$$2) D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1; \mu = y^2.$$

5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$1) y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2. \quad 2) x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{5}{4} - x^2, z = 0.$$

$$3) y = 5x^2 + 2, y = 7, z = 3y^2 - 7x^2 - 2, z = 3y^2 - 7x^2 - 5. \quad 4) z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \frac{9z}{2} = x^2 + y^2.$$

$$5) z = 2 - 12(x^2 + y^2), z = 24x + 2.$$

$$6) 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, -x \leq y \leq 0.$$

6. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ -плотность. Найти массу

$$\text{тела. } 64(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0, z = 0 (y \geq 0, z \geq 0), \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}.$$

Приложение 2
к программе дисциплины «Математический анализ»
Типовые контрольные работы

1 семестр:

Контрольная работа №1: Производные

Вариант 1

1. Найти y' : $y = (\sqrt{1+3^x})^{\ln^2 x}$.

2. Найти $y_{x^3}^{(3)}$: $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = a \operatorname{sh} t \end{cases}$

3. Найти y''_{x^2} : $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

4. Найти $d^3 y$: $y = x e^{-x}$

5. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

Вариант 2

1. Найти y' : $y = \frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2x} - 1}$

2. Найти y''_{x^2} : $\begin{cases} x = \ln \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$

3. Найти y''_{x^2} в точке (0,1): $e^y + xy = e$

4. Найти $d^2 y$: $y = x^x$

5. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$

Контрольная работа №2: Неопределенные интегралы

Вариант 1

1. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2}$ 2. $\int \ln^2 x dx$

3. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ 4. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

5. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$

Вариант 2

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 2. $\int (x^2 + x) \sin x dx$

3. $\int \sin^4 x dx$ 4. $\int \frac{dx}{\sin x(1 + \cos x)}$

5. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

2 семестр:

Контрольная работа №1: Определенные интегралы

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $x^2 + y^2 = 8$, $2y = x^2$, $y \geq 0$.

2. Вычислить длину дуги кривой:
 $y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2x} - 1}$, $0 \leq x \leq 1$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
 $x^4 + y^4 = a^2 xy$.

4. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг полярного луча кривой, заданной в полярных координатах: $r = a(1 + \cos \varphi)$.

5. Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = x^2 + y^2$.

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x - 1, y^2 = x + 1.$$

2. Вычислить длину дуги кривой:

$$y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах: $r^2 = a^2 \cos 4\varphi$.

4. Вычислить площадь поверхности, образованной при вращении кривой, заданной параметрически вокруг оси Oy :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

5. Вычислить объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = x(x - 3)$, $y = x$ вокруг оси Ox .

Контрольная работа №2: Ряды

Вариант 1

Исследовать на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin \frac{n+1}{n^3-2}$

4) Найти область сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$

5) Разложить в ряд Тейлора по степеням x : $\ln(x^2 + 3x + 2)$

6) Найти сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}$

7) Исследовать сходимость (абсолютную и условную):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2+3} \cos n.$$

Вариант 2

Исследовать на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(3n+2)}\right)^n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$

4) Найти область сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(3n+1)4^n}$

5) Разложить в ряд Тейлора по степеням x : $x\sqrt[3]{27-2x}$

6) Найти сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

7) Исследовать сходимость (абсолютную и условную):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}.$$

Контрольная работа №3: Функции многих переменных

Вариант 1

1. Найти в точке $M(1; 0)$ первый и второй дифференциал функции z , если $z = \operatorname{arctg}(x^2 - 2y)$.

2. Найти вторую производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ от функции $z(x, y)$, которая определяется уравнением:

$$f(x, x + y, x + y + z) = 0 \quad (f - \text{дважды дифференцируемая функция}).$$

3. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0, \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v \quad (m - \text{постоянная}).$$

4. Найти точки условного экстремума функции: $u = x^2 + y^2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1; 1; 2)$.

Вариант 2

1. Найти второй дифференциал функции $f = y \sin \frac{y}{x}$ в точке $(2, \pi)$.

2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если функция $z(x, y)$ определяется уравнением $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$, где f – дважды дифференцируемая функция.

3. Преобразовать уравнение, приняв y за функцию, а $u = x + z$, $v = y - z$ за новые независимые переменные: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$.

4. Найти точки условного экстремума функции $z = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ при заданных условиях связи: $x + y + z = 13$.

5. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M_0(1; 1; 1)$ к кривой $C: y = x, z = x^2$.

3 семестр:

Контрольная работа №1: Кратные интегралы

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x, y) dy$
2. Вычислить: $\iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz$, $V : z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.
3. Найти площадь плоской области: $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.
4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$
5. Расставить пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq R/3, y \geq 0$.

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$
2. Вычислить: $\iiint_V (x + y) dx dy dz$, $V : y = x, y = x^2, z = x + y, z = 0$.
3. Найти площадь плоской области: $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.
4. Найти координаты центра тяжести однородного тела: $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^2 + y^2 \leq 2z$
5. Расставить пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az, x^2 + y^2 \leq 3z^2$.

Контрольная работа №2: Поверхностные интегралы:

Вариант 1

1. Найти площадь части поверхности $2z = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.
2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой C с помощью формулы Стокса:

$$\oint_C y dx + (1 - x) dy - z dz,$$

где C есть кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 4, z > 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки если смотреть с положительной стороны оси z .

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_C xy dl$, где C – четверть окружности $x^2 + y^2 = b^2$, лежащая в первом квадранте.
4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_C (2 - y) dx + x dy$, где $C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 < t < 2\pi$.

Вариант 2

1. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.
2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой C с помощью формулы Стокса:

$$\oint_C xy dx + yz dy + xz dz,$$

где C есть кривая $2x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 4, z > 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки если смотреть с положительной стороны оси z .

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$, где AB – отрезок прямой между точками $A(0, \pi)$ и $B(\pi, 0)$.
4. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) dx$, где $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 < t < 2\pi$.