УДК 517.958

Харасова Л.С., старший преподаватель, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С ШАРНИРНО ОПЕРТЫМИ КРАЯМИ

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости геометрически нелинейной задачи равновесия для пологих упругих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями. Метод исследования заключается в сведении исходной задачи к одному нелинейному операторному уравнению, разрешимость которого устанавливается с помощью принципа сжатых отображений. Основу метода составляют интегральные представления для перемещений, которые строятся с привлечением общих решений неоднородного уравнения Коши-Римана.

Ключевые слова: уравнения равновесия, краевая задача, система нелинейных дифференциальных уравнений, интегральные представления, теорема существования.

В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} T^{i\lambda}_{\alpha^\lambda} + R^i = 0, i = 1,2, \\ T^{\lambda 3}_{\alpha^\lambda} + k_\lambda T^{\lambda\lambda} + \left(T^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\mu}\right)_{\alpha^\lambda} + R^3 = 0, \\ M^{i\lambda}_{\alpha^\lambda} - T^{i3} + L^i = 0, i = 1,2 \end{gathered} \tag{1}$$

при условиях

$$w_2 = w_3 = 0, \tag{2}$$

$$T^{11}\, d\alpha^2/ds - T^{12}\, d\alpha^1/ds = P^1(s), \tag{3}$$

$$M^{j1}\, d\alpha^2/ds - M^{j2}\, d\alpha^1/ds = N^j(s), j = 1,2 \tag{4}$$

на её границе Г.

В (1)-(4) приняты следующие обозначения:

$$T^{ij} \equiv T^{ij}(a) = D_0^{ijkn}\gamma_{kn}^0, M^{ij} \equiv M^{ij}(a) = D_2^{ijkn}\gamma_{kn}^1, D_m^{ijkn} = \int_{-h/2}^{h/2} B^{ijkn}\left(\alpha^3\right)^m d\alpha^3;$$

$$B^{1111} = B^{2222} = E/\left(1-\mu^2\right), B^{1122} = \mu E/\left(1-\mu^2\right), B^{1212} = E/\left(2(1+\mu)\right),$$

$B^{1313} = B^{2323} = Ek^2/\left(2(1+\mu)\right);$ остальные $B^{ijkn} = 0;$ $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$,

$\alpha^j = \alpha^j(s)(j = 1,2)$ - уравнение кривой Г, s - длина дуги Г;

$$\gamma_{jj}^0 = w_{j\alpha^j} - k_j w_3 + w_{3\alpha^j}^2/2,\ j = 1,2, \quad \gamma_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2},$$

$$\gamma_{jj}^1 = \psi_{j\alpha^j},\ j = 1,2, \qquad \gamma_{12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1},$$

$$\gamma_{j3}^0 = w_{3\alpha^j} + \psi_j,\ j = 1,2, \qquad \gamma_{33}^0 = \gamma_{k3}^1, k = \overline{1,3}.$$

Система (1) совместно с граничными условиями (2) - (4) описывает состояние равновесия упругой пологой изотропной однородной оболочки с шарнирно опертыми краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко [1, с. 168-170, 269]. При этом: T^{ij} - усилия, M^{ij} - моменты; $\gamma_{ij}^k(i,j = \overline{1,3}, k = 0,1)$ – компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, $w_i\ (i = 1,2)$ и w_3 - тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0, $\psi_i(i = 1,2)$ - углы поворота нормальных сечений, a - вектор обобщенных перемещений; $R^i\left(i = \overline{1,3}\right), L^k, N^k\ (k = 1,2), P^1$ - компоненты внешних сил, действующих на оболочку; $\mu = const$ - коэффициент Пуассона, $E = const$ - модуль Юнга, $k_1, k_2 = const$ - главные кривизны, $k^2 = const$ - коэффициент сдвига, $h = const$ - толщина оболочки; α^1, α^2 - декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω, гомеоморфной S_0.

Задача А. *Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2)- (4).*

Краевую задачу А будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия: (а) внешние силы $R^i\left(i = \overline{1,3}\right), L^k\ (k = 1,2) \in L_p(\Omega)$, $N^k\ (k = 1,2), P^1 \in C_\beta(\Gamma)$; здесь и далее везде: $p > 2, 0 < \beta < 1$; (б) Ω – единичный круг с центром в начале координат.

В перемещениях уравнения равновесия (1) примут вид:

$$
\begin{gathered}
w_{1\alpha^1\alpha^1}+\mu_1 w_{1\alpha^2\alpha^2}+\mu_2 w_{2\alpha^1\alpha^2}=f_1,\\
\mu_1 w_{2\alpha^1\alpha^1}+w_{2\alpha^2\alpha^2}+\mu_2 w_{1\alpha^1\alpha^2}=f_2,\\
k^2\mu_1\left(w_{3\alpha^1\alpha^1}+w_{3\alpha^2\alpha^2}+\psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2}\right)+k_3 w_{1\alpha^1}+k_4 w_{2\alpha^2}-k_5 w_3+\\
+k_3 w_{3\alpha^1}^2/2+k_4 w_{3\alpha^2}^2/2+\beta_2\left[\left(T^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda}\right)_{\alpha^\mu}+R^3\right]=0\\
\psi_{1\alpha^1\alpha^1}+\mu_1\psi_{1\alpha^2\alpha^2}+\mu_2\psi_{2\alpha^1\alpha^2}=g_1+k_0\psi_1,\\
\mu_1\psi_{2\alpha^1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2\alpha^2}+\mu_2\psi_{1\alpha^1\alpha^2}=g_2+k_0\psi_2,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

при этом граничные условия (3), (4) преобразуются соответственно к виду

$$
\left(w_{1\alpha^1}+\mu w_{2\alpha^2}\right)(t)\,d\alpha^2/ds-\mu_1\left(w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}\right)(t)\,d\alpha^1/ds=\varphi_1(w_3)(t), \tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\psi_{1\alpha^1}+\mu\psi_{2\alpha^2}\right)(t)\,d\alpha^2/ds-\mu_1\left(\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1}\right)(t)\,d\alpha^1/ds=\tilde{\varphi}_1(w_3)(t),\\
\mu_1\left(\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1}\right)(t)\,d\alpha^2/ds-\left(\mu\psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2}\right)(t)\,d\alpha^1/ds=\tilde{\varphi}_2(w_3)(t),
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где

$$
\begin{gathered}
f_1\equiv f_1(w_3)=k_3 w_{3\alpha^1}-w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^1\alpha^1}-\mu_2 w_{3\alpha^2}w_{3\alpha^1\alpha^2}-\mu_1 w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2\alpha^2}-\beta_2 R^1,\\
f_2\equiv f_2(w_3)=k_4 w_{3\alpha^2}-w_{3\alpha^2}w_{3\alpha^2\alpha^2}-\mu_2 w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^1\alpha^2}-\mu_1 w_{3\alpha^2}w_{3\alpha^1\alpha^1}-\beta_2 R^2,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
g_j\equiv g_j(w_3)=k_0 w_{3\alpha^j}-\beta_1 L^j,\ j=1,2,\ \mu_1=(1-\mu)/2,\ \mu_2=(1+\mu)/2,\\
\varphi_1(w_3)(t)=\beta_2 P^1(s)-\left[w_{3\alpha^1}^2/2\,(t)+\mu\, w_{3\alpha^2}^2/2\,(t)\right]d\alpha^2/ds+\mu_1\, w_{3\alpha^1}(t)w_{3\alpha^2}(t)\,d\alpha^1/ds,\\
\tilde{\varphi}_j(w_3)(t)=\beta_1 N^j(s),\ j=1,2,\ k_3=k_1+\mu k_2,\ k_4=k_2+\mu k_1,\ k_5=k_1^2+k_2^2+2\mu k_1 k_2,\\
k_0=6k^2(1-\mu)/h^2,\ \beta_1=12\left(1-\mu^2\right)/\left(h^3E\right),\ \beta_2=\left(1-\mu^2\right)/(Eh).
\end{gathered}
$$

Определение. *Обобщенным решением задачи A назовем вектор обобщенных перемещений* $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)\in W_p^{(2)}(\Omega),\ p>2,$ *почти всюду удовлетворяющий системе (5) и поточечно граничным условиям (2), (6), (7) (*$W_p^{(2)}(\Omega)$*- пространство Соболева).*

Для исследования задачи A используется метод работ [3] - [5], в основе которого лежат интегральные представления для тангенциальных перемещений и углов поворота, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Для тангенциальных перемещений эти интегральные представления имеют вид:

$$
\omega_0=w_2+iw_1=\mathrm{H}_0 w_3+ic_0, \tag{9}
$$

где c_0-произвольная действительная постоянная;

$$H_0 w_3 \equiv H_0\left[f(w_3);\varphi_1(w_3)\right] = \Phi_2\left[f;\varphi_1\right](z) + iTd\left[\Phi_1\left[f;\varphi_1\right] + Tf\right](z), \qquad (10)$$

$$\Phi_2\left[f;\varphi_1\right](z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left\{\operatorname{Re}\left(iTd\left[\Phi_1\right]\right) + \widetilde{T}f(t)\right\}\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}, \Phi_1\left[f;\varphi_1\right](z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{h\left[f;\varphi_1\right]}{t-z}\frac{dt}{t}, z\in\Omega,$$

$$h\left[f;\varphi_1\right](t) = (1-\mu)\left[h_1 f(t) - 2\operatorname{Re}\left\{it\left(S_\Gamma \widetilde{T}f\right)^+(t)\right\}\right] + \varphi_1(w_3)(t),$$

$$h_j f(t) = (-1)^j \operatorname{Im}\left\{i^{2-j} tSd\left[Tf\right]^+(t)\right\} + (-1)^j \mu_3\, d\alpha^{3-j}/ds \operatorname{Re} Tf(t), j = 1,2,$$

$$Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta, Sf = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta, \zeta = \xi + i\eta,$$

$$S_\Gamma f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt, \widetilde{T}f(z) = \operatorname{Re}\left\{iTd\left[Tf\right](z)\right\}, f = (f_1 + f_2)/2,$$

$$d[g] \equiv d_1 g + d_2 \overline{g}, d_j = \left(\mu_1 + (-1)^j\right)/(4\mu_1), j = 1,2;$$

символ $\psi^+(t)$ означает предел функции $\psi(t)$ при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω.

При этом должно выполняться условие

$$\int_\Gamma P^1(s)ds + \iint_\Omega R^1 d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \qquad (11)$$

где $P^1(s), R^1(\alpha^1, \alpha^2)$ – компоненты внешней нагрузки.

Аналогично для углов поворота ψ_1, ψ_2 из последних двух уравнений в (5), удовлетворяющих на Г условиям (7), получаем

$$\psi = \psi_2 + i\psi_1 = (I - K_0)^{-1} H_0\left[g(w_3);\widetilde{l}(w_3)\right], \qquad (12)$$

$$\widetilde{\psi} = k_0(\psi_1 + i\psi_2)/2, g \equiv g(w_3) = (g_1 + ig_2)/2, g_j \equiv g_j(w_3);$$

$$\widetilde{l}(w_3) = \widetilde{l}_1(w_3) + i\widetilde{l}_2(w_3), \widetilde{l}_j(w_3)(t) = \widetilde{\varphi}_j(t)/(1-\mu) + h_j g, j = 1,2,$$

$K_0\psi = H_0\left[\widetilde{\psi}; h_j\widetilde{\psi}\right]$ - линейный вполне непрерывный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$; операторы $H_0\left[f, g\right]$, $h_j g$ определены в (10).

Теперь, если выражения тангенциальных перемещений и углов поворота из (9) и (12) и их производные первого порядка подставить в третье уравнение системы (5), то получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно прогиба

$$w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2} + K_1 w_3 + G_1 w_3 = 0, \qquad (13)$$

где $K_1 w_3$ – линейный вполне непрерывный оператор из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, $G_1 w_3$ – нелинейный ограниченный оператор из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$.

Итак, задача А свелась к задаче нахождения решения уравнения (13), удовлетворяющего условию $w_3 = 0$ на Г, которая в свою очередь эквивалентна решению уравнения

$$w_3 + Kw_3 + Gw_3 = 0, \tag{14}$$

$$Kw_3 = \iint_\Omega H(\varsigma, z) K_1 w_3(\varsigma) d\xi d\eta, Gw_3 = \iint_\Omega H(\varsigma, z) G_1 w_3(\varsigma) d\xi d\eta;$$

$H(\varsigma, z)$ - гармоническая функция Грина для единичного круга задачи Дирихле; Kw_3 – линейный вполне непрерывный, Gw_3 – нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$.

Можно показать, что уравнение

$$w_3 + Kw_3 = 0 \tag{15}$$

имеет лишь тривиальное решение в $W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$. Тогда существует обратный оператор $(I + K)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, с помощью которого уравнение (14) сведется к эквивалентному

$$w_3 + G_* w_3 = 0, \quad G_* w_3 = (I + K)^{-1} Gw_3, \tag{16}$$

где $G_* w_3$ – нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, причем для любых $w_3^j (j=1,2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, принадлежащих шару $\|w_3\|_{W_p^{(2)}} < r$, справедлива оценка

$$\left\|G_* w_3^1 - G_* w_3^2\right\|_{W_p^{(2)}} \le q_* \left\|w_3^1 - w_3^2\right\|_{W_p^{(2)}},$$

где постоянная q_* зависит от радиуса *r* шара и внешних сил.

Предположим, что радиус r шара и внешние силы, действующие на оболочку, таковы, что выполняются условия

$$q_* < 1, \quad \|G_*(0)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \tag{17}$$

Тогда к уравнению (16) можно применить принцип сжатых отображений [5, с. 146], согласно которому уравнение (16) в шаре $\|w_3\|_{W_p^{(2)}} < r$ имеет единственное решение $w_3 \in W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$.

Зная прогиб w_3, по формулам (9), (12) однозначно определяем w_2, w_3, ψ_1, ψ_2, а w_1 – с точностью до постоянного слагаемого c_0 .

Заметим, что условие (11) является не только достаточным, но и необходимым условием разрешимости задачи A. Действительно, если $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ есть обобщенное решение задачи A, то интегрируя по области Ω первое равенство в (1), привлекая для этого формулу интегрирования по частям, и учитывая при этом граничные условия (3), сразу приходим к условию (11).

Таким образом, доказана основная теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия (а), (б), неравенства (17). Тогда для разрешимости геометрически нелинейной задачи равновесия для пологих упругих оболочек типа Тимошенко при граничных условиях (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (11). В случае его выполнения задача имеет обобщенное решение* $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, *у которого компоненты* w_2, w_3, ψ_1, ψ_2 *определяются однозначно, а компонента* w_1 – *с точностью до постоянного слагаемого* c_0.

Литература

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.
2. Тимергалиев С.Н. Доказательство существования решения системы дифференциальных уравнений с частными производными нелинейной

теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференциальные уравнения. – 2012. - №48 (3). – с.450-454.

3. Тимергалиев С.Н. О существовании решений геометрически нелинейных задач для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Известия вузов. Математика. – 1014. - №3. – с.40-56.
4. Тимергалиев С.Н., Углов А.Н., Харасова Л.С. О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для пологих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями // Известия вузов. Математика. – 2015. - №5. – с.49-61.
5. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956.

Kharasova L.S., senior lecturer, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University

ON THE SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SHALLOW SHELL THEORY OF THE TIMOSHENKO TYPE WITH PIVOTALLY SUPPORTED EDGES.

Abstract. In the paper we investigate the solvability of a geometrically *nonlinear equilibrium problem for shallow elastic homogeneous Timoshenko-type shells with simply supported edges. Research method consists in reduction the original problem to one nonlinear operator equation. The solvability is established by the principle of contracting mappings. The method based on integral representations for displacements, which are built with the assistance of the general solutions of the nonhomogeneous equation of Cauchy-Riemann.*

Key word: equilibrium equations, boundary problem, system of nonlinear differential equations, integral images, existence theorem.