Казанский Государственный Университет
Механико-математический факультет
Учебно-методическое пособие

Публикуется по решению методической комиссии механико
-математического факультета от 04.03.2010

Материалы для подготовки к экзамену по математическому анализу
Механико-математический факультет
Задачи на доказательство. II семестр.

Составитель Б.А. Кац

Аннотация

Наибольшую трудность для студентов младших курсов по традиции представляет решение задач на доказательство, входящих в билеты экзамена по математическому анализа. Здесь представлен набор таких задач. Решения многих из них можно найти в указанной в конце данного пособия литературе. Однако настоятельно рекомендуется попробовать решить их самостоятельно, и лишь в случае неудачи воспользоваться этой литературой.

1.Если определенная на орезке $[a, b]$ функция монотонна, то она интегрируема (здесь и ниже речь идет об интеграле Римана). Доказать.

2. Привести пример интегрируемой функции с бесконечным множеством точек разрыва.

3. Если изменить значения интегрируемой функции в конечном числе точек, то вновь получится интегрируемая функция. Доказать.

4. Если изменить значения интегрируемой функции на счетном множестве точек, то вновь получится интегрируемая функция. Доказать.

5. Пусть функция $f(x)$ равна единице при иррациональном x и нулю при рациональном. Интегрируема ли эта функция?

6. Пусть функция $f(x)$ равна единице при иррациональном x, и $f(x) = p$ при x равном несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Интегрируема ли эта функция?

7. Интегрируема ли на отрезке $[0,1]$ функция $f(x) = \{x^{-1}\}$, где $\{x\} := x - [x]$ есть дробная часть числа x? Здесь мы полагаем $f(0) = 0$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ также интегрируема на этом отрезке. Доказать.

9. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ также интегрируема на этом отрезке. Доказать.

10. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ также интегрируема на этом отрезке. Доказать.

11. Если $f(x)$ есть положительная убывающая функция на луче $[a, +\infty)$ и сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то $f(x) = o(\frac{1}{x})$ при $x \to +\infty$. Доказать.

12. Если $f(x)$ есть непрерывная периодическая функция, то существует такое число C, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (\frac{f(x)-C}{x^p}dx$ сходится при любом $p > 0$. Доказать.

13. Если $f(x)$ есть непрерывная периодическая функция, то существует такое число C, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (f(x^p) - C)dx$ сходится при любом $p > 1$. Доказать.

14. Если функция $f(x)$ положительна и сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то нижний предел этой функции при $x \to +\infty$ равен нулю. Доказать.

15. Привести пример функции со сходящимся интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, у которой верхний и нижний пределы при $x \to +\infty$ не равны нулю.

16. Записать матрицу линейного отображения $A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, осуществляющего симметрию относительно одной из координатных осей.

17. Записать матрицу линейного отображения $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, осуществляющего проектирование на одну из координатных плоскостей.

18. Записать матрицу линейного отображения $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, действующего поформуле $A\mathbf{x} := [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ - постоянный вектор, $[\cdot, \cdot]$ - векторное произведение.

19. Привести пример функции двух переменных, определенной в окрестности точки 0 и имеющей в этой точке различные пределы по направлениям координатных осей.

20. Привести пример функции двух переменных, имеющей в точке 0 частные производные по обеим переменным, но не непрерывной в этой точке.

21. Функция $f(x)$ двух переменных непрерывна на ограниченном замкнутом множестве A, причем уравнение $f(x) = c$ имеет единственное решение на этом множестве. Доказать, что тогда c есть либо наибольшее, либо наименьшее значение $f(x)$ на A.

22. Записать касательное отображение для отображения $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, осуществляющего симметрию относительно одной из координатных осей.

23. Доказать, что норма в евклидовом пространстве не может быть дифференцируемой в точке 0.

24. Функция двух переменных $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом круге $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Доказать, что на окружности $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ она принимает каждое свое значение (за возможным исключением двух значений) не менее двух раз.

25. Пусть слагаемые положительного сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно убывают. Доказать, что тогда $a_n = o(\frac{1}{n})$.

26. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и предел $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ существует, то величина этого предела равна нулю. Доказать.

27. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ расходится.

28. Привести пример последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ расходится.

29. Если $f(x)$ – периодическая функция с целочмсленным периодом, то найдется число c такое, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)-c}{n}$ сходится.

30. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходящийся знакопеременный ряд, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ тоже сходится. Доказать.

Список литературы

[1] Зорич В. А., Математический анализ, ч. I. – М.: Наука, 1981.– 543 с.

[2] Никольский С. М., Математический анализ, т. 2. – М.: Наука, 1973. – 432 с.

[3] Шерстнев А. Н., Конспект лекций по математическому анализу. – Казань: Казанский государственный университет, 2005. – 373 с.

[4] Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

[5] И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий, Задачи и упражнения по математическому анализу, т.1,2. – М: Высшая школа, 2002. – 725 с.