ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 519.713.2

М.М. КАЦ

КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОЙ УПОРЯДОЧИВАЕМОСТИ ЧАСТИЧНОГО АВТОМАТА

В работе дается описание частичных автоматов без выхода, которые можно линейно упорядочить. Тем самым в указанном классе автоматов решается одна из задач, поставленных в [1]. Ранее решение этой задачи было известно только для автономных автоматов [2].

1. Введение

Главным объектом изучения в данной работе является *частичный автомат без выхода* (далее просто "автомат"), который определяется как тройка $\mathcal{A} = (S, X, \delta)$, где S и X — произвольные непустые множества (множество состояний и множество входных сигналов автомата), а $\delta \subseteq (S \times X) \times S$ — однозначное бинарное отношение между множествами $S \times X$ и S (частичная, в общем случае, функция переходов автомата). Автомат $\mathcal{A}$ называется *вполне определенным*, если $\mathrm{pr}_1 \delta = S \times X$; *конечным*, если множества S и X конечны; *автономным*, если множество X одноэлементно. Автономный автомат будем записывать в виде $\mathcal{A} = (S, \delta)$, рассматривая δ как частичное преобразование множества S ($\delta \subseteq S \times S$).

Пусть $\mathcal{A} = (S, X, \delta)$ — некоторый автомат. Для фиксированного входного сигнала $x \in X$ определим бинарное отношение $\delta_x := \{(s,t) \in S \times S : ((s,x),t) \in \delta\}$ (символ ":=" означает равенство по определению). Автономные автоматы $\mathcal{A}_x = (S, \delta_x)$, $x \in X$, будем называть [3] автономными компонентами автомата $\mathcal{A}$.

Заметим, что с алгебраической точки зрения автомат $\mathcal{A} = (S, X, \delta)$ можно рассматривать как частичную унарную алгебру с носителем S и совокупностью частичных унарных операций $\{\delta_x : x \in X\}$. Именно с этой точки зрения автоматы изучались в [4], а вполне определенные конечные автоматы — в [3], где имеется и дальнейшая библиография.

Известны различные "алгебраические" подходы к обобщению понятия "автомат" (см., напр., [5], с. 52–65; [6]–[13]). Здесь мы введем следующее понятие, важное для приложений.

Релятивизированным автоматом (коротко: $\mathcal{R}$-автоматом) будем называть тройку $\mathcal{A}_{\mathrm{rel}} = ((S, \mathcal{R}), X, \delta)$, где S, X, δ имеют тот же смысл, что и в определении автомата, а $\mathcal{R} = \{\rho_i : i \in I\}$ — набор отношений (произвольных арностей) на множестве S. Накладывая различные ограничения на релятив $(S, \mathcal{R})$ и функцию переходов δ, можно получать различные классы $\mathcal{R}$-автоматов. При $\mathcal{R} = \varnothing$ получаются (обычные) автоматы. Тенденция в абстрактной теории автоматов, состоящая в задании и изучении тех или иных классов релятивизированных автоматов, была подмечена В.М. Глушковым уже в начале 60-х годов ([14], с. 60).

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс $\mathcal{R}$-автоматов. Автомат $\mathcal{A} = (S, X, \delta)$ будем называть $\mathcal{K}$-релятивизируемым, если на множестве S его состояний можно задать структуру релятива, превращающую $\mathcal{A}$ в $\mathcal{R}$-автомат из класса $\mathcal{K}$.

Далее будем рассматривать только $\mathcal{R}$-автоматы вида $\mathcal{A}_\rho = ((S,\rho),X,\delta)$, где $\rho \subseteq S\times S$ — бинарное отношение на множестве S, удовлетворяющее условию стабильности

$$(\forall s_1,s_2\in S)(\forall x\in X)((s_1,s_2)\in\rho\bigcap(\mathrm{pr}_1\delta_x)^2 \Longrightarrow (\delta_x(s_1),\delta_x(s_2))\in\rho).$$

Таким образом определенный $\mathcal{R}$-автомат $\mathcal{A}_\rho$ будем называть ρ-стабильным автоматом. Если ρ — отношение эквивалентности, то автомат $\mathcal{A}_\rho$ можно рассматривать как (обычный) автомат, для которого зафиксирована некоторая его конгруэнция ρ ([3], с. 33). В случае, когда ρ является отношением толерантности, ρ-стабильные автоматы изучались, например, в [15], [16], а в случае, когда ρ — отношение порядка из некоторого класса, — в работах [9], [17]–[20] (в [9], [16], [18]–[20] рассматривались автоматы с выходом).

В соответствии с общим определением автомат $\mathcal{A}=(S,X,\delta)$ будем называть *линейно упорядочиваемым* (коротко: O-автоматом), если его можно превратить в ρ-стабильный автомат $\mathcal{A}_\rho = ((S,\rho),X,\delta)$, где ρ — отношение линейного порядка на множестве S. В этом случае автомат $\mathcal{A}_\rho$ будем называть линейно упорядоченным (л. у.) автоматом.

Вполне определенные автономные O-автоматы были описаны Г. Рубановичем в статье [2] (это описание легко переносится и на класс частичных автономных автоматов, см. утверждение 2 в п. 2 ниже). В [1] была поставлена задача изучения вполне определенных конечных O-автоматов, эта же задача для произвольных вполне определенных автоматов (в терминах унарных алгебр) упоминалась в обзоре [21]. Настоящая работа посвящена решению более общей задачи — характеризации (частичных) O-автоматов. Относительно полученного описания O-автоматов показано, что оно в известном смысле не допускает упрощения (см. утверждение п. 3).

2. Некоторые вспомогательные понятия и утверждения

Для непустого множества A через $P(A)$ обозначается совокупность всех его подмножеств.

Пусть S — произвольное непустое множество, $\mathrm{Bin}_S^{\mathrm{ar}}$ — совокупность всех антирефлексивных бинарных отношений на множестве S

$$\mathrm{Bin}_S^{\mathrm{ar}} := \{\rho\subseteq S\times S : \Delta_S\bigcap\rho=\varnothing\},$$

где $\Delta_S := \{(s,s) : s\in S\}$ — диагональ в множестве S. На множестве $P(\mathrm{Bin}_S^{\mathrm{ar}})$ введем три унарные операции $\mathbb{T}$, $\mathbb{G}$ и $\mathbb{S}$. Пусть $R\subseteq \mathrm{Bin}_S^{\mathrm{ar}}$, $R\neq\varnothing$.

а) Операцию $\mathbb{T}$ *поэлементного антирефлексивно-транзитивного замыкания* множества бинарных отношений определим равенствами

$$\mathbb{T}(R) := \bigcup\{\{\rho^*\} : \rho\in R\},\ \text{где } \rho^* := \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\rho^k\Big)\setminus\Delta_S,$$
$$\mathbb{T}(\varnothing) := \varnothing.$$

б) Операцию $\mathbb{G}$ *склеивания* множества бинарных отношений определим следующим образом. Рассмотрим граф $\Gamma(R)=(R,\eta)$, где $\eta\subseteq R\times R$, $(\rho_1,\rho_2)\in\eta \Longleftrightarrow \rho_1\bigcap\rho_2\neq\varnothing$. Пусть $\{\Gamma_i : i\in I\}$ — совокупность всех его компонент связности, $\Gamma_i=(R_i,\eta_i)$, $\bigcup\{R_i : i\in I\}=R$, $R_i\bigcap R_j=\varnothing$ при всех $i,j\in I$, $i\neq j$. Положим $\mathbb{G}(R) := \Big\{\bigcup_{\rho\in R_i}\rho : i\in I\Big\}$, $\mathbb{G}(\varnothing):=\varnothing$.

в) $\mathbb{S} := \mathbb{G}\circ\mathbb{T}$ (произведение пишем справа налево).

Множество $R\subseteq \mathrm{Bin}_S^{\mathrm{ar}}$ будем называть *полной ортогональной симметричной* (П.О.С.) *системой* бинарных отношений, если R удовлетворяет следующим условиям:

1) $\bigcup\{\rho : \rho\in R\} = S^2\setminus\Delta_S$ (полнота);
2) для любых $\rho,\sigma\in R$ если $\rho\neq\sigma$, то $\rho\bigcap\sigma=\varnothing$ (ортогональность);
3) для любого $\rho\in R$ имеем $\rho^{-1}\in R$ (симметричность).

П.О.С.-системы будем часто записывать как $R = \{\rho_i, \rho_i^{-1}\}_{i\in I}$.

П.О.С.-система $R \subset \mathrm{Bin}_S^{\mathrm{ar}}$ называется *правильной*, если каждое отношение $\rho \in R$ является строгим порядком на множестве S. Правильная П.О.С.-система $R = \{\rho_i, \rho_i^{-1}\}_{i\in I}$ по определению *допускает согласование*, если существует система чисел $\{\varepsilon_i : i \in I\}$, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ при всех $i \in I$, такая, что отношение $\bigcup\{\rho_i^{\varepsilon_i} : i \in I\}$ есть строгий линейный порядок на множестве S.

Пусть $R \subset \mathrm{Bin}_S^{\mathrm{ar}}$ есть П.О.С.-система бинарных отношений. Обозначим через $\pi_n(R)$, $n \in \mathbb{N}$, эквивалентность на множестве $S^2 \setminus \Delta_S$, соответствующую разбиению $\mathbb{S}^n(R)$ этого множества. Очевидно, $\pi_1 \subseteq \pi_2 \subseteq \cdots$. Учитывая полноту решетки всех эквивалентностей на множестве $S^2 \setminus \Delta_S$, заключаем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{S}^n(R) := (S^2 \setminus \Delta_S)/\pi(R)$, где $\pi(R) := \sup\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Из определений следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{S}^n(R)$ есть П.О.С.-система транзитивных бинарных отношений на множестве S.

Приведем теперь несколько определений и утверждений, касающихся автоматов.

Граф автомата $\mathcal{A} = (S, X, \delta)$ — это [1] орграф $\overrightarrow{G}(\mathcal{A}) = (S, \alpha)$, где $\alpha := \{(s,t) \in S \times S : (\exists x \in X)((s,t) \in \delta_x)\}$.

Квадратом автомата $\mathcal{A} = (S, X, \delta)$ называется автомат $\mathcal{A}^2 = (S^2, X, \widehat{\delta})$, где для каждого $x \in X$

$$\widehat{\delta}_x := \{((s_1,t_1),(s_2,t_2)) \in S^2 \times S^2 : (s_1,s_2) \in \delta_x \& (t_1,t_2) \in \delta_x\}.$$

Граф автомата $\mathcal{A}^2$ будем обозначать через $\overrightarrow{G}(\mathcal{A}^2) = (S^2, \beta)$.

Приведенным графом автомата $\mathcal{A}^2$ будем называть неориентированный граф $\widetilde{G}(\mathcal{A}^2) = (S^2 \setminus \Delta_S, \widetilde{\beta})$, где $\widetilde{\beta} := ((\beta \bigcup \beta^{-1}) \setminus \Delta_{S^2}) \bigcap (S^2 \setminus \Delta_S)^2$, т.е. подграф графа $(S^2, (\beta \bigcup \beta^{-1}) \setminus \Delta_{S^2})$, порожденный множеством вершин $S^2 \setminus \Delta_S$.

Пусть $\{\widetilde{G}_i : i \in I\}$ — совокупность всех компонент связности графа $\widetilde{G}(\mathcal{A}^2)$. Будем отождествлять символ $\widetilde{G}_i$, $i \in I$, с множеством вершин графа $\widetilde{G}_i$. Тогда $\mathcal{G} = \{\widetilde{G}_i : i \in I\}$ есть П.О.С.-система бинарных отношений на множестве S.

Определителем автомата $\mathcal{A}$ назовем П.О.С.-систему транзитивных бинарных отношений $\det \mathcal{A} := \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{S}^n(\mathcal{G})$.

Автомат $\mathcal{A}$ будем называть *правильным*, если $\det \mathcal{A}$ — правильная П.О.С.-система.

Автономный автомат $\mathcal{A} = (S, \delta)$ называется *ациклическим*, если его граф не содержит отличных от “петель” (ориентированных) контуров.

Утверждение 1 ([2]). *Вполне определенный автономный автомат $\mathcal{A}$ является O-автоматом тогда и только тогда, когда он ациклический.*

Утверждение 2. *Автономный автомат $\mathcal{A} = (S, \delta)$ является O-автоматом тогда и только тогда, когда он ациклический.*

Доказательство. Необходимость. Пусть автономный автомат $\mathcal{A}$ не является ациклическим. Тогда у него есть подавтомат $\mathcal{A}'$, граф которого представляет собой контур с числом вершин не менее двух. По утверждению 1 автомат $\mathcal{A}'$ не является O-автоматом. Следовательно, этим свойством не обладает и автомат $\mathcal{A}$.

Достаточность. Рассмотрим вполне определенный автомат $\mathcal{A}' = (S, \delta')$, где $\delta'(s) := \delta(s)$, если $s \in \mathrm{pr}_1\delta$, и $\delta'(s) = s$, если $s \notin \mathrm{pr}_1\delta$. Автомат $\mathcal{A}'$ будет вполне определенным ациклическим, следовательно, он будет и O-автоматом. Но любой линейный порядок на множестве S, удовлетворяющий условию стабильности в автомате $\mathcal{A}'$, удовлетворяет этому условию и в автомате $\mathcal{A}$. Таким образом, автомат $\mathcal{A}$ является O-автоматом. $\square$

Автомат $\mathcal{A}$ назовем *графически связным* (коротко: Г-связным), если его граф связен. Очевидно, что произвольный автомат $\mathcal{A}$ является O-автоматом тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждый его максимальный (по включению) Г-связный подавтомат. Это замечание и утверждение 2 дают нам право в следующем пункте под "автоматом" понимать произвольный Г-связный автомат, у которого каждая автономная компонента является ациклическим автономным автоматом.

3. Основная теорема

Теорема. *Для автомата $\mathcal{A} = (S, X, \delta)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *автомат $\mathcal{A}$ является O-автоматом;*
2) *автомат $\mathcal{A}$ является правильным и его определитель $\det \mathcal{A}$ допускает согласование.*

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть S — произвольное непустое множество, $\omega \subseteq S \times S$ — строгий линейный порядок на множестве S, R — П.О.С.-система бинарных отношений на множестве S. Тогда если система R обладает свойством*

$$\text{для любого отношения } \rho \in R \quad \text{либо} \quad \rho \subseteq \omega, \quad \text{либо} \quad \rho \subseteq \omega^{-1}, \tag{$*$}$$

то этим же свойством обладает П.О.С.-система $\mathbb{S}(R)$.

Доказательство. Заметим, во-первых, что если $\rho \subseteq S \times S$ и $\rho \subseteq \omega$, то $\rho^{\mathrm{tr}} \subseteq \omega$, где ρ^{tr} — транзитивное замыкание отношения ρ.

Пусть $\eta \in \mathbb{S}(R)$ и имеют место включения $\sigma \subseteq \eta$, $\tau \subseteq \eta$, где σ, τ — произвольные отношения из R. Лемма будет доказана, если мы покажем, что либо $\sigma \subseteq \omega$ и $\tau \subseteq \omega$, либо $\sigma \subseteq \omega^{-1}$ и $\tau \subseteq \omega^{-1}$. Из включений $\sigma \subseteq \eta$, $\tau \subseteq \eta$ с учетом определения операций $\mathbb{T}$ и $\mathbb{G}$ следует, что существуют отношения $\theta_1 = \sigma$, $\theta_2, \ldots, \theta_{k-1}$, $\theta_k = \tau$ $(k \geq 2)$ из R такие, что $\theta_i^{\mathrm{tr}} \bigcap \theta_{i+1}^{\mathrm{tr}} \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq k-1$. По условию $(*)$ для каждого i, $1 \leq i \leq k-1$, либо $\theta_i \subseteq \omega$, либо $\theta_i \subseteq \omega^{-1}$. Пусть, к примеру, $\sigma = \theta_1 \subseteq \omega$, тогда $\sigma^{\mathrm{tr}} = \theta_1^{\mathrm{tr}} \subseteq \omega$. Но тогда и $\theta_2 \subseteq \omega$ (действительно, если предположить, что $\theta_2 \subseteq \omega^{-1}$, то будет $\theta_2^{\mathrm{tr}} \subseteq \omega^{-1}$ и $\theta_1^{\mathrm{tr}} \bigcap \theta_2^{\mathrm{tr}} = \varnothing$ — противоречие). Далее аналогично показываем, что $\theta_3 \subseteq \omega, \ldots, \theta_{k-1} \subseteq \omega$, $\theta_k = \tau \subseteq \omega$. Случай $\sigma \subseteq \omega^{-1}$ рассматривается аналогично. □

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A} = ((S, \omega), X, \delta)$ — л. у. автомат. Тогда его определитель $\det \mathcal{A}$ обладает свойством $(*)$ из формулировки леммы 1.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathcal{G} = \{\widetilde{G}_j : i \in J\}$ — разбиение множества $S^2 \setminus \Delta_S$, индуцируемое компонентами связности приведенного графа $\widetilde{G}(\mathcal{A}^2)$ автомата $\mathcal{A}^2$.

Покажем, что если $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2)\} \subseteq \widetilde{G}_j$ при некотором $j \in J$, то либо $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2)\} \subseteq \omega$, либо $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2)\} \subseteq \omega^{-1}$ (здесь $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$, $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$). Доказательство проведем индукцией по длине l кратчайшей цепи, соединяющей вершины (s_1, t_1) и (s_2, t_2) в графе $\widetilde{G}(\mathcal{A}^2)$.

Базис индукции. Если $l = 1$, то эти вершины связаны ребром. Это означает, что существует $x \in X$ такой, что либо $\delta_x(s_1) = s_2$ и $\delta_x(t_1) = t_2$, либо $\delta_x(s_2) = s_1$ и $\delta_x(t_2) = t_1$. Так как ω — линейный порядок, то либо $(s_1, t_1) \in \omega$, либо $(s_1, t_1) \in \omega^{-1}$. Пусть, например, $(s_1, t_1) \in \omega$. Если $\delta_x(s_1) = s_2$ и $\delta_x(t_1) = t_2$, то по условию стабильности будет $(s_2, t_2) \in \omega$. Если $\delta_x(s_2) = s_1$ и $\delta_x(t_2) = t_1$, то снова заключаем, что $(s_2, t_2) \in \omega$ (если предположить, что $(s_2, t_2) \notin \omega$, то, используя линейность порядка ω, получаем, что $(t_2, s_2) \in \omega$, откуда $(t_1, s_1) \in \omega$ и $(s_1, t_1) \notin \omega$ — противоречие). Таким образом, $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2)\} \subseteq \omega$. Если предположить $(s_1, t_1) \in \omega^{-1}$, то получим, что $\{(s_1, t_1), (s_2, t_2)\} \subseteq \omega^{-1}$.

Шаг индукции. Пусть наше утверждение верно для цепи длины $l \geq 1$. Если теперь предположить, что вершины (s_1, t_1) и (s_2, t_2) связаны цепью длины $l + 1$, то требуемое утверждение легко получается, если "отделить" вершину (s_2, t_2) от этой цепи. Оставшаяся цепь, концами которой являются вершина (s_1,t_1) и некоторая вершина (s_3,t_3) (отличная от первых двух), имеет длину l и к ней применимо предположение индукции. Пусть, например, $\{(s_1,t_1),(s_3,t_3)\} \subseteq \omega$. Используя базис индукции, заключаем, что $\{(s_3,t_3),(s_2,t_2)\} \subseteq \omega$. Таким образом, $\{(s_1,t_1),(s_2,t_2)\} \subseteq \omega$. Рассуждения для случая $\{(s_1,t_1),(s_3,t_3)\} \subseteq \omega^{-1}$ проводятся аналогично.

2) В п. 1 мы показали, что П.О.С.-система $\mathcal{G} = \{\widetilde{G}_j : j \in J\}$ обладает свойством $(*)$. Отсюда с учетом леммы 1 заключаем, что при каждом $k \geq 1$ П.О.С.-система $\mathbb{S}^k(\mathcal{G})$ также будет обладать свойством $(*)$.

3) Осталось показать, что свойством $(*)$ обладает $\det\mathcal{A}$. Пусть $\rho \in \det\mathcal{A}$, $(s,t) \in \rho$, $(s',t') \in \rho$, $(s,t) \neq (s',t')$. Нужно показать, что либо $(s,t) \in \omega$ и $(s',t') \in \omega$, либо $(s,t) \in \omega^{-1}$ и $(s',t') \in \omega^{-1}$. Учитывая определение определителя автомата, заключаем, что существует последовательность попарно различных пар $(s_1,t_1) = (s,t)$, $(s_2,t_2), \ldots, (s_{k-1},t_{k-1})$, $(s_k,t_k) = (s',t')$ из ρ такая, что при каждом i, $2 \leq i \leq k-1$, $((s_i,t_i),(s_{i+1},t_{i+1})) \in \pi_{m_i}$, где π_{m_i} — эквивалентность на множестве $S^2 \setminus \Delta_S$, соответствующая разбиению $\mathbb{S}^{m_i}(R)$ этого множества при некотором $m_i \in \mathbb{N}$. Предположим теперь, что $(s_1,t_1) = (s,t) \in \omega$. Учитывая п. 2) и включение $((s_1,t_1),(s_2,t_2)) \in \pi_{m_2}$, заключаем, что $(s_2,t_2) \in \omega$. Продолжая, получим $(s',t') = (s_k,t_k) \in \omega$. Случай $(s,t) \in \omega^{-1}$ рассматривается аналогично. $\square$

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть автомат $\mathcal{A} = (S,X,\delta)$ является O-автоматом и $\omega \subset S \times S$ — некоторый линейный порядок, удовлетворяющий условию стабильности, $\det\mathcal{A} = \{\rho_i, \rho_i^{-1}\}_{i\in I}$. Из леммы 2 следует, что автомат $\mathcal{A}$ правильный и существует набор чисел $\varepsilon_i \in \{1,-1\}$, $i \in I$, таких, что $\rho_i^{\varepsilon_i} \subset \omega$, $i \in I$. Из этих включений следует, что $\bigcup\{\rho_i^{\varepsilon_i} : i \in I\} \subset \omega$. Так как определитель автомата $\mathcal{A}$ является П.О.С.-системой бинарных отношений на множестве S, то для любых различных $s_1, s_2 \in S$ будет либо $(s_1,s_2) \in \bigcup\{\rho_i^{\varepsilon_i} : i \in I\}$, либо $(s_2,s_1) \in \bigcup\{\rho_i^{\varepsilon_i} : i \in I\}$. Учитывая, что ω — линейный порядок на множестве S, заключаем $\bigcup\{\rho_i^{\varepsilon_i} : i \in I\} = \omega \setminus \Delta_S$. Последнее равенство и означает, что определитель $\det\mathcal{A}$ автомата $\mathcal{A}$ допускает согласование.

Достаточность. Пусть определитель $\det\mathcal{A} = \{\rho_i, \rho_i^{-1}\}_{i\in I}$ правильного автомата $\mathcal{A} = (S,X,\delta)$ допускает согласование, т. е. при некоторых $\varepsilon_i \in \{1,-1\}$, $i \in I$, отношение $\omega = \bigcup\{\rho_i^{\varepsilon_i} : i \in I\}$ есть строгий линейный порядок на множестве S. Так как автомат $\mathcal{A}$ правильный, то каждое из отношений ρ_i — строгий порядок на множестве S. Покажем, что линейный порядок $\omega \bigcup \Delta_S$ будет удовлетворять условию стабильности. Действительно, пусть $(s_1,s_2) \in \omega$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $(s_1,s_2) \in \rho_i^{\varepsilon_i}$. Из определения $\det\mathcal{A}$ сразу следует, что $(\delta_x(s_1),\delta_x(s_2)) \in \rho_i^{\varepsilon_i} \bigcup \Delta_S$ при каждом $x \in X$ (мы воспользовались тем фактом, что пары (s_1,s_2) и $(\delta_x(s_1),\delta_x(s_2))$, если $\delta_x(s_1) \neq \delta_x(s_2)$, принадлежат одной компоненте связности приведенного графа $\widetilde{G}(\mathcal{A}^2)$ автомата $\mathcal{A}^2$, множество вершин которой целиком содержится в $\rho_i^{\varepsilon_i}$). Таким образом, при каждом $x \in X$ будет $(\delta_x(s_1),\delta_x(s_2)) \in \omega \bigcup \Delta_S$. Из сказанного следует, что $\mathcal{A}_\omega = ((S,\omega),X,\delta)$ — л. у. автомат, т. е. автомат $\mathcal{A}$ является O-автоматом. $\square$

Следующее утверждение показывает, что ограничение, накладываемое на определитель автомата в формулировке основной теоремы, является существенным.

Утверждение. *Существуют правильные автоматы, которые не являются O-автоматами.*

Доказательство. Рассмотрим автомат $\mathcal{A} = (S,X,\delta)$, где $S = \{1,2,3,4\}$, $X = \{x_1,x_2,x_3\}$, $\delta_{x_1} = \{(1,3),(2,4)\}$, $\delta_{x_2} = \{(1,4),(3,2)\}$, $\delta_{x_3} = \{(1,2),(4,3)\}$. Легко видеть, что $\det\mathcal{A} = \{\rho_i, \rho_i^{-1} : 1 \leq i \leq 3\}$, где $\rho_1 = \{(1,2),(3,4)\}$, $\rho_2 = \{(1,3),(4,2)\}$, $\rho_3 = \{(1,4),(2,3)\}$. Каждое из отношений ρ_i, $1 \leq i \leq 3$, — строгий порядок на множестве S, так что автомат $\mathcal{A}$ правильный. Покажем, что $\det\mathcal{A}$ не допускает согласования. Для этого, очевидно, достаточно показать, что каждое из отношений $\omega_1 = \rho_1 \bigcup \rho_2 \bigcup \rho_3$, $\omega_2 = \rho_1 \bigcup \rho_2^{-1} \bigcup \rho_3$, $\omega_3 = \rho_1 \bigcup \rho_2 \bigcup \rho_3^{-1}$, $\omega_4 = \rho_1 \bigcup \rho_2^{-1} \bigcup \rho_3^{-1}$ не является строгим порядком на множестве S. Действительно,

$$\omega_1 = \{(1,2),(3,4),(1,3),(4,2),(1,4),(2,3)\},$$
$$\omega_2 = \{(1,2),(3,4),(3,1),(2,4),(1,4),(2,3)\},$$
$$\omega_3 = \{(1,2),(3,4),(1,3),(4,2),(4,1),(3,2)\},$$
$$\omega_4 = \{(1,2),(3,4),(3,1),(2,4),(4,1),(3,2)\}.$$

Таким образом, $\det \mathcal{A}$ не допускает согласования и, следовательно, автомат $\mathcal{A}$ не является O-автоматом. $\square$

Автор глубоко благодарен В.Н. Салию за предложенную задачу и большое внимание к этой работе.

Литература

1. Богомолов А.М., Салий В.Н. *Несколько задач из алгебры дискретных систем* // Методы и сист. технич. диагностики. – Саратов, 1993. - Вып. 18. – С. 32–34.
2. Рубанович Г. *Упорядоченные унарные алгебры* // Учен. зап. Тартуск. ун-та. – 1971. – Вып. 281. – С. 34–48.
3. Салий В.Н. *Универсальная алгебра и автоматы.* – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1988. – 70 с.
4. Соркин Ю.И. *Теория определяющих соотношений для автоматов* // Пробл. кибернетики. – 1963. – Вып. 9. – С. 45–69.
5. Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. *Элементы алгебраической теории автоматов.* – М.: Высш. школа, 1994. – 191 с.
6. Скорняков Л.А. *Об алгебраических автоматах* // Кибернетика. – 1974. – № 2. – С. 31–34.
7. Болотов А.А. *Автоматы над алгебрами и задача о неотличимости состояний* // Логико-алгебраич. конструкции. – Калинин, 1987. – С. 12–16.
8. Торбасова В.П. *Машины над частичными алгебраическими системами. Задачи реализации* // Вопр. мех. и процессов упр. – 1984. – № 7. – С. 150–155.
9. Агибалов Г.П. *Дискретные автоматы на полурешетках.* – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1993. – 227 с.
10. Muir A., Warner M.W. *Lattice valued relations and automata* // Discr. Appl. Math. – 1984. – V. 7. – № 1. – P. 65–78.
11. Салий В.Н. *Алгебраические конструкции, связанные с булевозначными автоматами* // Методы и сист. технич. диагностики. – Саратов, 1985. – Вып. 4. – С. 12–20.
12. Салий В.Н. *К представлению языков в квазибулевых автоматах* // Методы и сист. технич. диагностики. – Саратов, 1993. – Вып. 18. – С. 153–155.
13. Чирков М.К. *Частичные автоматы.* – Изд-во Ленинградск. ун-та, 1983. – 259 с.
14. Глушков В.М. *Абстрактная теория автоматов* // УМН. – 1961. – Т. 16. – № 5. – С. 3–62.
15. Arbib M. *Tolerance automata* // Kybernetika. – 1967. – V. 3. – № 3. – P. 223-233.
16. Ильичева И.П., Печенкин В.В. *Контроль структурных автоматов по стабильным отношениям* // Методы и сист. технич. диагностики. – Саратов, 1985. – Вып. 5. – С. 35–43.
17. Кац М.М. *Об упорядочиваемости автоматов* // Упорядоч. множества и решетки. – Саратов, 1995. – Вып. 11. – С. 24–31.
18. Гечег Ф. *О произведениях упорядоченных автоматов.* I // Acta Sci. Math. – 1963. – V. 24. – № 3–4. – P. 244–250.

19. Гечег Ф. *О произведениях упорядоченных автоматов.* II // Acta Sci. Math. – 1964. – V. 25. – № 1–2. – P. 124–128.
20. Simovici Dan A. *On the theory of reduction of semilatticial automata* // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1976. – Sec. 1a. – V. 22. – № 1. – P. 107–110.
21. Габович Е.Я. *Линейно упорядоченные полугруппы и их приложения* // УМН. – 1976. – Т. 31. – № 1. – С. 137–201.

Саратовский государственный университет

Поступила
17.07.1995