И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.75

Н.А. ОПОКИНА

ЛЕВАЯ СВЯЗНОСТЬ НА ТЕНЗОРНОМ РАССЛОЕНИИ ТИПА (2,0) НАД ГРУППОЙ ЛИ

Введение

В ([1], с. 143) доказано, что тензорное расслоение T_0^2G над группой Ли G также является группой Ли. Известно ([2], с. 79), что на всякой группе Ли существуют канонические линейные связности нулевой кривизны, но, вообще говоря, с ненулевым кручением: левая и правая. В работе рассматривается левая связность на тотальном пространстве расслоения T_0^2G (внешняя связность) и находится ее связь с левой связностью на базе G. С ее помощью построено горизонтальное распределение тензорного расслоения (внутренняя связность). Доказано, что левая внешняя связность является приводимой, проектируемой и регулярной. Кроме того, доказано, что существует единственная внутренняя связность на T_0^2G, определяемая левой внешней связностью и задающая на этом расслоении горизонтальное распределение.

1. Внешние и внутренние связности на тензорном расслоении T_0^2M

Линейная связность на многообразии T_0^2M — это инфинитезимальная связность расслоения реперов $L(T_0^2M)$, т. е. гладкое горизонтальное распределение, инвариантное относительно действия структурной группы $GL(n)$, где $n = m + m^2$, $m = \dim M$. Эту связность будем обозначать через ∇ и называть *внешней связностью* расслоенного многообразия T_0^2M. Если она задана, то на многообразии T_0^2M становится возможным определить параллельный перенос как отображение слоев $L_X(T_0^2M) \to L_{X(t)}(T_0^2M)$ вдоль заданной кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset T_0^2M$.

В дальнейшем будем использовать способ индексации компонент тензоров, разработанный в ([3], с. 110). Пространство T_0^2 отождествляется с векторным пространством F размерности m^2 с помощью линейного изоморфизма $J : T_0^2 \to F$. Выбрав в F некоторый базис $\{e_\alpha\}$, положим $Je_{ij} = J_{ij}^\alpha e_\alpha$. Тогда в координатах $T^\alpha = J_{ij}^\alpha T^{ij}$. Здесь J_{ij}^α — некоторые константы, зависящие от выбора базисов и образующие невырожденную m^2-матрицу, где α — номер строки, а совокупность индексов ij, занумерованных в некотором порядке, — номер столбца. Вследствие этого тензорное расслоение T_0^2M можно отождествить с векторным $E(M)$ с помощью линейного изоморфизма J над M

$$x^i = x^i, \quad T^\alpha = J_{ij}^\alpha T^{ij}. \tag{1}$$

Компоненты (1) образуют на расслоенном многообразии *адаптированные координаты* $(X^A) = (x^i, T^\alpha)$, где индексы пробегают следующие значения: базисные $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m$; слоевые $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n = m+m^2$; тотальные $A, B, C, \ldots = 1, \ldots, n = m+m^2$.

Приведем основные формулы и введем необходимые обозначения. Аналитически горизонтальное распределение в $L(T_0^2M)$ задается матричной 1-формой $\omega = (\omega_B^A)$ со значениями в алгебре Ли $gl(n)$, которая обращается в нуль на горизонтальном распределении. Положив

$$\omega_B^A = \Lambda_{CB}^A(X) dX^C,$$

приходим к классическому способу задания линейной связности с помощью объекта связности Λ^A_{BC} ([4], с. 179). В терминах ковариантного дифференцирования кручение S и кривизна R связности могут быть выражены в виде ([5], с. 131)

$$S(V,W) = \nabla_V W - \nabla_W V - [V,W], \quad R(V,W)Z = [\nabla_V, \nabla_W] - \nabla_{[V,W]}Z, \tag{2}$$

где V, W, Z — векторные поля на $T^2_0 G$. В натуральном поле реперов компоненты тензора кручения и кривизны могут быть представлены в терминах коэффициентов линейной связности следующим образом ([5], с. 141):

$$S^A_{BC} = \Lambda^A_{BC} - \Lambda^A_{CB}, \quad R^A_{BCD} = \partial_C \Lambda^A_{DB} - \partial_D \Lambda^A_{CB} + \Lambda^M_{DB}\Lambda^A_{CM} - \Lambda^M_{CB}\Lambda^A_{DM}. \tag{3}$$

Рассмотрим проекцию $p : T^2_0 M \to M$. Тогда ее дифференциал $p_* : T(T^2_0 M) \to TM$ есть морфизм касательных расслоений, который всякому вектору W в точке $X = (x^i, T^\alpha_x) \in T^2_0 M$ ставит в соответствие вектор $w = p_* W$ в точке $x = p(X)$. Векторное поле $W(X)$ на $T^2_0 M$ называется *проектируемым*, если существует векторное поле, p-связанное с ним на базе расслоения $w(x) = p_* W(X)$. Возникает также вертикальное подрасслоение

$$V(T^2_0 M) = \ker p_* \subset T(T^2_0 M)$$

размерности m^2, сечения которого называются *вертикальными векторными полями* на $T^2_0 M$. Вертикальные подпространства образуют инволютивное распределение на многообразии $T^2_0 M$.

Определение 1. Говорят ([3], с. 114), что расслоение $T^2_0 M$ снабжено *внутренней связностью*, если на расслоенном многообразии задано гладкое распределение $H(T^2_0 M)$, дополнительное к вертикальному.

Указанное распределение принято называть *горизонтальным*. Таким образом, $T(T^2_0 M) = H(T^2_0 M) \oplus V(T^2_0 M)$. Отсюда следует $\dim H(T^2_0 M) = m$. Горизонтальное распределение $H(T^2_0 M)$ локально можно задать проектируемыми векторными полями $\partial^H_i = \partial_i - \Gamma^\alpha_i(X)\partial_\alpha$, p-связанными с векторами ∂_i натурального поля реперов на базе. Вместе с вертикальными векторными полями ∂_α они образуют *адаптированное поле реперов*. Двойственным образом это распределение задается базисом линейных форм $\omega^\alpha = dT^\alpha + \Gamma^\alpha_i(X)dx^i$, которые вместе с 1-формами dx^i образуют *адаптированное поле кореперов*. В том случае, когда функции $\Gamma^\alpha_i(X)$ линейно и однородно зависят от слоевых координат T^α, т. е. имеют вид

$$\Gamma^\alpha_i(x^k, T^\beta_x) = \Gamma^\alpha_{i\gamma}(x^k)T^\gamma,$$

говорят, что внутренняя связность *линейна*. Таким образом, она задается функциями $\Gamma^\alpha_{i\gamma}(x)$ — *компонентами внутренней связности* ([4], с. 129).

2. Внутренняя связность на $T^2_0 G$

Пусть G — группа Ли. На всякой группе Ли, поскольку она является параллелизуемым многообразием, существуют канонические линейные связности. Обозначим через $\widehat{\nabla}$ *левую связность*, относительно которой абсолютно параллельны левоинвариантные векторные поля. Она имеет нулевую кривизну, но ненулевое кручение ([2], с. 79).

Всякое левоинвариантное векторное поле v на группе Ли G имеет вид

$$v(x) = L_*(x)v(e), \tag{4}$$

где $L_*(x) = (L^i_j(x))$ — матрица дифференциала левого сдвига, e — единица группы. Тогда из условия

$$\widehat{\nabla} v = 0,$$

где v — левоинвариантное векторное поле, найдем коэффициенты левой связности. В координатах в натуральном поле реперов это условие имеет вид

$$\widehat{\nabla}_i v^k = \partial_i v^k + \widehat{\Gamma}^k_{ij} v^j = 0. \tag{5}$$

Подставляя (4) в (5), получим $(\partial_i L^k_s(x))v^s(e)+\widehat{\Gamma}^k_{ij}(x)L^j_s(x)v^s(e)=0$. Тогда в силу произвольности вектора $v(e)$ имеем $\partial_i L^k_s(x)+\widehat{\Gamma}^k_{ij}(x)L^j_s(x)=0$ и, следовательно,

$$\widehat{\Gamma}^k_{ij}(x)=-\widetilde{L}^s_j(x)\partial_i L^k_s(x)=L^k_s(x)\partial_i\widetilde{L}^s_j(x), \tag{6}$$

где $(\widetilde{L}^s_j(x))$ — матрица обратная к матрице $(L^s_j(x))$. Альтернируя (6), получим

$$\widehat{S}^k_{ij}(x)=L^k_s(x)(\partial_i\widetilde{L}^s_j(x)-\partial_j\widetilde{L}^s_i(x)),$$

откуда, используя структурные уравнения Картана для группы G, найдем компоненты тензора кручения связности $\widehat{S}^k_{ij}(x)=L^k_s c^s_{pq}\widetilde{L}^p_j\widetilde{L}^q_i$, где c^s_{pq} — структурные константы алгебры Ли g группы Ли G.

Как следует из формулы ковариантного дифференциала для тензоров типа $(2,0)$

$$\nabla T^{ij}=dT^{ij}+(\delta^i_p\widehat{\Gamma}^j_{kq}(x)+\delta^j_q\widehat{\Gamma}^i_{kp}(x))T^{pq},$$

всякая линейная связность на базе однозначно определяет горизонтальное распределение на расслоении T^2_0G и, следовательно, внутреннюю связность с компонентами

$$\Gamma^{ij}_{kpq}(x)=\delta^i_p\widehat{\Gamma}^j_{kq}(x)+\delta^j_q\widehat{\Gamma}^i_{kp}(x). \tag{7}$$

Подставляя, в частности, в (7) коэффициенты левой связности (6), получим

$$\Gamma^{ij}_{kpq}(x)=\delta^i_p L^j_s(x)\partial_k\widetilde{L}^s_q(x)+\delta^j_q L^i_s(x)\partial_k\widetilde{L}^s_p(x). \tag{8}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть G – группа Ли, (L^i_j) — матрица дифференциала левого действия на G. Тогда левая связность группы G однозначно определяет на расслоении T^2_0G внутреннюю связность с компонентами* (8).

Учитывая сделанное в § 1 замечание, величины (7) можно записать также в виде

$$\Gamma^\alpha_{k\beta}(x)=J^\alpha_{ij}\Gamma^{ij}_{kpq}(x)J^{pq}_\beta, \tag{9}$$

где J^{pq}_β — компоненты обратной матрицы J^{-1}.

3. Внешняя левая связность на T^2_0G

Тензорное расслоение T^2_0G является группой Ли ([1], с. 143). Поэтому на тотальном пространстве этого расслоения существует левая связность, коэффициенты которой определяются условием

$$\nabla_A V^B=\partial_A V^B+\Lambda^B_{AC}V^C=0, \tag{10}$$

где $V^A=(v^i,v^\alpha)$ — координаты левоинвариантного векторного поля V на T^2_0G, а Λ^B_{AC} — коэффициенты внешней левой связности на T^2_0G. Тогда

$$\Lambda^C_{AB}(X)=-\widetilde{L}^D_B(X)\partial_A L^C_D(X), \tag{11}$$

где $X\in T^2_0G$, а $L^C_D(X)$ — компоненты матрицы дифференциала левого сдвига на T^2_0G. Эта матрица в натуральном поле реперов имеет вид ([1], с. 145)

$$L_*(X)=\begin{pmatrix} L_*(x) & 0\\ \partial_y(R_*(y)\otimes R_*(y))_e T_x & L_*(x)\otimes L_*(x)\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Изучим правый нижний блок матрицы (12) подробнее. Учитывая формулу (6), получим

$$(\delta^m_q\partial_p L^k_s(x)+\delta^k_p\partial_q L^m_s(x))T^{pq}_x=-(\widehat{\Gamma}^k_{pj}(x)\delta^m_q+\widehat{\Gamma}^m_{qj}(x)\delta^k_p)L^j_s(x)T^{pq}_x.$$

Введем обозначение для взаимной связности, аналогичное (7),

$$\Gamma^{km}_{pqj}(x) = \widehat{\Gamma}^k_{pj}(x)\delta^m_q + \widehat{\Gamma}^m_{qj}(x)\delta^k_p \tag{13}$$

и положим, как выше,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta j}(x) = J^{\alpha}_{km}\Gamma^{km}_{pqj}(x)J^{pq}_{\beta}, \quad L^{\alpha}_{\beta}(x) = J^{\alpha}_{km}L^k_i(x)L^m_j(x)J^{ij}_{\beta}. \tag{14}$$

Тогда матрица (12) в координатах примет вид

$$(L^A_B(X)) = \begin{pmatrix} L^i_j(x) & 0 \\ -\Gamma^{\alpha}_{\beta_j}(x)L^j_s(x)T^{\beta}_x & L^{\alpha}_{\beta}(x) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

а обратная к ней

$$(\widetilde{L}^A_B(X)) = \begin{pmatrix} \widetilde{L}^i_j(x) & 0 \\ \widetilde{L}^{\gamma}_{\alpha}(x)\Gamma^{\alpha}_{\beta j}(x)T^{\beta}_x & \widetilde{L}^{\alpha}_{\beta}(x) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Используя формулы (15), (16) и (11), вычислим коэффициенты левой внешней связности на группе T^2_0G. В натуральном поле реперов они равны

$$\begin{gathered} \Lambda^k_{ij}(X) = \widehat{\Gamma}^k_{ij}(x), \quad \Lambda^k_{i\beta}(X) = 0, \quad \Lambda^k_{\beta i}(X) = 0, \quad \Lambda^k_{\gamma\beta}(X) = 0, \\ \Lambda^{\gamma}_{ij}(X) = (\partial_i\Gamma^{\gamma}_{\beta j}(x) - \Gamma^{\gamma}_{\beta s}(x)\widehat{\Gamma}^s_{ij}(x) + \Gamma^{\gamma}_{i\sigma}(x)\Gamma^{\sigma}_{\beta j}(x))T^{\beta}_x, \\ \Lambda^{\gamma}_{i\beta}(X) = \Gamma^{\gamma}_{i\beta}(x), \quad \Lambda^{\gamma}_{\beta i}(X) = \Gamma^{\gamma}_{\beta i}(x), \quad \Lambda^{\gamma}_{\beta\alpha}(X) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Пусть $\widehat{\nabla}$ — левая связность на группе Ли G и $\widehat{\Gamma}^k_{ij}$ — ее компоненты. Тогда левая внешняя связность на группе T^2_0G однозначно ею определяется и имеет компоненты* (17).

Так как левая связность имеет нулевую кривизну, то из формулы (3) следует

$$\partial_k\widehat{\Gamma}^p_{ij}(x) = \partial_i\widehat{\Gamma}^p_{kj}(x) - \widehat{\Gamma}^p_{ks}(x)\widehat{\Gamma}^s_{ij}(x) + \widehat{\Gamma}^r_{kj}(x)\widehat{\Gamma}^p_{ir}(x).$$

Тогда, используя предыдущее равенство и формулы (13), (14), получим

$$\Lambda^{\gamma}_{ij}(X) = J^{\gamma}_{pq}(\delta^q_m\partial_k\widehat{\Gamma}^p_{ij}(x) + \delta^p_k\partial_m\widehat{\Gamma}^q_{ij}(x) + 2\widehat{\Gamma}^p_{(j|k|}(x)\widehat{\Gamma}^q_{i)m}(x))T^{km}_x. \tag{18}$$

Вычислим тензор кручения левой связности (17). Используя формулы (7), (13), (18), получим

$$\begin{gathered} S^k_{ij} = \widehat{S}^k_{ij}, \quad S^{\beta}_{i\gamma} = J^{\beta}_{km}(\widehat{S}^k_{ip}\delta^m_q + \widehat{S}^m_{iq}\delta^k_p)J^{pq}_{\gamma}, \\ S^{\gamma}_{ij} = J^{\gamma}_{pq}(\delta^q_m\partial_k\widehat{S}^p_{ij}(x) + \delta^p_k\partial_m\widehat{S}^q_{ij}(x))T^{km}_x. \end{gathered} \tag{19}$$

Следствие. Тензор кручения левой внешней связности имеет ненулевые компоненты (19).

Рассмотрим на тензорном расслоении T^2_0G вместо натурального левоинвариантное поле реперов $\{E_A\}$. Любое левоинвариантное векторное поле на T^2_0G имеет вид $V = V^AE_A$, где $V^A = \text{const}$. Тогда условие (10) примет вид

$$E_AV^B + \Omega^B_{AC}V^C = 0,$$

откуда $\Omega^B_{AC} = 0$. Как показано в ([1], с. 146), структурные уравнения алгебры Ли g^2_0 группы T^2_0G в левоинвариантном базисе имеют вид

$$[E_i, E_j] = c^k_{ij}E_k, \quad [E_i, E_{\alpha}] = c^{\beta}_{i\alpha}E_{\beta}, \quad [E_{\alpha}, E_{\beta}] = 0,$$

где $c^{\beta}_{i\alpha} = J^{\beta}_{pq}(c^q_{ik}\delta^p_m + c^p_{im}\delta^q_k)J^{km}_{\alpha}$. Следовательно, в этом поле реперов в силу формулы (2) тензор кручения левой внешней связности имеет отличные от нуля компоненты $\overline{S}^k_{ij} = c^k_{ij}$, $\overline{S}^{\beta}_{i\alpha} = c^{\beta}_{i\alpha}$.

4. Свойства левой внешней связности на тензорном расслоении T_0^2G

Определение 2. Внешняя связность на расслоенном многообразии называется *приводимой*, если ковариантный дифференциал произвольного вертикального векторного поля вертикален ([6], с. 65).

Другими словами, для приводимых связностей вертикальное распределение абсолютно параллельно. Отсюда $\Lambda^i_{\alpha k} = 0$, $\Lambda^i_{\alpha\beta} = 0$. Тогда из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Левая внешняя связность на T_0^2G приводимая.*

Определение 3. Линейная связность на расслоенном многообразии называется *проектируемой*, если для любой пары проектируемых векторных полей V, W векторное поле $Z = \nabla_V W$ также проектируемо ([6], с. 67).

Вследствие равенства $\widehat{\nabla}_{p_*V} p_*W = p_*\nabla_V W$ всякая проектируемая связность однозначно определяет некоторую линейную связность на базе расслоения.

Определение 4. Поля реперов на расслоении и его базе называются *p-связанными*, если $p_*E_i = e_i$, $p_*E_\alpha = 0$, где $\{e_i\}$ — поле реперов на базе.

Для того чтобы связность была проектируемой, необходимо и достаточно, чтобы в p-связанных полях реперов $\Lambda^k_{ij} = \widehat{\Gamma}^k_{ij}(x)$, $\Lambda^k_{i\beta} = 0$, $\Lambda^k_{\alpha j} = 0$, $\Lambda^k_{\alpha\beta} = 0$.

Рассмотрим $\{\partial_i, \partial_\alpha\}$ — натуральное поле реперов на T_0^2G и $\{\partial_i\}$ — натуральное поле реперов на G. Они являются p-связанными, относительно проекции $p : T_0^2G \to G$. Всякое левоинвариантное векторное поле на T_0^2G проектируется в левоинвариантное векторное поле базы ([1], с. 145). Тогда верна

Теорема 4. *Левая внешняя связность на T_0^2G проектируется в левую связность на базе G.*

Пусть на T_0^2G задана внешняя связность. В окрестности $U \subset G$ базы рассмотрим произвольную кривую $\widehat{\gamma} : x = x(t)$ и пусть $s(t) = T^\alpha(t)e_\alpha$ — произвольно выбранное поле слоевых векторов над этой кривой (сечение над $\widehat{\gamma}$). Тогда в окрестности $\pi^{-1}(U) \subset T_0^2G$ получаем кривую $\gamma : X(t) = (x^i(t),\ T^\alpha(t))$, проектирующуюся на $\widehat{\gamma}$. Обратно, задание не вертикальной кривой γ однозначно определяет ее проекцию $\widehat{\gamma} = \pi \circ \gamma$ и сечение $s(t)$. Пусть $s^V(t)$ — вертикальное векторное поле вдоль γ, такое, что $s(t)$ является его канонической проекцией — вертикальный лифт сечения $s(t)$.

Определение 5 ([3], с. 122). Внешняя связность называется *регулярной*, если при параллельном перенесении вертикального лифта $s^V(t)$ вдоль γ сечение $s(t)$ переносится параллельно вдоль проекции $\widehat{\gamma} = \pi \circ \gamma$.

Так как левая внешняя связность является приводимой, то 1-формы $\nabla T^\alpha = dT^\alpha + \omega^\alpha_\beta T^\alpha$ определяют на T_0^2G m-мерное дифференцируемое распределение. Полагая $\omega^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_{i\beta}dx^i + \Lambda^\alpha_{\gamma\beta}dT^\gamma$ и замечая, что на векторном расслоении коэффициенты $\Lambda^\alpha_{\gamma\beta}$ образуют слоевой тензор, получим условие

$$P^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \Lambda^\alpha_{\gamma\beta}T^\gamma, \tag{20}$$

при котором это распределение дополнительно к вертикальному, заключается в нерожденности слоевого аффинора ([6], с. 78). В этом и состоит условие регулярности. Известно ([6], с. 78), что всякая регулярная связность индуцирует внутреннюю связность с коэффициентами

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_k = \widetilde{P}^\alpha_\gamma \Lambda^\gamma_{k\beta} T^\beta, \tag{21}$$

где $\widetilde{P}$ — матрица обратная к матрице P.

В натуральном поле реперов коэффициенты левой внешней связности имеют вид (17). Тогда элементы матрицы P в натуральном поле реперов в силу формулы (20) равны $P^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Вследствие этого получаем внутреннюю связность на T^2_0G, которая в силу (21) имеет компоненты $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{k} = \Lambda^{\alpha}_{k\beta}T^{\beta}$. Учитывая, что компоненты левой внешней связности имеют вид (17), получим

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{k} = \Gamma^{\alpha}_{k\beta}(x)T^{\beta}. \tag{22}$$

Таким образом, она оказывается линейной. Доказана

Теорема 5. *Левая внешняя связность на T^2_0G является регулярной и однозначно определяет на тензорном расслоении линейную внутреннюю связность* (22)*, которая совпадает с внутренней связностью* (9)*, построенной из левой связности на базе G.*

В заключение заметим, что на группе T^2_0G правая связность обладает аналогичными свойствами.

Литература

1. Опокина Н.А. *Касательные и тензорные расслоения типа* (2, 0) *над группой Ли* // Учен. зап. Казанск. гос. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. – Казань, 2005. – Т. 147. – Кн. 1. – С. 138–147.
2. Шапуков Б.Н. *Задачи по группам Ли и их приложениям.* – М.: НИЦ “РХД”, 2002. – 256 с.
3. Шапуков Б.Н. *Тензорные расслоения* // Сб. “Памяти Лобачевского посвящается”. – Казань: Изд-во. Казанск. ун-та, 1992. – Вып. 1. – С. 104–125.
4. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр* 4. *Дифференциальная геометрия.* – М.: Наука, 1988. – 496 с.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1981. – Т.1. – 344 с.
6. Шапуков Б.Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. геометрии. - М.: ВИНИТИ. – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.

Казанский государственный университет

Поступила
24.04.2006