ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 517.988

М.Ю. КОКУРИН

УСЛОВИЕ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ И ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

1. Необходимость условия истокопредставимости

В данной работе, продолжающей [1], рассмотрим вопрос о необходимости истокообразного представления начальной невязки для степенной оценки скорости сходимости методов аппроксимации решений линейных некорректных уравнений

$$Ax = f, \quad x \in X. \tag{1.1}$$

Здесь, как и ранее, X — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $A \in \mathcal{L}(X)$, $f \in X$; $\mathcal{L}(X)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в X. Норма в $\mathcal{L}(X)$ вводится стандартным образом и обозначается через $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$. Существование и непрерывность обратного оператора A^{-1} не предполагается, что и делает уравнение (1.1) некорректным. В данной статье для простоты будем считать, что исходные данные (A, f) в (1.1) известны без погрешностей. Речь идет о классе методов

$$x_\alpha = (E - \theta(A,\alpha)A)\xi + \theta(A,\alpha)f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{1.2}$$

в рамках которого конкретные процедуры определяются выбором порождающих комплекснозначных функций $\theta(\lambda,\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$. Здесь E — единичный оператор, α — параметр регуляризации, $\xi \in X$ — фиксированный элемент, служащий начальным приближением к искомому решению x^*. Предполагается, что множество решений (1.1) непусто. Функция $\theta(A,\alpha)$ оператора A в (1.2) определяется формулой Рисса–Данфорда

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\lambda)R(\lambda,A)\,d\lambda, \tag{1.3}$$

где $R(\lambda,A) = (\lambda E - A)^{-1}$ обозначает резольвенту оператора A, Γ — положительно ориентированный контур на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, охватывающий спектр $\sigma(A)$ оператора A и целиком лежащий в области аналитичности функции $\varphi(\lambda)$.

Напомним основные условия на оператор A и порождающие функции $\theta(\lambda,\alpha)$, при которых в [1] исследовались аппроксимативные свойства схемы (1.2) по отношению к искомому решению x^*.

Условие A. Для некоторого $\varphi_0 \in (0,\pi)$ выполняется включение

$$\sigma(A) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| \le \varphi_0\} \tag{1.4}$$

и оценка

$$\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{c_0}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus K(\varphi_0). \tag{1.5}$$

Здесь и далее $c_0, c_1, \dots$ — положительные абсолютные константы, нумерация которых независима от [1].

Обозначим $S(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r\}$, $K(r, \varphi_0) = K(\varphi_0) \cap S(r)$. В силу (1.4) при любом $R_0 > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ имеем $\sigma(A) \subset K(R_0, \varphi_0)$. Зафиксируем эту константу R_0.

Условие B. Для каждого $\alpha \in (0, \alpha_0]$ функция $\theta(\lambda, \alpha)$ аналитична по λ на открытом множестве $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ таком, что

$$K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) \subset D_\alpha,$$

где $K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) = K(R_0, \varphi_0) \cup S(d_0\alpha)$, d_0 — фиксированная константа, $d_0 \in (0, 1)$.

При выполнении условий A, B и дополнительного условия C [1] установлено, что при наличии истокообразного представления начальной невязки

$$x^* - \xi = A^p v; \quad v \in X, \quad p > 0, \tag{1.6}$$

имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{\alpha \to 0} \|x_\alpha - x^*\| = 0$ и справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_\alpha - x^*\| \le l\alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{1.7}$$

где $l = c_1\|v\|$. По поводу определения степени A^p для нецелых показателей p см. [1] и указанные там ссылки.

В данной работе покажем, что представление (1.6), достаточное для выполнения оценки (1.7), близко к необходимому. В случае гильбертова пространства X и самосопряженного оператора $A^* = A$ аналогичные результаты были установлены ранее в ([2], с. 80–83; [3], с. 136–140). Основным результатом статьи является утверждение о том, что при выполнении ряда дополнительных условий на порождающие функции следствием оценки (1.7) является представление

$$x^* - \xi = A^{p-q} v_q, \quad v_q \in X, \tag{1.8}$$

справедливое для всех достаточно малых $q \in (0, q_0]$. Отметим, что величина q в (1.8) не может быть в общем случае заменена нулем; соответствующие контрпримеры известны уже для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве ([3], с. 138).

Подготовительным рассуждениям, необходимым для доказательства сформулированного выше основного результата, посвящена оставшаяся часть настоящего параграфа и весь § 2. В § 3 приводится формулировка теоремы и завершается ее доказательство. В § 4 рассматриваются примеры процедур вида (1.2), к которым применимы результаты [1] и настоящей работы.

В дальнейшем будет удобно считать, что порождающие функции $\theta(\lambda, \alpha)$ определены для всех положительных значений параметра регуляризации, так что $\alpha \in (0, \infty)$. Соответственно будем предполагать, что условие B выполняется для всех значений $\alpha \in (0, \infty)$ с $K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) = K(R_0, \varphi_0) \cup S(\min\{R_0, d_0\alpha\})$. Полученную модификацию условия B назовем условием B$'$. Обозначим через γ_α границу множества $K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0)$. Условие B$'$ означает, что оператор

$$\theta(A, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \theta(\lambda, \alpha) R(\lambda, A) d\lambda \tag{1.9}$$

определен при любом $\alpha \in (0, \infty)$. Из (1.2) и (1.9) с учетом равенства $Ax^* = f$ следует представление

$$x_\alpha - x^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} (1 - \theta(\lambda, \alpha)\lambda) R(\lambda, A)(\xi - x^*) d\lambda. \tag{1.10}$$

Будем считать также выполненными следующие технические условия C$'$, E.

Условие C′. При всех $r \in (0, r_0]$ имеет место оценка

$$\sup_{\alpha\in[\alpha_0,\infty)} \left(\alpha^{-r}\int_{\gamma_\alpha} \frac{|1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda|}{|\lambda|}|d\lambda|\right) < \infty. \tag{1.11}$$

Неравенство (1.11) — это ослабленный вариант условия C из [1], получающийся при $s = 0$, но в отличие от него распространяющийся на значения $\alpha \in [\alpha_0, \infty)$. Обозначим

$$\mathcal{D}(R_0, d_0, \varphi_0) = \{(\lambda, \alpha) : \lambda \in K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0),\ \alpha \in (0, \infty)\}.$$

Условие E. Функция $\theta(\lambda + \varepsilon, \alpha)$ непрерывна по λ, α на множестве $\mathcal{D}(R_0, d_0, \varphi_0)$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$.

В ходе дальнейших рассуждений на функции $\theta(\lambda, \alpha)$ будут наложены и другие ограничения.

2. Предварительные оценки

Предположим, что для некоторой константы $l > 0$ имеет место оценка (1.7).

Из условия E с учетом представления (1.9) следует, что элемент x_α непрерывно зависит от $\alpha \in (0, \infty)$. Кроме того, в силу (1.5), (1.7), (1.10) и (1.11) для всех q, $0 < q < \min\{\frac{2}{3}p, 2r_0\}$, справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}\|x_\alpha - x^*\|d\alpha = \int_0^{\alpha_0} \alpha^{-p-1+q}\|x_\alpha - x^*\|d\alpha + \int_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+q}\|x_\alpha - x^*\|d\alpha \le$$
$$\le l\int_0^{\alpha_0} \alpha^{-1+q}d\alpha + \frac{c_0}{2\pi}\|x^* - \xi\|\int_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+\frac{3}{2}q}\left(\alpha^{-q/2}\int_{\gamma_\alpha}\frac{|1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda|}{|\lambda|}|d\lambda|\right)d\alpha = \varkappa(q) < \infty. \tag{2.1}$$

Последнее означает, что определен элемент

$$w_q = \int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}(x_\alpha - x^*)d\alpha, \tag{2.2}$$

где $w_q \in X$ и интеграл в правой части понимается в смысле Бохнера ([4], с. 94).

Наметим план дальнейших рассуждений. Наряду с оператором A рассмотрим его регуляризацию $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$, и введем (пока формально) элемент

$$u_q^{(\varepsilon)} = \int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}(\theta(A, \alpha)A - \theta(A_\varepsilon, \alpha)A_\varepsilon)(\xi - x^*)d\alpha. \tag{2.3}$$

Убедившись в сходимости интеграла (2.3) и установив верхнюю оценку для $\|u_q^{(\varepsilon)}\|$, тем самым докажем сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}(E - \theta(A_\varepsilon, \alpha)A_\varepsilon)(\xi - x^*)d\alpha = u_q^{(\varepsilon)} + w_q \triangleq w_q^{(\varepsilon)} \tag{2.4}$$

с оценкой нормы $\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\| = \|u_q^{(\varepsilon)}\|$. На завершающем этапе прямым вычислением покажем, что для некоторой ненулевой константы $\chi(p, q)$ справедливо равенство

$$A_\varepsilon^{p-q}w_q^{(\varepsilon)} = \chi(p, q)(x^* - \xi).$$

С другой стороны, с использованием упомянутой оценки установим, что $A_\varepsilon^{p-q}w_q^{(\varepsilon)} = A^{p-q}w_q$ для сколь угодно малых $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$. Отсюда будет непосредственно следовать требуемое представление (1.8).

В дальнейшем будем предполагать выполненным

Условие F. Для всех $\alpha \in (0, \infty)$ имеет место соотношение $1 - \theta(\lambda, \alpha)\lambda \ne 0\ \ \forall\lambda \in K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0)$.

Согласно теореме об отображении спектра ([4], с. 220) при выполнении условия F оператор $E-\theta(A,\alpha)A$ непрерывно обратим для всех $\alpha \in (0,\infty)$. С учетом этого запишем

$$u_q^{(\varepsilon)} = \int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}\psi(A;\alpha,\varepsilon)(E-\theta(A,\alpha)A)(\xi - x^*)d\alpha. \tag{2.5}$$

Здесь обозначено

$$\psi(\lambda;\alpha,\varepsilon) = \frac{\theta(\lambda,\alpha)\lambda - \theta(\lambda+\varepsilon,\alpha)(\lambda+\varepsilon)}{1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda}. \tag{2.6}$$

В силу условий E, F при любом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ функция $\psi(\lambda;\alpha,\varepsilon)$ непрерывна по λ, α на множестве $\mathcal{D}(R_0,d_0,\varphi_0)$. Следовательно, оператор $\psi(A;\alpha,\varepsilon)$ непрерывно зависит от α при $\alpha \in (0,\infty)$ в смысле нормы $\mathcal{L}(X)$. Для доказательства сходимости интеграла Бохнера в (2.5) достаточно установить сходимость интеграла в правой части неравенства

$$\int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}\|\psi(A;\alpha,\varepsilon)(E-\theta(A,\alpha)A)(\xi-x^*)\|d\alpha \le \\ \le \int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}\|\psi(A;\alpha,\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x_\alpha - x^*\|d\alpha. \tag{2.7}$$

Из (1.5) и (1.9) следует, что

$$\|\psi(A;\alpha,\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\alpha}|\psi(\lambda;\alpha,\varepsilon)|\,\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X)}|d\lambda| \le c_2\int_{\gamma_\alpha}\frac{|\psi(\lambda;\alpha,\varepsilon)|}{|\lambda|}|d\lambda|. \tag{2.8}$$

Дополним ранее введенные предположения относительно порождающих функций $\theta(\lambda,\alpha)$ следующим условием.

Условие G. Найдутся такие $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0]$ и $s_0>0$, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ для функции (2.6) имеет место оценка

$$\int_{\gamma_\alpha}\frac{|\psi(\lambda;\alpha,\varepsilon)|}{|\lambda|}|d\lambda| \le M(\alpha,\varepsilon) \quad \forall \alpha>0. \tag{2.9}$$

При этом

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\left(\alpha^s\int_0^{\varepsilon_1}\frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon\right) + \sup_{\alpha\in[\alpha_0,\infty)}\left(\alpha^{-s}\int_0^{\varepsilon_1}\frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon\right) < \infty, \tag{2.10}$$
$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}(\alpha^s M(\alpha,\varepsilon)) + \sup_{\alpha\in[\alpha_0,\infty)}(\alpha^{-s}M(\alpha,\varepsilon)) < \infty$$

для любого $s \in (0,s_0]$.

Замечание 1. Условие G выполняется, например, если

$$M(\alpha,\varepsilon) + \int_0^{\varepsilon_1}\frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon \le c_3(|\ln\alpha|^a + 1), \quad a>0 \ \ \forall \alpha \in (0,\infty).$$

Из оценок (2.1), (2.7)–(2.10) сразу следует сходимость интеграла в (2.5) с произвольным $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$. Таким образом, при любом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ интеграл (2.4) определяет элемент $w_q^{(\varepsilon)} \in X$. На основании (2.9) с использованием теоремы Фубини ([5], с. 317) получаем

$$\int_0^{\varepsilon_1}\frac{\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\|}{\varepsilon}d\varepsilon \le \int_0^{\alpha_0}\alpha^{-p-1+\frac{q}{2}}\|x_\alpha - x^*\|\left(\alpha^{q/2}\int_0^{\varepsilon_1}\frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon\right)d\alpha + \\ + \int_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+\frac{3}{2}q}\|x_\alpha - x^*\|\left(\alpha^{-q/2}\int_0^{\varepsilon_1}\frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon\right)d\alpha, \quad 0<q<\min\{\tfrac{2}{3}p, 2s_0\}.$$

Отсюда с учетом (2.1) и (2.10) вытекает оценка

$$\int_0^{\varepsilon_1} \frac{\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\|}{\varepsilon} d\varepsilon \le c_4 \left(\varkappa\left(\frac{q}{2}\right) + \varkappa\left(\frac{3q}{2}\right) \right) < \infty. \qquad (2.11)$$

Неравенство (2.11) означает, что найдется такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|w_q^{(\varepsilon_n)} - w_q\| = 0$. Действительно, предположив противное, для некоторого $\omega_0 > 0$ мы имели бы $\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\| \ge \omega_0 \ \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$, так что

$$\int_0^{\varepsilon_1} \frac{\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\|}{\varepsilon} d\varepsilon \ge \int_0^{\varepsilon_2} \frac{\omega_0}{\varepsilon} d\varepsilon = \infty$$

вопреки (2.11).

Считая величину q в (2.1) достаточно малой, зафиксируем такое натуральное m, что $m < p - q < m+1$. В соответствии с данным в [1] определением запишем представление

$$A_\varepsilon^{p-q} = \frac{(-1)^m \sin \pi(p-q)}{\pi} \int_0^\infty t^{p-q-m-1} (tE + A_\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon^{m+1} dt.$$

Таким образом, согласно (2.4) имеем

$$A_\varepsilon^{p-q} w_q^{(\varepsilon)} = \frac{(-1)^m \sin \pi(p-q)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-q-m-1} \alpha^{-p-1+q} \times \\ \times (tE + A_\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon^{m+1} (E - \theta(A_\varepsilon, \alpha) A_\varepsilon)(\xi - x^*) d\alpha\, dt. \qquad (2.12)$$

Для того чтобы записать интегральное представление (1.3) для оператора $\eta(A_\varepsilon; t, \alpha)$, $\eta(\lambda; t, \alpha) = (t+\lambda)^{-1} \lambda^{m+1} (1 - \theta(\lambda, \alpha)\lambda)$, выберем в качестве Γ контур

$$\Gamma^{(\varepsilon)} = \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup \Gamma_{R_0} \cup \Gamma^+_{(\frac{\varepsilon}{2}, R_0)} \cup \Gamma^-_{(\frac{\varepsilon}{2}, R_0)},$$

где

$$\Gamma_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \le \varphi_0,\ |\lambda| = r\},$$
$$\Gamma^\pm_{(r_1, r_2)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pm\varphi_0,\ r_1 \le |\lambda| \le r_2\}, \quad r, r_1, r_2 > 0.$$

Нетрудно видеть, что $\Gamma^{(\varepsilon)}$ охватывает $\sigma(A_\varepsilon) = \{\lambda + \varepsilon : \lambda \in \sigma(A)\}$ и при всех t, $\alpha \in (0, \infty)$ целиком лежит в области аналитичности по λ функции $\eta(\lambda; t, \alpha)$. Согласно (1.3) и (2.12) справедливо представление

$$A_\varepsilon^{p-q} w_q^{(\varepsilon)} = \tau(p,q) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \alpha^{-p-1+q} t^{p-q-m-1} (t+\lambda)^{-1} \lambda^{m+1} (1 - \theta(\lambda, \alpha)\lambda) \times \\ \times R(\lambda, A_\varepsilon)(\xi - x^*) d\lambda\, d\alpha\, dt, \qquad (2.13)$$

где $\tau(p,q) = \frac{(-1)^m \sin \pi(p-q)}{2\pi^2 i}$. Для обоснования возможности перестановки интегралов в (2.13) ([6], с. 354) покажем, что

$$J \triangleq \int_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{-p-1+q} t^{p-q-m-1} |t+\lambda|^{-1} |\lambda|^{m+1} |1 - \theta(\lambda, \alpha)\lambda| \times \right. \\ \left. \times \|R(\lambda, A_\varepsilon)(\xi - x^*)\| d\alpha\, dt \right) |d\lambda| < \infty. \qquad (2.14)$$

Поскольку для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ выполняется

$$\sup_{\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}} \|R(\lambda, A_\varepsilon)(\xi - x^*)\| = C(\varepsilon) < \infty,$$

то имеет место оценка

$$J \le C(\varepsilon) \int_{\Gamma^{(\varepsilon)}} |\lambda|^{m+1} \Big(\int_0^\infty \alpha^{-p-1+q} |1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda| d\alpha \Big) \Big(\int_0^\infty t^{p-q-m-1} |t+\lambda|^{-1} dt \Big) |d\lambda|. \quad (2.15)$$

Будем предполагать, что функции $\theta(\lambda,\alpha)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие H. Функция $g(\zeta) = 1-\theta(\lambda,\lambda\zeta)\lambda$ не зависит от λ при $\lambda \in K(\varphi_0) \setminus \{0\}$ и аналитична на открытом множестве $\Delta \supset K(\varphi_0) \setminus \{0\}$. При этом для некоторой константы $t_0 > 0$ выполняется

$$\int_0^\infty \tau^{-p-1+t} |g(e^{i\varphi}\tau)| d\tau \le N(p,t) < \infty \quad \forall t \in (0,t_0], \quad |\varphi| \le \varphi_0. \quad (2.16)$$

Кроме того, для указанных значений t справедливы соотношения

$$\lim_{r\to 0} r^{-p-1+t} \int_{\Gamma_r} |g(\zeta)|\,|d\zeta| = 0, \quad \lim_{R\to\infty} R^{-p-1+t} \int_{\Gamma_R} |g(\zeta)|\,|d\zeta| = 0. \quad (2.17)$$

Рассмотрим по отдельности внутренние интегралы в (2.15). С использованием замен $\alpha = |\lambda|\tau = \lambda e^{-i\arg\lambda}\tau$, $t = |\lambda|\tau$ и неравенства (2.16) оценим упомянутые интегралы следующим образом:

$$\int_0^\infty \alpha^{-p-1+q} |1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda| d\alpha = |\lambda|^{-p+q} \int_0^\infty \tau^{-p-1+q} |g(e^{-i\arg\lambda}\tau)| d\tau \le N(p,q)|\lambda|^{-p+q}, \quad (2.18)$$

$$\int_0^\infty t^{p-q-m-1}|t+\lambda|^{-1} dt = |\lambda|^{p-q-m-1} \int_0^\infty \tau^{p-q-m-1} |\tau + |\lambda|^{-1}\lambda|^{-1} d\tau \le$$
$$\le L(p,q)|\lambda|^{p-q-m-1} \quad \forall \lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}. \quad (2.19)$$

Здесь $L(p,q)$ — положительная постоянная, не зависящая от λ, $0 < q < \min\{\frac{2}{3}p, 2r_0, 2s_0, t_0\}$. Соотношение (2.14) вытекает непосредственно из (2.15), (2.18), (2.19). Следовательно, в (2.13) возможно изменение порядка интегрирования. Имеем

$$A_\varepsilon^{p-q} w_q^{(\varepsilon)} = \tau(p,q) \int_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \lambda^{m+1} \Big(\int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}(1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda) d\alpha \Big) \times$$
$$\times \Big(\int_0^\infty t^{p-q-m-1}(t+\lambda)^{-1} dt \Big) R(\lambda, A_\varepsilon)(\xi - x^*) d\lambda, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]. \quad (2.20)$$

Положив $\alpha = \lambda\zeta$, представим первый из внутренних интегралов в (2.20) в виде

$$\int_0^\infty \alpha^{-p-1+q}(1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda) d\alpha = \lambda^{-p+q} \int_{\Lambda(\overline{\lambda})} \zeta^{-p-1+q} g(\zeta) d\zeta, \quad (2.21)$$

где $\Lambda(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = tz,\ t \ge 0\}$, $z \in \mathbb{C}$; через $\overline{\lambda}$ обозначается комплексное сопряжение для λ, и интегрирование по $\Lambda(\overline{\lambda})$ ведется в направлении от $\zeta = 0$ к $\zeta = \infty$. Покажем, что величина $G(p,q)$ интеграла в правой части (2.21) не зависит от $\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}$. Если $\lambda, \mu \in \Gamma^{(\varepsilon)}$ таковы, что $\arg\lambda = \arg\mu$, $\lambda \ne \mu$, то $\Lambda(\overline{\lambda}) = \Lambda(\overline{\mu})$, и интегралы по лучам $\Lambda(\overline{\lambda})$ и $\Lambda(\overline{\mu})$ совпадают. Пусть теперь $\lambda, \mu \in \Gamma^{(\varepsilon)}$ и $\arg\overline{\lambda} < \arg\overline{\mu}$. Выберем положительно ориентированный контур

$$\Gamma_{(r,R)}(\overline{\lambda},\overline{\mu}) = \Gamma_r(\overline{\lambda},\overline{\mu}) \cup \Gamma_R(\overline{\lambda},\overline{\mu}) \cup \Gamma_{(r,R)}(\overline{\lambda}) \cup \Gamma_{(r,R)}(\overline{\mu}),$$
$$\Gamma_r(\lambda_1,\lambda_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r,\ \arg\lambda_1 \le \arg\lambda \le \arg\lambda_2\},$$

где $0 < r < R$,

$$\Gamma_{(r_1,r_2)}(z) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \arg z,\ r_1 \le |\lambda| \le r_2\}.$$

В силу аналитичности функции $g(\zeta)$ на $K(\varphi_0)\setminus\{0\}\supset\Gamma_{(r,R)}(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ выполняется

$$\int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\overline{\lambda},\overline{\mu})}\zeta^{-p-1+q}g(\zeta)d\zeta=\int\limits_{\Gamma_r(\overline{\lambda},\overline{\mu})}\zeta^{-p-1+q}g(\zeta)d\zeta+\int\limits_{\Gamma_R(\overline{\lambda},\overline{\mu})}+\int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\overline{\lambda})}+\int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\overline{\mu})}=0.$$

Переходя здесь к пределу при $r\to 0$, $R\to\infty$ и используя соотношения (2.17), получаем

$$\int_{\Lambda(\overline{\lambda})}\zeta^{-p-1+q}g(\zeta)d\zeta=\int_{\Lambda(\overline{\mu})}\zeta^{-p-1+q}g(\zeta)d\zeta,$$
$$\Lambda(\overline{\lambda})=\Gamma_{(0,\infty)}(\overline{\lambda}),\quad \Lambda(\overline{\mu})=\Gamma_{(0,\infty)}(\overline{\mu}).$$

Аналогично для второго внутреннего интеграла в (2.20) находим

$$\int_0^\infty t^{p-q-m-1}(t+\lambda)^{-1}dt=\lambda^{p-q-m-1}\int_{\Lambda(\overline{\lambda})}\zeta^{p-q-m-1}(1+\zeta)^{-1}d\zeta, \tag{2.22}$$

причем величина $T(p,q)$ интеграла в правой части не зависит от $\lambda\in\Gamma^{(\varepsilon)}$. Объединяя равенства (2.20)–(2.22), для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ окончательно получаем

$$A_\varepsilon^{p-q}w_q^{(\varepsilon)}=\tau(p,q)G(p,q)T(p,q)\int_{\Gamma^{(\varepsilon)}}R(\lambda,A_\varepsilon)(\xi-x^*)d\lambda=\chi(p,q)(x^*-\xi). \tag{2.23}$$

Перейдем к завершающему этапу рассуждений.

3. Основная теорема

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть для вырабатываемых согласно* (1.2) *приближений* x_α *имеет место оценка* (1.7). *Предположим, что выполняются условия* A, B′, C′, E–H. *Тогда для всех достаточно малых* $q\in(0,q_0]$ *начальная невязка* $x^*-\xi$ *допускает истокообразное представление* $x^*-\xi=A^{p-q}v_q$, $v_q\in X$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении сделанных предположений $A_{\varepsilon_n}^{p-q}w_q^{(\varepsilon_n)}=A^{p-q}w_q$, где элемент w_q определен в (2.2), $\{w_q^{(\varepsilon_n)}\}$ — выделенная в § 2 последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty}\|w_q^{(\varepsilon_n)}-w_q\|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Полагаем $\nu=p-q-m$, так что $p-q=m+\nu$, $\nu\in(0,1)$. Имеет место оценка

$$\|A_{\varepsilon_n}^{p-q}w_q^{(\varepsilon_n)}-A^{p-q}w_q\|=\|A_{\varepsilon_n}^{m+\nu}w_q^{(\varepsilon_n)}-A^{m+\nu}w_q\|\le$$
$$\le\|A_{\varepsilon_n}^{m+\nu}-A^{m+\nu}\|_{\mathcal{L}(X)}\|w_q^{(\varepsilon_n)}\|+\|A^{m+\nu}\|_{\mathcal{L}(X)}\|w_q^{(\varepsilon_n)}-w_q\|. \tag{3.1}$$

Здесь

$$\|A_{\varepsilon_n}^{m+\nu}-A^{m+\nu}\|_{\mathcal{L}(X)}\le\|A_{\varepsilon_n}^{m}-A^{m}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^\nu\|_{\mathcal{L}(X)}+\|A_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{L}(X)}^m\|A_{\varepsilon_n}^\nu-A^\nu\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{3.2}$$

Нетрудно получить оценку

$$\|A_\varepsilon^m-A^m\|_{\mathcal{L}(X)}\le c_5\varepsilon\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]. \tag{3.3}$$

Кроме того, согласно предложению 1 из [1]

$$\|A_\varepsilon^\nu-A^\nu\|_{\mathcal{L}(X)}\le c_6\varepsilon^\nu\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]. \tag{3.4}$$

Константы c_5, c_6 в (3.3), (3.4) зависят лишь от A, p, q. Из (3.1)–(3.4) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\|A_{\varepsilon_n}^{p-q}w_q^{(\varepsilon_n)}-A^{p-q}w_q\|=0. \tag{3.5}$$

Поскольку согласно (2.23) элемент $A_\varepsilon^{p-q} w_q^{(\varepsilon)}$ не зависит от ε, то соотношение (3.5) дает $A^{p-q} w_q = \chi(p,q)(x^* - \xi)$. Следовательно, для $v_q = \chi(p,q)^{-1} w_q$ выполняется равенство

$$A^{p-q} v_q = x^* - \xi. \quad \Box$$

В заключение рассмотрим некоторые примеры процедур вида (1.2), к которым применимы полученные выше результаты.

4. Примеры методов регуляризации

В этом параграфе вкратце остановимся на некоторых примерах порождающих функций $\theta(\lambda, \alpha)$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям B–D, B′, C′, E–H. Одновременно конкретизируем вид получающихся процедур (1.2).

Пример 1. Функция

$$\theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1}, \quad \alpha \in (0, \alpha_0],$$

порождает вариант метода М.М. Лаврентьева

$$(A + \alpha E)(x_\alpha - \xi) = f - A\xi. \tag{4.1}$$

В рассматриваемом случае условие B выполнено с $D_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{-\alpha\}$. При проверке условий C, D в качестве контура Γ_α удобно выбирать ([7], с. 53)

$$\Gamma_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda + \alpha| = (1 - d_0)\alpha\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R_0\}. \tag{4.2}$$

Элементарные вычисления показывают, что неравенство (2.10) из [1] имеет место при всех $p \in (0, 1]$; условия D, B′, C′, E–H также выполняются.

Обобщением рассмотренного примера является

Пример 2. Зафиксируем натуральное N. Функция

$$\theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right)^N\right], \quad \alpha \in (0, \alpha_0],$$

порождает вариант итерированного метода М.М. Лаврентьева: $x_\alpha = x_\alpha^{(N)}$, где $x_\alpha^{(0)} = \xi$,

$$(A + \alpha E)x_\alpha^{(k+1)} = \alpha x_\alpha^{(k)} + f, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1. \tag{4.3}$$

В данном случае, как и в примере 1, $D_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{-\alpha\}$. Выбирая контур Γ_α в соответствии с (4.2) и проводя несложные выкладки, убеждаемся, что условия C, D выполняются для любого $p \in (0, N]$. Выполнение условий B′, C′, E–H проверяется непосредственно.

Отметим, что процедуры (4.1) и (4.3) обладают свойством “насыщения” в том смысле, что величина p в оценке скорости сходимости (1.7) не может принимать значений, больших единицы и N соответственно, даже если показатель в истокообразном представлении (1.6) сколь угодно большой. Следующие примеры порождающих функций свободны от этого недостатка.

Пример 3. Функция

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda/\alpha}), & \lambda \neq 0; \\ \frac{1}{\alpha}, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

порождает вариант метода установления ([7], с. 53): $x_\alpha = u(\alpha^{-1})$, где функция $u = u(t)$ является решением задачи Коши для операторного дифференциального уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f, \quad u(0) = \xi. \tag{4.5}$$

Нетрудно проверить, что функция (4.4) аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В рассматриваемом случае удобно положить $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha$. Рассуждения, аналогичные ([7], с. 51–53), показывают, что если условие A выполняется с $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, то условие C имеет место для любого $p > 0$. Последнее означает, что процесс (4.5) свободен от насыщения. Условия D, B′, C′, E–H при этом также выполняются.

Замечание 2. Во всех вышеприведенных примерах условие G выполняется с константой $M(\alpha, \varepsilon)$, для которой справедлива оценка из замечания 1.

Пример 4. Определим функцию

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}[1 - (1 - \mu_0\lambda)^{1/\alpha}], & \lambda \neq 0; \\ \mu_0/\alpha, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

где μ_0 — положительная константа, параметр регуляризации α принимает значения $1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{N}, ...$ Непосредственно проверяется, что при этих значениях α функция (4.6) аналитична всюду в $\mathbb{C}$. Предположим, что условие A выполняется при некотором $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$, и, кроме того, $\mu_0 < \|A\|^{-1}_{\mathcal{L}(X)}\sqrt{2\cos 2\varphi_0}$. В качестве Γ_α, как и в примере 3, выберем $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha$. Аналогично ([7], с. 51–52) убеждаемся, что функция (4.6) удовлетворяет условиям C, D при любом $p > 0$. В данном случае схема (1.2) может быть реализована следующим образом: если $\alpha = \frac{1}{N}$, то полагаем $x_\alpha = x^{(N)}$, где $x^{(0)} = \xi$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \mu_0(Ax^{(k)} - f), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{4.7}$$

Полученный процесс также свободен от насыщения. Таким образом, к методу (4.7) применимы все результаты из [1]. Перенос утверждения теоремы 1 на функцию (4.7) требует дополнительного исследования.

В заключение отметим, что условию A удовлетворяет каждый из следующих классов операторов $A \in \mathcal{L}(X)$.

1) Самосопряженные неотрицательные операторы $A^* = A \geq 0$ в гильбертовом пространстве X. В этом случае можно положить $c_0 = 1$, φ_0 — любое из интервала $(0, \pi)$.

2) Аккретивные операторы в гильбертовом пространстве, т. е. операторы, удовлетворяющие условию ([8], с. 350)

$$\mathrm{Re}\,(Ax, x) \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

В этом случае φ_0 — любое из $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

3) Спектральные операторы скалярного типа в банаховом пространстве, спектр которых принадлежит $K(\psi_0)$, $\psi_0 \in (0, \pi)$ ([9], с. 41). Здесь φ_0 — любое из (ψ_0, π).

4) Операторы A в банаховом пространстве X такие, что $\sigma(A) \subset K(\psi_0)$, $\psi_0 \in (0, \pi)$, и имеет место оценка

$$\|R(-t, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c_7}{t} \quad \forall t > 0.$$

Автор признателен проф. А.Б. Бакушинскому за полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Кокурин М.Ю. *Условие истокопредставимости и оценки скорости сходимости методов регуляризации линейных уравнений в банаховом пространстве.* I // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 8. – С. 51–59.
2. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems.* – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 322 p.
3. Кокурин М.Ю. *Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач.* – Йошкар-Ола: Изд-во Марийск. ун-та, 1998. – 292 с.

4. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 830 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – 5-е изд. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
6. Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры, интегрирование мер.* – М.: Наука, 1967. – 396 с.
7. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
8. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Спектральные операторы.* – М.: Мир, 1974. – 662 с.

Марийский государственный университет

Поступила
16.10.1999