ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.9

А.И. БУЛГАКОВ, Л.И. ТКАЧ

ВОЗМУЩЕНИЕ ОДНОЗНАЧНОГО ОПЕРАТОРА МНОГОЗНАЧНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С НЕВЫПУКЛЫМИ ОБРАЗАМИ

В работе рассматривается включение, правая часть которого представляет собой многозначный оператор, состоящий из алгебраической суммы значений однозначного оператора и значений многозначного отображения типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами. Изучение такого включения продиктовано тем, что к такому виду включения сводятся вопросы разрешимости краевых задач для дифференциальных включений, когда линейные краевые условия (линейный вектор-функционал) "подвергаются" некоторым возмущениям, которые можно представить в виде нелинейного вектор-функционала, определенного на пространстве непрерывных функций. Кроме того, топологические свойства множества решений таких краевых задач достаточно эффективно исследуются с помощью рассматриваемого здесь включения.

Как оказалось, вопросы о структуре множества решений исследуемого включения можно изучать с помощью методов, предложенных в [1]. Здесь формулируются условия, когда замыкание в пространстве непрерывных функций множества решений включения совпадает с множеством решений "овыпукленного" включения, а также "бэнг-бэнг" принцип. Кроме того, доказывается, что пересечение замыканий в пространстве непрерывных функций множеств δ-решений включения совпадает с множеством решений "овыпукленного" включения. Отметим, что результат о δ-решениях включения уточняет результат [2], а также дополняет результаты из ([3]; [4], с. 62; [5], [6]), в случае, когда многозначное отображение не удовлетворяет условию Липшица или более общему условию, когда расстояние по Хаусдорфу между значениями многозначного отображения не оценивается функцией Камке.

Обозначения и некоторые определения

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Пусть $U \subset X$, обозначим $\overline{U}$ — замыкание, а $\operatorname{co} U$ — выпуклую оболочку множества U; $\overline{\operatorname{co}} U = \overline{\operatorname{co} U}$; $\operatorname{ext} U$ — множество крайних точек множества U; $\overline{\operatorname{ext}} U = \overline{\operatorname{ext} U}$; $\|U\|_X = \sup\{\|u\| : u \in U\}$; $B_X[u; r]$ — открытый шар пространства X с центром в точке u и радиусом $r > 0$; $U^\varepsilon \equiv \overline{\bigcup\limits_{u\in U} B_X[u;\varepsilon]}$ — замкнутая ε-окрестность множества U, если $\varepsilon > 0$, и $U^0 \equiv \overline{U}$; $2^X(\Omega(X))$ — множество всех непустых, ограниченных (непустых, ограниченных, выпуклых) подмножеств пространства X.

Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \subset X$ и $h^+_X[\Phi_1;\Phi_2] = \sup\{\rho_X[y;\Phi_2] : y \in \Phi_1\}$, где $\rho_X[\cdot;\cdot]$ — расстояние между точкой и множеством в пространстве X, $h_X[\Phi_1;\Phi_2] = \max\{h^+_X[\Phi_1;\Phi_2],\ h^+_X[\Phi_2;\Phi_1]\}$ — хаусдорфово расстояние между множествами Φ_1 и Φ_2.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — измеримое по Лебегу множество, причем $\mu(\mathcal{U}) > 0$, где μ — мера Лебега. Обозначим через $L^n(\mathcal{U})$ пространство функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с суммируемыми по Лебегу компонентами и нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|\, ds$; $\mathrm{C}^n[a,b]$ — пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$.

Будем говорить, что множество $\Psi \subset L^n[a,b]$ *выпукло по переключению*, если для любых измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset [a,b]$ таких, что $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = [a,b]$ и любых $x, y \in \Psi$, справедливо включение $\chi(\mathcal{U}_1)x + \chi(\mathcal{U}_2)y \in \Psi$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим через $\Pi[L^n[a,b]\,]$ $(\Omega(\Pi[L^n[a,b]\,])\,)$ множество всех непустых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению (всех непустых, выпуклых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению) подмножеств из $L^n[a,b]$.

Непрерывность многозначных отображений понимается по Хаусдорфу. Измеримость множеств везде понимается по Лебегу, измеримость многозначных отображений будем понимать в смысле ([7], с. 338).

Ниже, если пространство $X = \mathbb{R}^n$, то для сокращения записи индексы в обозначении расстояний опускаем.

Основные результаты

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in f(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $f : C^n[a,b] \to C^n[a,b]$ — вполне непрерывный оператор, многозначный оператор $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]\,]$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset C^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Линейный непрерывный интегральный оператор $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ определен равенством

$$(Vz)(t) = \int_a^b V(t,s)z(s)ds, \quad t \in [a,b] \tag{2}$$

и переводит каждое слабо компактное в $L^n[a,b]$ множество в компактное в $C^n[a,b]$.

Под *решением включения* (1) будем понимать такой элемент $x \in C^n[a,b]$, для которого справедливо включение (1). Таким образом, каждому решению x включения (1) соответствует такой $z \in L^n[a,b]$, что $z \in \Phi(x)$ и $x = f(x) + Vz$.

Отметим, что многозначный оператор Φ, вообще говоря, может быть и невольтерровым оператором. Кроме того, значения $\Phi(x)$ во включении (1) не предполагаются выпуклыми множествами, поэтому образ $V\Phi(x)$ в (1), вообще говоря, не только не является выпуклым, но и замкнутым множеством пространства $C^n[a,b]$. В связи с этим даже вопросы существования решений включения (1) нельзя исследовать с помощью методов неподвижной точки (теоремы Какутани ([8], с. 630)), принципа сжимающих многозначных отображений ([7], с. 42).

Ниже утверждения, которые приводятся без доказательства, доказываются аналогично соответствующим результатам из [1].

Пусть многозначный оператор $\Xi : C^n[a,b] \to 2^{C^n[a,b]}$ определен равенством

$$\Xi(x) = f(x) + V\Phi(x). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть U — такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, что $\Xi(U) \subset U$, где оператор $\Xi : C^n[a,b] \to 2^{C^n[a,b]}$ определен равенством (3). И пусть отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]\,]$ непрерывно на U. Тогда для любой функции $w \in L^n[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует решение $x \in U$ включения (1) и существует $z \in \Phi(x)$, удовлетворяющий равенству $x = f(x) + Vz$, для которых для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство*

$$\|z - w\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \rho_{L^n(\mathcal{U})}[w; \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}). \tag{4}$$

Если $\Phi : C^n[a,b] \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]\,])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Далее приведем достаточные условия существования выпуклого, ограниченного, замкнутого множества $U \subset C^n[a,b]$, для которого справедливо включение $\Xi(U) \subset U$.

Пусть $C^1_+[a,b]$ — конус неотрицательных функций из $C^1[a,b]$.

Будем говорить, что *для непрерывного оператора* $\Delta^* : C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$ *сходятся последовательные приближения*, если для любой функции $y_0 \in C^1_+[a,b]$, удовлетворяющей неравенству $y_0 \le \Delta^* y_0$, последовательные приближения $y_{i+1} = \Delta^* y_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, сходятся в пространстве $C^1[a,b]$ к функции y, не зависящей от функции y_0.

Будем говорить, что отображение f и произведение $V\Phi$ *обладают свойством* $(V\Gamma_1; P_1)$, если найдутся изотонные непрерывные операторы $\Gamma_1 : C^1_+[a,b] \to L^1[a,b]$ и $P_1 : C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$, удовлетворяющие условиям: для любого $x \in C^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ для отображения Γ_1 выполняется неравенство

$$\|\Phi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} \le \|\Gamma_1 Z(x)\|_{L^1(\mathcal{U})};$$

для любого $x \in C^n[a,b]$ для отображения P_1 выполняется оценка

$$Z(f(x)) \le P_1(Z(x));$$

для непрерывного оператора $\Delta_1 : C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$, определенного равенством

$$(\Delta_1 y)(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\Gamma_1 y)(s)\,ds + P_1(y)(t), \tag{5}$$

сходятся последовательные приближения. Здесь $|V(t,s)|$ — согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$-матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), непрерывный оператор $Z : C^n[a,b] \to C^1_+[a,b]$ определен равенством

$$(Zx)(t) = |x(t)|, \quad t \in [a,b]. \tag{6}$$

Пусть $\omega \in C^1[a,b]$ — неподвижная точка оператора Δ_1, определенного равенством (5), и пусть непрерывное отображение $W : C^n[a,b] \to C^n[a,b]$ задано соотношением

$$(Wx)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } |x(t)| \le \omega(t), \\ \dfrac{x(t)}{|x(t)|}\omega(t), & \text{если } |x(t)| > \omega(t). \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_1; P_1)$. Тогда множество $U = \overline{\mathrm{co}}\,\Xi(W(C^n[a,b]))$ — выпуклый компакт пространства $C^n[a,b]$, для которого справедливо включение $\Xi(U) \subset U$, операторы W и Ξ определены равенствами* (7) *и* (3) *соответственно.*

Будем говорить, что отображение f и произведение $V\Phi$ *обладают свойством* $(V\Gamma_2; P_2)^\nu$ *на множестве* $U \subset C^n[a,b]$, если найдутся изотонные непрерывные операторы $\Gamma_2 : C^1_+[a,b] \to L^1[a,b]$ и $P_2 : C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$, удовлетворяющие условиям: для любых $x, y \in U$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ для отображения Γ_2 выполняется неравенство

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \le \|\Gamma_2 Z(x-y)\|_{L^1(\mathcal{U})}; \tag{8}$$

для любых $x, y \in U$ для отображения P_2 выполняется оценка

$$Z(f(x) - f(y)) \le P_2(Z(x-y));$$

для непрерывного оператора $\Delta_2 : C^1_+[a,b] \to C^1_+[a,b]$, определенного равенством

$$(\Delta_2 z)(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\Gamma_2 z)(s)\,ds + P_2(z)(t) + \nu(t),$$

сходятся последовательные приближения. Здесь $|V(t,s)|$ — согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$-матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), $\nu \in C^1_+[a,b]$, Z определен соотношением (6).

Если $U = C^n[a,b]$, то в этом случае будем говорить, что отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_2; P_2)^\nu$.

Рассмотрим в пространстве $C^1[a,b]$ уравнение

$$\xi_\nu(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\Gamma_2\xi_\nu)(s)\,ds + P_2(\xi_\nu)(t) + \nu(t). \tag{9}$$

Пусть $q \in C^n[a,b]$ и $w_0 \in L^n[a,b]$. Представим функцию q в виде равенства

$$q = f(q) + Vw_0 + e, \tag{10}$$

где $e = q - f(q) - Vw_0$.

Пусть далее функция $\varkappa \in L^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q)] \le \int_{\mathcal{U}} \varkappa(s)\,ds, \tag{11}$$

а функция $\nu_\varepsilon \in C^1_+[a,b]$ для любого $t \in [a,b]$ определена соотношением

$$\nu_\varepsilon(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\varepsilon + \varkappa(s))\,ds + |e(t)|, \quad \varepsilon \ge 0, \tag{12}$$

где $|V(t,s)|$ — согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$-матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), а e — функция в правой части равенства (9).

Теорема 2. *Пусть отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_2; P_2)^{\nu_\varepsilon}$ на множестве $U \subset C^n[a,b]$, где функция ν_ε определена равенством (12), $\varepsilon \ge 0$, и пусть $q \in U$. Тогда для каждого решения $x \in U$ ($x = f(x) + Vz$, $z \in \Phi(x)$) включения (1), удовлетворяющего при любом измеримом множестве $\mathcal{U} \subset [a,b]$ неравенству (4), в котором $w = w_0$, при любом $t \in [a,b]$ выполняется неравенство $|x(t) - q(t)| \le \xi_\varepsilon(t)$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется оценка*

$$|z(t) - w_0(t)| \le \varepsilon + \varkappa(t) + (\Gamma_2\xi_\varepsilon)(t), \tag{13}$$

где ξ_ε — решение уравнения (9) при $\nu = \nu_\varepsilon$, а Γ_2, $\varkappa$ удовлетворяют неравенствам (8), (11) соответственно.

Следствие 1. Пусть U — такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, что $\Xi(U) \subset U$, где оператор $\Xi : C^n[a,b] \to 2^{C^n[a,b]}$ определен равенством (3). Пусть отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_2; P_2)^{\nu_\varepsilon}$ на множестве U, где функция ν_ε определена равенством (12), $\varepsilon > 0$ и пусть функция q, представимая равенством (10), принадлежит U. Тогда существует решение x включения (1) и существует $z \in \Phi(x)$, удовлетворяющий равенству $x = f(x) + Vz$, для которых при любом $t \in [a,b]$ выполняется неравенство $|x(t) - q(t)| \le \xi_\varepsilon(t)$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется оценка (13), где ξ_ε — решение уравнения (9) при $\nu = \nu_\varepsilon$.

Если $\Phi : C^n[a,b] \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Замечание 1. Из леммы 1 и теоремы 2 вытекает, что если заменить первое условие следствия 1 на свойство $(V\Gamma_1; P_1)$, то утверждение следствия 1 справедливо и в этом случае.

Замечание 2. Отметим, что следствие 1 дает несколько больше, чем просто условия существования решения включения (1). Оно дает способ нахождения приближенного решения путем подбора функции $q \in C^n[a,b]$. При этом функция ξ_ε, зависящая от функций $q \in C^n[a,b]$ и $w_0 \in L^n[a,b]$, дает оценку погрешности приближенного решения (функции q) включения (1).

Будем говорить, что функция $x \in C^n[a,b]$ является *квазирешением* включения (1), если существует такая последовательность $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots$, что $x_i = f(x) + Vw_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Пусть $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}(U)$) — множество всех квазирешений (принадлежащих множеству U) включения (1). Далее, будем считать, что $x \in \mathcal{H}(U)$ тогда и только тогда, когда $x \in U$ и существует такая последовательность $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots$, что для любого $i = 1, 2, \dots$ $x_i = f(x) + Vw_i \in U$ и $x_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим включение

$$x \in f(x) + V\overline{\text{co}}\Phi(x). \tag{14}$$

Пусть H_{co} ($H_{\text{co}}(U)$) — множество всех решений (принадлежащих множеству U) включения (14).

Теорема 3. $H_{\text{co}} = \mathcal{H}$.

Замечание 3. Отметим, что теорема 3 справедлива без предположения какой-либо непрерывности операторов f и Φ.

Следствие 2. Пусть U — такое множество пространства $C^n[a,b]$, что $\Xi(U) \subset U$, где оператор Ξ определен равенством (3). Тогда $H_{\text{co}}(U) = \mathcal{H}(U)$.

Замечание 4. Отметим, что если отображение Φ в следствии 2 полунепрерывно сверху или снизу и U — выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, то $H_{\text{co}}(U) = \mathcal{H}(U) \neq \emptyset$.

Пусть отображение $F : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает свойствами: при каждом фиксированном $x \in C^n[a,b]$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо и удовлетворяет равенству

$$\Phi(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in F(t,x) \text{ при почти всех (п. в.) } t \in [a,b]\}. \tag{15}$$

Согласно [1] такое отображение F существует.

Замечание 5. Отметим,что если Φ есть многозначный оператор Немыцкого, порожденный функцией $\widetilde{F} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, то для оператора Немыцкого отображение $F : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ определяется равенством $F(t,x) = \widetilde{F}(t, x(t))$. Поэтому в этом случае можно отождествить F с $\widetilde{F}$. В связи с этим в общем случае естественно назвать *отображение* $F : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$*, определенное равенством* (15)*, отображением, порождающим оператор* Φ.

Далее везде $F : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ означает отображение, порождающее оператор Φ. Кроме того, далее для любого $x \in C^n[a,b]$ измеримая функция $\|F(\cdot, x)\| : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ определяется равенством $\|F(\cdot, x)\|(t) = \|F(t,x)\|$.

Лемма 2. *Для любого* $x \in C^n[a,b]$ *существует такой* $v(x) \in \Phi(x)$*, что для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *выполняется равенство*

$$\|v(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} = \|\Phi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} \|F(t,x)\|\, dt. \tag{16}$$

Действительно, рассмотрим отображение $P : [a,b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, заданное соотношением

$$P(t) = \{y \in F(t,x) : |y| = \|F(t,x)\|\}.$$

Согласно ([7], с. 347) отображение P измеримо. Поэтому найдется функция $v(x) \in \Phi(x)$, которая при п. в. $t \in [a,b]$ удовлетворяет равенству $|v(x)(t)| = \|F(t,x)\|$. А это доказывает равенства (16).

Следствие 3. Для каждого ограниченного множества $U \subset C^n[a,b]$ множество $\{\|F(\cdot, x)\| : x \in U\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Действительно, поскольку образ $\Phi(U)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то из равенства (16) следует, что множество $\{\|F(\cdot,x)\| : x \in U\}$ также имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Теорема 4. *Отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]\,]$ непрерывно на $U \subset C^n[a,b]$ тогда и только тогда, когда при п. в. $t \in [a,b]$ отображение $F(t,\cdot)$ непрерывно на U.*

Доказательство. Пусть при п. в. $t \in [a,b]$ отображение $F(t,\cdot)$ непрерывно на U и пусть $x, y \in U$ и
$$h_{L^n[a,b]}[\Phi(x);\Phi(y)] = h^+_{L^n[a,b]}[\Phi(x);\Phi(y)].$$
Тогда согласно лемме 1 из [1] получаем неравенство
$$h_{L^n[a,b]}[\Phi(x);\Phi(y)] = \int_a^b h^+[F(t,x);F(t,y)]\,dt \le \int_a^b h[F(t,x);F(t,y)]\,dt.$$
Из последней оценки, а также из следствия 3 вытекает непрерывность отображения Φ.

Далее, пусть $x, y \in U$ и $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — произвольное измеримое множество. Обозначим
$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{t \in [a,b] : h^+[F(t,x);F(t,y)] \ge h^+[F(t,y);F(t,x)]\}.$$
Тогда в силу леммы 1 из [1] получаем равенства
$$\int\limits_{\mathcal{U}} h[F(t,x);F(t,y)]\,dt = \int\limits_{\mathcal{U}\cap\widetilde{\mathcal{U}}} h^+[F(t,x);F(t,y)]\,dt + \int\limits_{([a,b]\setminus\widetilde{\mathcal{U}})\cap\mathcal{U}} h^+[F(t,y);F(t,x)]\,dt =$$
$$= h^+_{L^n(\mathcal{U}\cap\widetilde{\mathcal{U}})}[\Phi(x);\Phi(y)] + h^+_{L^n(([a,b]\setminus\widetilde{\mathcal{U}})\cap\mathcal{U})}[\Phi(y);\Phi(x)]. \tag{17}$$
Поскольку имеют место соотношения
$$h^+_{L^n(\mathcal{U}\cap\widetilde{\mathcal{U}})}[\Phi(x);\Phi(y)] \le h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\Phi(y)],$$
$$h^+_{L^n(([a,b]\setminus\widetilde{\mathcal{U}})\cap\mathcal{U})}[\Phi(y);\Phi(x)] \le h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\Phi(y)],$$
то из равенств (17) вытекают оценки
$$\int_{\mathcal{U}} h[F(t,x);F(t,y)]\,dt \le 2h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x);\Phi(y)] \le 2h_{L^n[a,b]}[\Phi(x);\Phi(y)].$$
Из доказанного неравенства следует, что если Φ непрерывно на $U \subset C^n[a,b]$, то при п. в. $t \in [a,b]$ отображение $F(t,\cdot)$ также непрерывно на U. $\square$

Пусть $U \subset C^n[a,b]$. Рассмотрим многозначное отображение $M_U : U \times (0,\infty) \to \Omega(U)$, определенное равенством
$$M_U(x;\delta) = \overline{B_{C^n[a,b]}[x;\delta]} \cap U. \tag{18}$$

Лемма 3. *Пусть U — выпуклый компакт пространства $C^n[a,b]$. Тогда многозначное отображение $M_U : U \times (0,\infty) \to \Omega(U)$, определенное равенством (18), непрерывно.*

Доказательство. Прежде всего, отображение M_U полунепрерывно сверху. Покажем далее, что отображение M_U полунепрерывно снизу. Действительно, пусть $x_i(\in U) \to x$ в $C^n[a,b]$ и $\delta_i(\in (0,\infty)) \to \delta(\in (0,\infty))$ в $\mathbb{R}^1$ при $i \to \infty$. И пусть $z \in M_U(x;\delta)$. Не уменьшая общности, будем считать, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ $[x,z] \cap \overline{B_{C^n[a,b]}[x_i;\delta_i]} \ne \emptyset$, где $[x,z]$ — отрезок, соединяющий точки x и z. Пусть $z_i \in [x,z] \cap \overline{B_{C^n[a,b]}[x_i;\delta_i]}$ такая, что
$$\|z - z_i\|_{C^n[a,b]} = \rho_{C^n[a,b]}[z;\ [x,z] \cap \overline{B_{C^n[a,b]}[x_i;\delta_i]}\,]. \tag{19}$$

Очевидно, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ $z_i \in M_U(x_i; \delta_i)$. Покажем, что $z_i \to z$ в $C^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Действительно, предположим противное. Тогда, не уменьшая общности, будем считать, что найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\|z - z_i\|_{C^n[a,b]} \geq \varepsilon. \tag{20}$$

Пусть $\tilde{z} \in [x, z]$ удовлетворяет равенству $\|z - \tilde{z}\|_{C^n[a,b]} = \varepsilon/2$. Так как $\tilde{z}$ — внутренняя точка открытого шара $B_{C^n[a,b]}[x; \delta]$, то найдется такое число $j = 1, 2, \ldots$, что $\tilde{z} \in B_{C^n[a,b]}[x_j; \delta_j]$, но это противоречит неравенству (20) и определению функций z_i (см. (19)). □

Пусть U — компакт пространства $C^n[a, b]$. Определим отображение $\varphi_U : [a, b] \times U \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ соотношением

$$\varphi_U(t, x, \delta) = \max_{y \in M_U(x;\delta)} h[F(t, x); F(t, y)], \tag{21}$$

где отображение $M_U : U \times (0, \infty) \to \Omega(U)$ задано равенством (18).

Лемма 4. *Пусть U — выпуклый компакт пространства $C^n[a, b]$ и пусть отображение $\Phi : C^n[a, b] \to \Pi[L^n[a, b]\,]$ непрерывно на U. Тогда отображение $\varphi_U : [a, b] \times U \times (0, \infty) \to [0, \infty)$, определенное равенством (21), обладает свойством: для любых $(x, \delta) \in U \times (0, \infty)$ функция $\varphi_U(\cdot, x, \delta)$ измерима; для п. в. $t \in [a, b]$ отображение $\varphi_U(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно по совокупности аргументов и*

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \delta \to 0+0}} \varphi_U(t, z, \delta) = 0; \tag{22}$$

для любых $(t, x) \in [a, b] \times U$ функция $\varphi_U(t, x, \cdot)$ не убывает.

Доказательство. Прежде всего, очевидно, что функция $\varphi_U(\cdot, \cdot, \cdot)$ не убывает по третьему аргументу. Далее, согласно теореме 4 при п. в. $t \in [a, b]$ отображение $F(t, \cdot)$ непрерывно. Пусть $t \in [a, b]$ — такая точка, в которой отображение $F(t, \cdot)$ непрерывно на U. Рассмотрим отображение $\varphi_U(t, \cdot, \cdot)$. Покажем, что это отображение непрерывно по совокупности аргументов.

Вначале покажем, что $\varphi(t, \cdot, \cdot)$ полунепрерывно сверху. Действительно, пусть последовательности $x_i (\in U) \to x$ в $C^n[a, b]$ и $\delta_i (\in (0, \infty)) \to \delta (\in (0, \infty))$. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть для любого $i = 1, 2, \ldots$ функции $y_i \in M_U(x_i; \delta_i)$ удовлетворяют неравенству

$$\varphi_U(t, x_i, \delta_i) \leq h[F(t, x); F(t, y_i)] + \varepsilon. \tag{23}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $y_i \to y$ в $C^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Согласно лемме 3 $y \in M_U(x; \delta)$. Отсюда согласно неравенствам (23) для любого $i = 1, 2, \ldots$ получаем оценку

$$\varphi_U(t, x_i, \delta_i) \leq h[F(t, y); F(t, y_i)] + \varphi_U(t, x, \delta) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \varphi_U(t, x_i, \delta_i) \leq \varphi_U(t, x, \delta).$$

Теперь покажем, что функция $\varphi_U(t, \cdot, \cdot)$ полунепрерывна снизу. Действительно, пусть последовательности $\{x_i\}$ и δ_i выбраны, как в предыдущем случае. И пусть функция $y \in M_U(x; \delta)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi_U(t, x, \delta) \leq h[F(t, x); F(t, y)] + \varepsilon. \tag{24}$$

Согласно лемме 3 найдется такая последовательность $y_i \in M_U(x_i; \delta_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, что $y_i \to y$ в $C^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Поэтому из неравенства (24) получаем оценку

$$\varphi_U(t, x, \delta) \leq h[F(t, x); F(t, x_i)] + h[F(t, y_i); F(t, y)] + \varphi_U(t, x_i, \delta_i) + \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем соотношение

$$\varphi_U(t, x, \delta) \leq \underline{\lim_{i \to \infty}} \varphi_U(t, x_i, \delta_i).$$

Таким образом, функция $\varphi_U(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна по совокупности аргументов.

Далее, поскольку множество $U \subset C^n[a,b]$ компактно, а отображение $F(t,\cdot)$ непрерывно, то из определения функции $\varphi_U(\cdot,\cdot,\cdot)$ вытекает равенство (22).

Пусть $Q \subset M_U(x;\delta)$ — счетное всюду плотное множество в $M_U(x;\delta)$. Тогда из равенства

$$\varphi_U(t,x,\delta) = \sup_{y \in Q} h[F(t,x);F(t,y)]$$

вытекает измеримость функции $\varphi_U(\cdot,x,\delta)$. $\square$

Обозначим через $K([a,b]\times(0,\infty))$ множество всех функций $\eta : [a,b]\times(0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих свойством: при каждом $\delta \in (0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,\delta) \in L^1[a,b]$; при п. в. $t \in [a,b]$ функция $\eta(t,\cdot)$ не убывает и удовлетворяет равенству $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \eta(t,\delta) = 0$.

Пусть U — выпуклый компакт пространства $C^n[a,b]$. Будем говорить, что отображение $F : [a,b]\times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, *равномерно непрерывно на множестве U относительно функции $\eta \in K([a,b]\times(0,\infty))$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при п. в. $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ выполняется неравенство

$$\varphi_U(t,x,\delta(\varepsilon)) \le \eta(t,\varepsilon), \tag{25}$$

где отображение $\varphi_U : [a,b]\times U\times(0,\infty) \to [0,\infty)$ определено соотношением (21).

Пусть U — выпуклый компакт пространства $C^n[a,b]$. Определим функцию $\lambda_U : [a,b]\times(0,\infty) \to [0,\infty)$ соотношением

$$\lambda_U(t,\delta) = \max_{x\in U} \varphi_U(t,x,\delta), \tag{26}$$

где функция $\varphi_U : [a,b]\times U\times(0,\infty) \to [0,\infty)$ определена равенством (21).

Из леммы 4 вытекает

Следствие 4. Пусть U — выпуклый компакт пространства $C^n[a,b]$ и пусть отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]\,]$ непрерывно на U. Тогда функция $\lambda_U : [a,b]\times(0,\infty) \to [0,\infty)$, определенная равенством (26), принадлежит множеству $K([a,b]\times(0,\infty))$ и отображение $F : [a,b]\times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор Φ, равномерно непрерывно на множестве U относительно функции λ_U.

Пусть функция $\eta \in K([a,b]\times(0,\infty))$. Для любого $\delta \in (0,\infty)$ определим многозначное отображение $\Phi_{\eta(\delta)} : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]\,]$ равенством

$$\Phi_{\eta(\delta)}(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in F(t,x)^{\eta(t,\delta)} \text{ при п. в. } t \in [a,b]\}.$$

В отличии от ([4], с. 60) под *δ-решением* включения (1) будем понимать непрерывную функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую включению

$$x \in \overline{B_{C^n[a,b]}[f(x);\delta]} + V\Phi_{\eta(\delta)}(x).$$

Обозначим через $H_{\eta(\delta)}(U)$ множество всех δ-решений включения (1), принадлежащих множеству $U \subset C^n[a,b]$.

Теорема 5. *Пусть U — выпуклый компакт пространства $C^n[a,b]$, удовлетворяющий условию $\Xi(U) \subset U$, где оператор $\Xi : C^n[a,b] \to 2^{C^n[a,b]}$ определен равенством (3). Далее, пусть отображение $F : [a,b]\times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]\,]$, равномерно непрерывно на U относительно функции $\eta \in K([a,b]\times(0,\infty))$. Тогда справедливо равенство*

$$H_{\mathrm{co}}(U) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)}, \tag{27}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(U)}$ — замыкание множества $H_{\eta(\delta)}(U)$ в пространстве $C^n[a,b]$.

Доказательство. Вначале покажем, что $H_{\rm co}(U) \subset \bigcap\limits_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)}$. Пусть $x \in H_{\rm co}(U)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $\delta > 0$ существует $y \in H_{\eta(\delta)}(U)$, для которого справедливо неравенство $\|x-y\|_{C^n[a,b]} < \varepsilon$. Действительно, согласно теореме 3 x — квазирешение включения (1). Это означает, что найдется такая последовательность $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots$, что $x_i = f(x) + Vw_i \to x$ в $C^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Отсюда и из неравенства (25) при всех $i \geq i(\delta)$ и при п. в. $t \in [a, b]$ получаем оценки

$$\rho[w_i(t); F(t, x_i)] \leq h[F(t, x); F(t, x_i)] \leq \varphi_U(t, x, \|x - x_i\|_{C^n[a,b]}) \leq \eta(t, \delta) \tag{28}$$

и включение $f(x) \in \overline{B_{C^n[a,b]}[f(x_i); \delta]}$. Из условия теоремы вытекает, что для любого $i = 1, 2, \dots$ $x_i \in U$. Таким образом, для любого $i \geq i(\delta)$ x_i — δ-решение включения (1), принадлежащее множеству U.

Пусть теперь $\bar{i}$ — такое число, для которого справедливы неравенства $\|x - x_{\bar{i}}\|_{C^n[a,b]} < \varepsilon$ и $\bar{i} \geq i(\delta)$. Тогда $y = x_{\bar{i}}$ — требуемое δ-решение включения (1). Поэтому для любого $\delta > 0$ $x \in \overline{H_{\eta(\delta)}(U)}$ и, следовательно, $H_{\rm co}(U) \subset \bigcap\limits_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)}$. Покажем, что $\bigcap\limits_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)} \subset H_{\rm co}(U)$. Пусть $x \in \bigcap\limits_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)}$. Это означает, что для любого $i = 1, 2, \dots$ найдется $x_i \in H_{\eta(1/i)}(U)$, удовлетворяющий неравенству $\|x - x_i\|_{C^n[a,b]} < 1/i$. Пусть для каждого $i = 1, 2, \dots$ функции $v_i \in B_{C^n[a,b]}[f(x_i); 1/i]$ и $w_i \in \Phi_{\eta(1/i)}(x_i)$ такие, что

$$x_i = v_i + Vw_i. \tag{29}$$

Далее, пусть для каждого $i = 1, 2, \dots$ функция $\widetilde{w_i} \in \Phi(x)$ при п. в. $t \in [a, b]$ определяется равенством

$$|w_i(t) - \widetilde{w_i}(t)| = \rho[w_i(t); F(t, x)].$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty} \|w_i - \widetilde{w_i}\|_{L^n[a,b]} = 0. \tag{30}$$

Действительно, т. к. функция $\eta \in K([a, b] \times (0, +\infty))$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\tau(\varepsilon) > 0$, для которого выполняется неравенство

$$\int_a^b \eta(t, \tau(\varepsilon))\, dt < \varepsilon. \tag{31}$$

Далее, для числа $\tau(\varepsilon) > 0$ найдется положительное число $\nu(\varepsilon) < \tau(\varepsilon)$, для которого справедлива оценка (25). Пусть теперь номер $i(\varepsilon)$ такой, что при всех $i \geq i(\varepsilon)$ выполняются неравенства $\|x - x_i\|_{C^n[a,b]} < \nu(\varepsilon)$ и $1/i < \tau(\varepsilon)$. Из определений функций w_i и $\widetilde{w_i}$, $i = 1, 2, \dots$, при п. в. $t \in [a, b]$ получаем соотношения

$$|w_i(t) - \widetilde{w_i}(t)| \leq h[F(t, x_i)^{\eta(t,1/i)}; F(t, x)] \leq$$
$$\leq \eta(t, 1/i) + h[F(t, x); F(t, x_i)] \leq \eta(t, 1/i) + \varphi(t, x, \|x - x_i\|_{C^n[a,b]}).$$

Отсюда и из оценки (31) при всех $i \geq i(\varepsilon)$ получаем неравенства

$$\int_a^b |w_i(t) - \widetilde{w_i}(t)| dt \leq \int_a^b \eta(t, 1/i)\, dt + \int_a^b \eta(t, \tau(\varepsilon))\, dt < 2\varepsilon.$$

Таким образом, равенство (30) доказано.

Далее, т. к. последовательность $\widetilde{w_i}$, $i = 1, 2, \dots$, слабо компактна в $L^n[a, b]$, то, не уменьшая общности, будем считать, что $\widetilde{w_i} \to w$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Согласно леммам 6, 7 из [1] $w \in \overline{\rm co}\Phi(x)$. Далее, из равенства (30) следует, что $w_i \to w$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Следовательно, не уменьшая общности, можно считать, что $Vw_i \to Vw$ в $C^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Поэтому, переходя в равенстве (29) к пределу при $i \to \infty$ и учитывая, что $v_i \to f(x)$ в $C^n[a, b]$

при $i \to \infty$, получаем представление $x = f(x) + Vw$, т. е. $x \in H_{\rm co}(U)$. Таким образом, равенство (27) справедливо. $\square$

Замечание 6. Отметим, что естественно понимать под δ-решением функцию $x \in C^n[a, b]$, удовлетворяющую включению

$$x \in f(x) + V\Phi_{\eta(\delta)}(x).$$

Однако в этом случае теорема 5 будет справедливой, если для каждого $x \in \mathcal{H}(U)$ найдется такая последовательность $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, что $x_i = f(x) + Vw_i \to x$ в $C^n[a, b]$ при $i \to \infty$ и для любого $i = 1, 2, \ldots$ выполняется равенство $f(x_i) = f(x)$. Такие включения существуют (см. следствия 5, 6 и их доказательства).

Замечание 7. Поскольку $\overline{H(U)} = \overline{\bigcap\limits_{\delta>0} H_{\eta(\delta)}(U)}$, то, вообще говоря,

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U)} \neq \overline{\bigcap_{\delta>0} H_{\eta(\delta)}(U)}$$

(см. пример [4], с. 63).

Замечание 8. Отметим, что если Φ – оператор Немыцкого, то отображение $F : [a, b] \times C^n[a, b] \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор Φ, можно рассматривать на $\mathbb{R}^n$ (см. замечание 5). А т. к. $\mathbb{R}^n \subset C^n[a, b]$ (каждый элемент пространства $\mathbb{R}^n$ рассматривается как постоянная функция), то каждое ограниченное, замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ представляет собой компакт пространства $C^n[a, b]$. В связи с этим функцию $\varphi_U : [a, b] \times U \times (0, \infty) \to [0, \infty)$, определенную равенством (21), в данном случае можно определить на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ с помощью соотношения

$$\varphi(t, x, \delta) = \max_{y \in \overline{B[x;\delta]}} h[F(t, x); F(t, y)]. \tag{32}$$

При этом функция $\varphi : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to [0, \infty)$, определенная равенством (32), удовлетворяет утверждению леммы 4. Поэтому для оператора Немыцкого естественным образом можно уточнить определение равномерной непрерывности на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ относительно функции $\eta \in K([a, b] \times (0, \infty))$ (условие выпуклости множества U можно не требовать). При этом найдется хотя бы одна функция $\eta \in K([a, b] \times (0, \infty))$, относительно которой отображение F равномерно непрерывно на множестве U (см. следствие 4).

В связи с замечанием 8 для оператора Немыцкого уточним теорему 5 следующим образом (выполнение включения $\Xi(U) \subset U$, а также, что U — выпуклый компакт пространства $C^n[a, b]$, можно не предполагать).

Пусть $U \subset C^n[a, b]$. Обозначим

$$\widetilde{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (t, y) \in [a, b] \times U, \;\; x = y(t)\}.$$

Теорема 6. *Пусть U — ограниченное, замкнутое множество подпространства $C_0^n[a, b]$ пространства $C^n[a, b]$ и пусть Φ — оператор Немыцкого, порожденный отображением $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$. Далее, пусть выполняется включение $H_{\rm co}(U) \subset \mathcal{H}(U^\nu)$, где U^ν — замкнутая ν-окрестность множества U в подпространстве $C_0^n[a, b]$, и пусть отображение F равномерно непрерывно на множестве $\widetilde{U}$ относительно функции $\eta \in K([a, b] \times (0, \infty))$. Тогда справедливо равенство*

$$H_{\rm co}(U) = \bigcap_{\delta>0,\ \varepsilon>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U^\varepsilon)},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(U^\varepsilon)}$ — замыкание множества $H_{\eta(\delta)}(U^\varepsilon)$ в подпространстве $C_0^n[a, b]$.

Действительно, пусть $x \in H_{\rm co}(U)$. Покажем, что для любых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ решение $x \in \overline{H_{\eta(\delta)}(U^{\varepsilon})}$. Прежде всего отметим, что согласно условию теоремы $x \in \mathcal{H}(U^{\nu})$. Из этого вытекает существование такой последовательности функций $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, что последовательность $x_i = f(x) + Vw_i$, $i = 1, 2, \ldots$, обладает свойством $x_i \to x$ в $C^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Поскольку $x \in U$, то найдется такой номер $i(\varepsilon)$, что при всех $i \geq i(\varepsilon)$ справедливо включение $x_i \in U^{\varepsilon}$. Далее, согласно равномерной непрерывности отображения F относительно функции η, найдется такой номер $i(\delta, \varepsilon) \geq i(\varepsilon)$, что при всех $i \geq i(\delta, \varepsilon)$ и при п. в. $t \in [a, b]$ выполняется неравенство (28). Следовательно, при всех $i \geq i(\delta, \varepsilon)$ имеет место соотношение $x_i \in H_{\eta(\delta)}(U^{\varepsilon})$, а это означает, что $x \in \overline{H_{\eta(\delta)}(U^{\varepsilon})}$. Таким образом, $H_{\rm co}(U) \subset \bigcap\limits_{\delta > 0,\ \varepsilon > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U^{\varepsilon})}$. Противоположное включение доказывается аналогично доказательству теоремы 5.

Замечание 9. Отметим, что если $C_0^n[a, b] = C^n[a, b]$, то согласно теореме 3 включение $H_{\rm co}(U) \subset \mathcal{H}(U^{\nu})$ выполняется.

Замечание 10. Отметим, что если отображение F, порождающее оператор Немыцкого, непрерывно по совокупности аргументов, а функция $\eta : [a, b] \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ определяется равенством $\eta(t, \delta) = \delta$, то F равномерно непрерывна на любом $U \in {\rm comp}[\mathbb{R}^n]$ относительно этой функции η. Поэтому теорема 6 уточняет теорему 2.2 из [2] в случае, когда (1) — обыкновенное дифференциальное включение.

В качестве приложения теоремы 6 рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F_{\omega}(t, x(t)), \tag{33}$$

где $F_{\omega} : (-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to {\rm comp}[\mathbb{R}^n]$ — ω-периодическое по первому аргументу отображение. Пусть $C_0^n[0, \omega] = \{x \in C^n[0, \omega] : x(0) = x(\omega)\}$ и пусть $U(\omega)$ — ограниченное, замкнутое множество подпространства $C_0^n[0, \omega]$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in {\rm co}\, F_{\omega}(t, x(t)). \tag{34}$$

Пусть $H_{\rm co}(U(\omega))$ — множество всех решений включения (34), принадлежащих множеству $U(\omega)$. Пусть $\eta \in K([0, \omega] \times (0, \infty))$. Обозначим через $H_{\eta(\delta)}(U(\omega))$ множество всех δ-решений включения (33), принадлежащих множеству $U(\omega)$.

Следствие 5. Пусть отображение $F_{\omega} : (-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to {\rm comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори на $[0, \omega] \times \mathbb{R}^n$ и пусть F_{ω} равномерно непрерывно на множестве $\widetilde{U}$ относительно функции $\eta \in K([0, \omega] \times (0, \infty))$. Тогда справедливо равенство

$$H_{\rm co}(U(\omega)) = \bigcap_{\delta > 0,\ \varepsilon > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U^{\varepsilon}(\omega))}, \tag{35}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(U^{\varepsilon}(\omega))}$ — замыкание множества $H_{\eta(\delta)}(U^{\varepsilon}(\omega))$ в пространстве $C^n[0, \omega]$, $U^{\varepsilon}(\omega)$ — замкнутая ε-окрестность множества $U(\omega)$ в подпространстве $C_0^n[0, \omega]$.

Определим отображение ${\rm co}\, F_{\omega} : [0, \omega] \times \mathbb{R}^n \to {\rm comp}[\mathbb{R}^n]$ равенством $({\rm co}\, F_{\omega})(t, x) = {\rm co}(F_{\omega}(t, x))$. Пусть $N_{\omega} : C^n[0, \omega] \to \Pi[L^n[0, \omega]\,]$ и ${\rm co}\, N_{\omega} : C^n[0, \omega] \to \Pi[L^n[0, \omega]\,]$ — операторы Немыцкого, порожденные функциями F_{ω} и ${\rm co}\, F_{\omega}$ соответственно.

Согласно теореме 6 достаточно показать включение $H_{\rm co}(U(\omega)) \subset \mathcal{H}(U^{\nu}(\omega))$. Действительно, пусть $x \in H_{\rm co}(U(\omega))$. Тогда найдется функция $w_0 \in {\rm co}\, N(x)$, которая для любого $t \in [a, b]$ удовлетворяет равенству $x(t) = x(0) + \int\limits_0^t w_0(s)\, ds$ и соотношению $\int\limits_0^{\omega} w_0(s)\, ds = 0$. Отсюда в силу [9] для w_0 найдется такая последовательность $w_i \in Nx$, что $w_i \to w_0$ слабо в $L^n[0, \omega]$ при $i \to \infty$, причем для любого $i = 1, 2, \ldots$ функция w_i удовлетворяет равенству $\int\limits_0^{\omega} w_i(s)\, ds = 0$. Не уменьшая общности, будем считать, что последовательность $x_i \in C^n[0, \omega]$, $i = 1, 2, \ldots$, определенная равенством

$x_i(t) = x(0) + \int\limits_0^t w_i(s)\,ds$, сходится в пространстве $C^n[0,\omega]$ при $i \to \infty$. Следовательно, можно считать, что для любого $i = 1, 2, \dots$ выполняется включение $x_i \in U^\nu(\omega)$. Поэтому $x \in \mathcal{H}(U^\nu(\omega))$. А это означает, что $H_{\rm co}(U(\omega)) \subset \mathcal{H}(U^\nu(\omega))$. Таким образом, равенство (35) справедливо.

Замечание 11. Следствие 5 дополняет результат работы [6] об ω-периодических решениях. Отметим также, что множества в равенстве (35) могут быть и пустыми.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) \in P(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \\ x(a) \in A, \quad x(b) \in B, \end{gathered} \tag{36}$$

где $P : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — отображение, $A, B \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — заданные множества.

Под *решением задачи* (36) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую при п. в. $t \in [a, b]$ дифференциальному включению в задаче (36) и включениям $x(a) \in A$, $x(b) \in B$. Пусть $\eta \in K([a, b] \times (0, \infty))$. Будем говорить, что абсолютно непрерывная функция $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — *δ-решение задачи* (36), если при п. в. $t \in [a, b]$ выполняются включение $\dot{x}(t) \in P(t, x(t))^{\eta(t,\delta)}$ и соотношения $x(a) \in A$, $x(b) \in B$.

Обозначим $E = \{x \in C^n[a, b] : x(a) \in A,\ x(b) \in B\}$. Пусть $H_{\eta(\delta)}(U \cap \mathrm{E})$ — множество δ-решений задачи (36), принадлежащих множеству $U \subset C^n[a, b]$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) \in \mathrm{co}\, P(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \\ x(a) \in A, \quad x(b) \in B. \end{gathered} \tag{37}$$

Пусть $H_{\rm co}(U \cap E)$ — множество решений задачи (37), принадлежащих множеству $U \subset C^n[a, b]$.

Следствие 6. Пусть отображение $P : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори и пусть P равномерно непрерывно на множестве $\widetilde{T}$, где $T = U \cap E$, относительно функции $\eta \in K([a, b] \times (0, \infty))$. Тогда справедливо равенство

$$H_{\rm co}(U \cap E) = \bigcap_{\delta > 0,\ \varepsilon > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(U^\varepsilon \cap E)}, \tag{38}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(U^\varepsilon \cap E)}$ — замыкание множества $H_{\eta(\delta)}(U^\varepsilon \cap E)$ в пространстве $C^n[a, b]$.

Пусть $N : C^n[a, b] \to \Pi[L^n[a, b]\,]$ и $\mathrm{co}\, N : C^n[a, b] \to \Pi[L^n[a, b]\,]$ — операторы Немыцкого, порожденные функциями P и $\mathrm{co}\, P$ соответственно. Пусть $\mathcal{H}(U^\nu \cap E)$ — множество всех квазирешений задачи (36), принадлежащих множеству $U^\nu \cap E$.

Покажем, что справедливо включение $H_{\rm co}(U \cap E) \subset \mathcal{H}(U^\nu \cap E)$. Действительно, пусть $x \in H_{\rm co}(U \cap E)$. Тогда найдется такая функция $\omega \in \mathrm{co}\, Nx$, что для любого $t \in [a, b]$ выполняется равенство

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \omega(s) ds. \tag{39}$$

Согласно [9] для функции ω найдется такая последовательность $\widetilde{\omega_i} \in Nx$, $i = 1, 2, \dots$, что $\widetilde{\omega_i} \to \omega$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \to \infty$ и для любого $i = 1, 2, \dots$ имеет место соотношение

$$\int_a^b \omega_i(s)\, ds = \int_a^b \omega(s)\, ds. \tag{40}$$

Рассмотрим последовательность функций $x_i \in C^n[a, b]$, $i = 1, 2, \dots$, для любого $i = 1, 2, \dots$ и любого $t \in [a, b]$, определенную равенством

$$x_i(t) = x(a) + \int_a^t \omega_i(s)\, ds.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $x_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$ и для любого $i = 1, 2, \ldots$ $x_i \in U^\nu$. Кроме того, из равенств (39) и (40) следует, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ $x_i \in E$. Поэтому $x \in \mathcal{H}(U^\nu \cap E)$. И, следовательно, $H_{\text{co}}(U \cap E) \subset \mathcal{H}(U^\nu \cap E)$.

Таким образом, согласно теореме 6 равенство (38) справедливо.

Замечание 12. Следствие 6 дополняет результаты работы [10].

Будем говорить, что отображение f и произведение $V\Phi$ *обладают свойством* A на множестве $U \subset C^n[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\nu \in C^1_+[a,b]$, удовлетворяющего неравенству $\|\nu\|_{C^1[a,b]} \le \delta$, выполняется условие $(V\Gamma_2; P_2)^\nu$ на множестве U, в котором для отображений Γ_2, P_2 справедливы равенства $\Gamma_2(0) = 0$, $P_2(0) = 0$, а решение уравнения (9) удовлетворяет неравенству $\|\xi_\nu\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$. Если $U = C^n[a,b]$, то в этом случае будем говорить, что отображение f и произведение $V\Phi$ *обладают свойством* B. Пусть $H(H(U))$ — множество всех решений (принадлежащих множеству U) включения (1).

Теорема 7. *Пусть U — такое ограниченное, замкнутое, выпуклое множество пространства $C^n[a,b]$, что $\Xi(U) \subset U$, где отображение $\Xi : C^n[a,b] \to 2^{C^n[a,b]}$ определено равенством* (3). *Далее, пусть отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойством* A *на множестве U. Тогда $\overline{H(U)} = H_{\text{co}}(U)$, где $\overline{H(U)}$ — замыкание множества $H(U)$ в пространстве $C^n[a,b]$.*

Следствие 7. Пусть отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойствами B и $(V\Gamma_1; P_1)$. Тогда $\overline{H} = H_{\text{co}}$, где $\overline{H}$ — замыкание множества H в пространстве $C^n[a,b]$.

Определим отображение $\operatorname{ext}\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ равенством

$$(\operatorname{ext}\Phi)(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in \overline{\operatorname{ext}}(\operatorname{co} F(t,x)) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Отметим, что при каждом $x \in C^n[a,b]$ множество $(\operatorname{ext}\Phi)(x)$ — минимальное по включению, выпуклое по переключению, замкнутое в пространстве $L^n[a,b]$ множество, содержащееся в множестве $\Phi(x)$ и удовлетворяющее условию $\overline{\operatorname{co}}[(\operatorname{ext}\Phi)(x)] = \overline{\operatorname{co}}(\Phi(x))$.

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in f(x) + V((\operatorname{ext}\Phi)(x)). \tag{41}$$

Пусть $H_{\text{ext}}(H_{\text{ext}}(U))$ — множество всех решений (принадлежащих множеству U) включения (41).

Теорема 8. *Пусть ядро оператора V, определенного равенством* (2)*, состоит только из нулевого элемента. Далее, пусть U — такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, что $\Xi(U) \subset U$, где отображение $\Xi : C^n[a,b] \to 2^{C^n[a,b]}$ определено равенством* (3)*. И пусть отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойством* A *на множестве U. Тогда $\overline{H_{\text{ext}}(U)} = H_{\text{co}}(U)$, где $\overline{H_{\text{ext}}(U)}$ — замыкание множества $H_{\text{ext}}(U)$ в пространстве $C^n[a,b]$.*

Следствие 8. Пусть ядро оператора V, определенного равенством (2), состоит только из нулевого элемента. И пусть отображение f и произведение $V\Phi$ обладают свойствами B и $(V\Gamma_1; P_1)$. Тогда $\overline{H_{\text{ext}}} = H_{\text{co}}$, где $\overline{H_{\text{ext}}}$ — замыкание множества H_{ext} в пространстве $C^n[a,b]$.

Литература

1. Булгаков А.И. *Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений* // Матем. сб. – 1992. – Т. 183. – № 10. – С. 63–86.
2. Hermes H. *The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t,x)$* // Advances Math. – 1970. – V. 4. – № 2. – P. 149–169.
3. Филиппов А.Ф. *Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1967. – № 3. – С. 16–26.

4. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* – М.: Наука, 1985. – 223 с.
5. Pianigiani G. *On the fundamental theory of multivalued differential equations* // J. Different. Equat. – 1977. – V. 25. – № 1. – P. 30–38.
6. Ирисов А.Е., Тонков Е.Л. *О замыкании множества периодических решений дифференциального включения* // Дифференц. и интеграл. уравнения и их прилож. – Горький, 1983. – С. 32–38.
7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1977. – 479 с.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
9. Булгаков А.И. *Функционально-дифференциальное включение с оператором, имеющим невыпуклые образы* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 10. – С. 1659–1668.
10. Bressan A., Colombo G. *Boundary value problems for lower semicontinuons differential inclusions* // Ref. S.I.S.S.A. Trieste, Italy, 1990. – 13 p.

Тамбовский государственный университет

Поступили
первый вариант 27.02.1996
окончательный вариант 08.06.1998