

УДК 539.3

НЕПРОТИВОРЕЧИВЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПРЯМЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В.Н. Паймушин^{1,2}, С.А. Холмогоров²

¹*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

²*Казанский национальный исследовательский технический университет
имени А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия*

Аннотация

Для прямых стержней слоистой структуры на основе модели С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия, используемой для каждого слоя, построены два варианта одномерных уравнений, описывающих геометрически нелинейное деформирование при произвольных перемещениях и малых деформациях. В их основу положены предложенные ранее непротиворечивые соотношения нелинейной теории упругости, использование которых не приводит к появлению «ложных» бифуркационных решений. Первый вариант соответствует контактной постановке задачи, в соответствии с которой в точках сопряжения слоёв введены в рассмотрение в качестве неизвестных контактные напряжения, а второй вариант – предварительному удовлетворению кинематическим условиям сопряжения слоёв по перемещениям.

Ключевые слова: прямой стержень, слоистая структура, геометрическая нелинейность, произвольные перемещения, малые деформации, модель С.П. Тимошенко, контактные напряжения, кинематические условия сопряжения

Введение

Ранее [1–3] был проведён анализ уравнений классической нелинейной теории упругости [4], построенных для случая малых деформаций и произвольных перемещений. Было показано, что они являются некорректными, так как их использование при решении конкретных задач может привести к появлению «ложных» точек бифуркаций. В связи с этим было дано построение непротиворечивых геометрически нелинейных уравнений теории упругости, использование которых не приводит к появлению «ложных» бифуркационных решений. Определенные шаги в этом направлении были предприняты и в работах [5, 6]. В [7] был сформулирован также вывод о том, что требуют определенной ревизии и корректировки методы и пакеты прикладных программ (ППП), основанные на использовании классических соотношений нелинейной теории упругости. Данный вывод в [7] обоснован и подтвержден результатами численных конечно-элементных решений ряда трехмерных задач о геометрически нелинейном деформировании и линеаризованных задач об устойчивости равновесия прямых брусьев, полученными на основе классических [4] и непротиворечивых [1–3] уравнений теории упругости. Было показано, что классические уравнения геометрически нелинейной теории упругости зачастую приводят к определению завышенных значений критических нагрузок потери устойчивости элементов конструкций по сравнению с непротиворечивыми уравнениями, предложенными в работах [1–3].

В механике деформируемых твердых тел существует направление исследований, связанное с постановкой и решением задач о так называемых внутренних и поверхностных (периферийных) формах потери устойчивости (ФПУ) слоистых волокнистых композитов, армированных прямолинейными или криволинейными волокнами и находящихя при тех или иных условиях нагружения. Такие задачи важны в связи с тем, что при построении теорий прочности композитных материалов в качестве возможного механизма разрушения принимают, в частности, потерю устойчивости структуры композита. Большой цикл исследований в этом направлении был проведен во второй половине прошлого столетия, результаты которых нашли отражение во многих научных статьях и монографиях (см., например, [8, 9]). К этому же направлению исследований следует отнести работы [10–16], посвященные экспериментальному и теоретическому изучению механизмов разрушения элементов структуры волокнистых композитов при испытаниях изготовленных из них тест-образцов в соответствии с разработанными стандартами.

Отметим, что в работе [2] был рассмотрен простейший пример применения непротиворечивого варианта уравнений теории упругости при произвольных перемещениях, связанный с редукцией двумерной нелинейной задачи деформирования полосы в виде стержня к одномерным уравнениям и последующим их использованием для выявления возможных ФПУ при характерных видах нагружения. Из полученных в ней результатов абсолютно новыми оказались результаты, связанные с исследованием ФПУ стержня при его равномерном сжатии в поперечном направлении и чистом сдвиге. Исходя из этих результатов, в [17] была рассмотрена линеаризованная задача о трехточечном изгибе тест-образца прямоугольного поперечного сечения из однонаправленного волокнистого композита, закрепленного на концевых цилиндрических опорах и подвергающегося изгибу нагружением через жесткий штамп цилиндрической формы в середине образца. Используемые в ней уравнения являются простейшими и основаны на известной сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия для всего пакета слоёв рассматриваемых композитов слоистой структуры. Анализ полученных в [17] результатов показал, что разрушение тест-образцов из волокнистых композитов при их испытаниях на трехточечный изгиб происходит не в результате достижения напряжениями сжатия предела прочности на сжатие (для удлиненных тест-образцов) и поперечными касательными напряжениями пределов прочности на сдвиг (для коротких тест-образцов). Разрушение наступает вследствие реализации неклассической почти сдвиговой ФПУ при поперечном изгибе. Однако следует отметить, что данный вывод, хотя и является принципиальным, но имеет лишь качественный характер в силу принятых упрощающих предположений при постановке соответствующей задачи. В связи с этим для уточнения постановки задач о трехточечном изгибе и продольном осевом сжатии тест-образцов из слоистых композитов при учете реальных их условий закрепления, нагружения и физически нелинейной зависимости формирующихся касательных напряжений от соответствующих сдвиговых деформаций требуется использование более точных по сравнению с [17] геометрически и физически нелинейных уравнений теории многослойных элементов конструкций, имеющих соответствующие степени точности и содержательности.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию выполненных ранее работ [18–20]. Уравнения предлагаемых ниже вариантов теории предназначены главным образом для постановки геометрически и физически нелинейных задач механики многослойных стержней и выявления всех возможных ФПУ элементов структуры волокнистых композитов при статических испытаниях тест-образцов, использование которых позволяет значительно уточнить полученные ранее результаты [17].

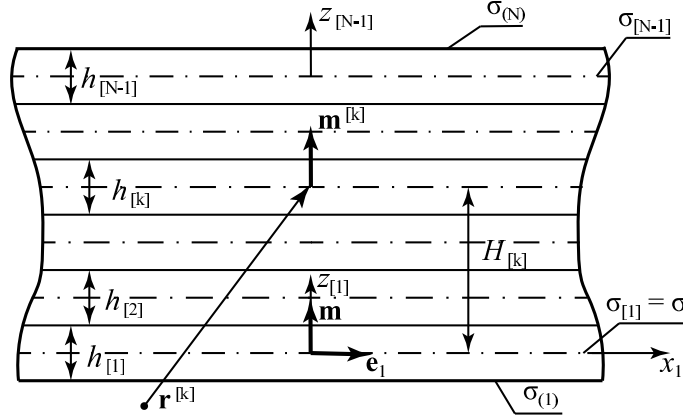


Рис. 1. Многослойный стержень (продольный разрез)

1. Контактная постановка задач механики прямых многослойных стержней

Рассмотрим прямой стержень, состоящий из $M = N - 1$ слоёв (рис. 1), пространства которых $V^{[k]}$ отнесены к параметризациям

$$\mathbf{R}^{[k]} = \mathbf{r}^{[k]} + z_{[k]} \mathbf{m}^{[k]}, \quad -h_{[k]} \leq z_{[k]} \leq h_{[k]},$$

где $\mathbf{r}^{[k]} = x \mathbf{e}_1 + H_{[k]} \mathbf{m}$ – радиус-вектор точек срединной плоскости $\sigma_{[k]}$ k -го слоя, имеющего в направлении вектора единичной нормали $\mathbf{m}^{[k]}$ толщину $h_{[k]}$; $x = x_1$ – координата вдоль оси стержня на некоторой плоскости σ , принятой в качестве базы параметризации. Ограничившись рассмотрением плоской задачи теории упругости, для описания механики деформирования каждого $[k]$ -го слоя стержня будем использовать кинематическую модель типа С.П. Тимошенко, принимая для векторов перемещений $\mathbf{U}^{[k]}$ представления

$$\mathbf{U}^{[k]} = \mathbf{u}^{[k]} + z_{[k]} \gamma^{[k]} = u^{[k]} \mathbf{e}_1 + w^{[k]} \mathbf{m} + z_{[k]} \left(\gamma_x^{[k]} \mathbf{e}_1 + \gamma^{[k]} \mathbf{m} \right), \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad (1)$$

где \mathbf{e}_1 , \mathbf{m} – единичные векторы выбранной системы координат, $u^{[k]}$, $w^{[k]}$ – перемещения точек срединной плоскости вдоль осей x и z , γ_x – угол поворота нормали вокруг оси y , функция γ описывает поперечное обжатие стержня в направлении z .

При малых деформациях и конечных перемещениях и поворотах двумерные кинематические соотношения непротиворечивого варианта геометрически нелинейной теории упругости [1, 2], исходя из представления (1), для определения осевых деформаций $\varepsilon_1^{[k]}$, деформаций поперечного обжатия $\varepsilon_3^{[k]}$ и поперечных сдвигов $\gamma_{13}^{[k]}$, редуцируются к одномерным соотношениям следующего вида:

$$\varepsilon_1^{[k]} = \varepsilon_{11}^{[k]} + z_{[k]} \chi_{11}^{[k]}, \quad \varepsilon_3^{[k]} = \varepsilon_{33}^{[k]} = \gamma^{[k]} + (\gamma_x^{[k]} \gamma_x^{[k]}) / 2, \quad \gamma_{13}^{[k]} = 2\varepsilon_{13}^{[k]} + z_{[k]} \gamma_{,x}^{[k]}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{[k]} &= u_{,x}^{[k]} + (w_{,x}^{[k]})^2 / 2, \\ 2\varepsilon_{13}^{[k]} &= (1 + \gamma^{[k]}) w_{,x}^{[k]} + (1 + u_{,x}^{[k]}) \gamma_x^{[k]}, \\ \chi_{11}^{[k]} &= \gamma_{x,x}^{[k]} + w_{,x}^{[k]} \gamma_{,x}^{[k]}. \end{aligned} \quad (3)$$

При идеальном контакте слоёв стержня введённые в рассмотрение векторы перемещений (1) в точках внутренних плоскостей сопряжения должны удовлетворять условиям кинематического сопряжения по перемещениям

$$\mathbf{U}^{[k]}(z_{[k]} = h_{[k]}/2) = \mathbf{U}^{[k+1]}(z_{[k+1]} = -h_{[k+1]}/2), \quad k = 1, \dots, N-2, \quad (4)$$

которые в скалярной форме могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mu_1^{[k]} &= u^{[k]} + \frac{h_{[k]}}{2} \gamma_x^{[k]} - u^{[k+1]} + \frac{h_{[k+1]}}{2} \gamma_x^{[k+1]} = 0, \\ \mu_3^{[k]} &= w^{[k]} + \frac{h_{[k]}}{2} \gamma^{[k]} - w^{[k+1]} + \frac{h_{[k+1]}}{2} \gamma^{[k+1]} = 0, \end{aligned} \quad k = 1, \dots, N-2. \quad (5)$$

Предположим, что в торцевых сечениях стержня $x = 0$, $x = L$ для каждого $[k]$ -го слоя заданы векторы усилий и моментов

$$\mathbf{Q}^{[k]} = Q_{11}^{[k]} \mathbf{e}_1 + Q_{13}^{[k]} \mathbf{m}, \quad \mathbf{L}^{[k]} = L_{11}^{[k]} \mathbf{e}_1 + L_{13}^{[k]} \mathbf{m}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

а в точках срединных плоскостей слоёв $\sigma_{[k]}$ заданы приведённые к ним векторы погонных усилий и моментов

$$\mathbf{X}^{[k]} = X_1^{[k]} \mathbf{e}_1 + X_3^{[k]} \mathbf{m}, \quad \mathbf{M}^{[k]} = M_1^{[k]} \mathbf{e}_1 + M_3^{[k]} \mathbf{m}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (7)$$

отнесённых к единицам площадей плоскостей $\sigma_{[k]}$. Вариация работы этих сил и моментов на соответствующих перемещениях будет равна

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=1}^{N-1} \delta A^{[k]} = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\left(\mathbf{Q}^{[k]} \delta \mathbf{u}^{[k]} + \mathbf{L}^{[k]} \delta \gamma^{[k]} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L \left(\mathbf{X}^{[k]} \delta \mathbf{u}^{[k]} + \mathbf{M}^{[k]} \delta \gamma^{[k]} \right) dx \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \left[\left(Q_{11}^{[k]} \delta u^{[k]} + Q_{13}^{[k]} \delta w^{[k]} + L_{11}^{[k]} \delta \gamma_x^{[k]} + L_{13}^{[k]} \delta \gamma^{[k]} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L \left(X_1^{[k]} \delta u^{[k]} + X_3^{[k]} \delta w^{[k]} + M_1^{[k]} \delta \gamma_x^{[k]} + M_3^{[k]} \delta \gamma^{[k]} \right) dx \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Если ввести в рассмотрение внутренние усилия и моменты

$$\begin{aligned} Q_x^{[k]} &= \int_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2} \sigma_{11}^{[k]} dz_{[k]}, & Q_z^{[k]} &= \int_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2} \sigma_{13}^{[k]} dz_{[k]}, \\ T_z^{[k]} &= \int_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2} \sigma_{33}^{[k]} dz_{[k]}, & M_y^{[k]} &= \int_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2} \sigma_{11}^{[k]} z_{[k]} dz_{[k]}, \\ S_{xz}^{[k]} &= \int_{-h_{[k]}/2}^{h_{[k]}/2} \sigma_{13}^{[k]} z_{[k]} dz_{[k]}, \end{aligned} \quad (9)$$

приведённые к срединным плоскостям слоёв, то для вариации потенциальной энергии деформации стержня при использовании соотношений (2), (3) можно получить выражение

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \sum_{k=1}^{N-1} \delta\Pi^{[k]} = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^L & \left(Q_x^{[k]} \delta\varepsilon_{11}^{[k]} + 2Q_z^{[k]} \delta\varepsilon_{13}^{[k]} + T_z^{[k]} \delta\varepsilon_3^{[k]} + \right. \\ & + M_y^{[k]} \delta\chi_{11}^{[k]} + S_{xz}^{[k]} \delta\gamma_{,x}^{[k]} \Big) dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^L \left(S_{11}^{[k]} \delta u_{,x}^{[k]} + S_{13}^{[k]} \delta w_{,x}^{[k]} + \right. \\ & \left. + H_{11}^{[k]} \delta\gamma_{x,x}^{[k]} + H_{13}^{[k]} \delta\gamma_{,x}^{[k]} + N_{13}^{[k]} \delta\gamma_x^{[k]} + N_{33}^{[k]} \delta\gamma^{[k]} \right) dx, \quad (10) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} S_{11}^{[k]} &= Q_x^{[k]} + Q_z^{[k]} \gamma_x^{[k]}, \quad S_{13}^{[k]} = Q_z^{[k]} (1 + \gamma^{[k]}) + Q_x^{[k]} w_{,x}^{[k]} + M_y^{[k]} \gamma_{,x}^{[k]}, \\ N_{13}^{[k]} &= Q_z^{[k]} (1 + u_{,x}^{[k]}) + T_z^{[k]} \gamma_x^{[k]}, \quad N_{33}^{[k]} = T_z^{[k]} + Q_z^{[k]} w_{,x}^{[k]}, \\ H_{11}^{[k]} &= M_y^{[k]}, \quad H_{13}^{[k]} = S_{xz}^{[k]} + M_y^{[k]} w_{,x}^{[k]}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следуя [21, 22], проведём декомпозицию рассматриваемого стержня на $N - 1$ слоёв, вводя в рассмотрение в точках срединных плоскостей сопряжения $\sigma^{(k)}$, $k = 1, \dots, N - 2$, поверхностные контактные усилия. Обозначим через $\mathbf{q}^{[k]} = q_1^{[k]} \mathbf{e}_1 + q_3^{[k]} \mathbf{m}$ вектор усилий, действующий на $[k]$ -й слой со стороны $[k + 1]$ -го слоя. Тогда на $[k + 1]$ -й слой со стороны $[k]$ -го слоя будет действовать усилие, равное $-\mathbf{q}^{[k]}$. Если векторы перемещений (1) не подчинены условиям сопряжения (4), то введенные в рассмотрение внутренние и внешние усилия и моменты должны удовлетворять вариационному уравнению

$$\delta\Pi - \delta A - \delta A_q = 0, \quad (12)$$

где δA_q – вариация работы контактных усилий взаимодействия $\mathbf{q}^{[k]}$ на соответствующих перемещениях, определяемая выражением

$$\delta A_q = \sum_{k=1}^{N-2} \delta A_q^{[k]} = \delta \int_0^L \sum_{k=2}^{N-3} \mathbf{q}^{[k]} \left(\mathbf{u}^{[k]} + \frac{h^{[k]}}{2} \gamma^{[k]} - \mathbf{u}^{[k+1]} + \frac{h^{[k+1]}}{2} \gamma^{[k+1]} \right) dx. \quad (13)$$

В скалярной форме с учетом (5) выражение (13) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta A_q = \int_0^L & \left[\sum_{k=1}^{N-2} \left(\mu_1^{[k]} \delta q_1^{[k]} + \mu_3^{[k]} \delta q_3^{[k]} \right) + \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^{N-1} \left(Y_1^{[k]} \delta u^{[k]} + Y_3^{[k]} \delta w^{[k]} + m_1^{[k]} \delta \gamma_x^{[k]} + m_3^{[k]} \delta \gamma^{(k)} \right) \right] dx, \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Y_1^{[1]} &= q_1^{[1]}, \quad Y_3^{[1]} = q_3^{[1]}, \quad m_1^{[1]} = \frac{h^{[1]}}{2} q_1^{[1]}, \quad m_3^{[1]} = \frac{h^{[1]}}{2} q_3^{[1]}, \\ Y_1^{[N-1]} &= -q_1^{[N-2]}, \quad Y_3^{[N-1]} = -q_3^{[N-2]}, \quad m_1^{[N-1]} = \frac{h^{[N-1]}}{2} q_1^{[N-2]}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$m_3^{[N-1]} = \frac{h^{[N-1]}}{2} q_3^{[N-2]}, \quad Y_1^{[k]} = q_1^{[k]} - q_1^{[k-1]}, \quad Y_3^{[k]} = q_3^{[k]} - q_3^{[k-1]},$$

$$m_1^{[k]} = \frac{h^{[k]}}{2} (q_1^{[k]} + q_1^{[k-1]}), \quad m_3^{[k]} = \frac{h^{[k]}}{2} (q_3^{[k]} + q_3^{[k-1]}).$$

После подстановки выражений (8), (10) и (14) в уравнение (12) и проведения стандартных преобразований получим вариационное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \left[(S_{11}^{[k]} - Q_{11}^{[k]}) \delta u^{[k]} + (S_{13}^{[k]} - Q_{13}^{[k]}) \delta w^{[k]} + \right. \\ & \quad \left. + (H_{11}^{[k]} - L_{11}^{[k]}) \delta \gamma_x^{[k]} + (H_{13}^{[k]} - L_{13}^{[k]}) \delta \gamma^{[k]} \right] \Big|_{x=L}^{x=0} - \\ & \quad - \int_0^L (f_1^{[k]} \delta u^{[k]} + f_2^{[k]} \delta w^{[k]} + f_3^{[k]} \delta \gamma_x^{[k]} + f_4^{[k]} \delta \gamma^{[k]}) dx - \\ & \quad - \int_0^L \sum_{k=1}^{N-2} (\mu_1^{[k]} \delta q_1^{[k]} + \mu_3^{[k]} \delta q_3^{[k]}) dx. \quad (16) \end{aligned}$$

Из него в силу произвольности вариаций $\delta u^{[k]}$, $\delta w^{[k]}$, $\delta \gamma_x^{[k]}$, $\delta \gamma^{[k]}$, $\delta q_1^{[k]}$, $\delta q_3^{[k]}$ следует система $4(N-1)$ уравнений равновесия

$$\begin{aligned} f_1^{[k]} &= S_{11,x}^{[k]} + X_1^{[k]} + Y_1^{[k]} = 0, \\ f_2^{[k]} &= S_{13,x}^{[k]} + X_3^{[k]} + Y_3^{[k]} = 0, \\ f_3^{[k]} &= H_{11,x}^{[k]} - N_{13}^{[k]} + M_1^{[k]} + m_1^{[k]} = 0, \\ f_4^{[k]} &= H_{13,x}^{[k]} - N_{33}^{[k]} + M_3^{[k]} + m_3^{[k]} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

для которых в торцевых сечениях стержня $x=0$, $x=L$ формулируются граничные условия

$$\begin{aligned} S_{11}^{[k]} &= Q_{11}^{[k]} \quad \text{при} \quad \delta u^{[k]} \neq 0, \quad S_{13}^{[k]} = Q_{13}^{[k]} \quad \text{при} \quad \delta w^{[k]} \neq 0, \\ H_{11}^{[k]} &= L_{11}^{[k]} \quad \text{при} \quad \delta \gamma_x^{[k]} \neq 0, \quad H_{13}^{[k]} = L_{13}^{[k]} \quad \text{при} \quad \delta \gamma^{[k]} \neq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

а также $2(N-2)$ алгебраических уравнений, являющихся кинематическими условиями сопряжения слоёв

$$\mu_1^{[k]} = 0, \quad \mu_3^{[k]} = 0, \quad k = 1, \dots, N-2.$$

2. Уравнения, соответствующие предварительному удовлетворению сопряжения слоёв

Введём в рассмотрение N векторов перемещений

$$\mathbf{v}^{(k)} = u^{(k)} \mathbf{e}_1 + w^{(k)} \mathbf{m}, \quad k = 1, \dots, N \quad (19)$$

точек граничных плоскостей $z_{[1]} = h_{[1]}/2$, $z_{[N-1]} = -h_{[N-1]}/2$ и внутренних плоскостей сопряжения слоёв и вместо (4) составим $N-2$ условия сопряжения слоёв стержня по перемещениям в виде

$$\mathbf{U}^{[k]} (z_{[k]} = -h_{[k]}/2) = \mathbf{v}^{(k)}, \quad \mathbf{U}^{[k]} (z_{[k]} = h_{[k]}/2) = \mathbf{v}^{(k+1)}, \quad k = 1, \dots, N-2 \quad (20)$$

При подстановке представлений (1) и (19) из условий (20) имеем

$$\begin{aligned} u^{[k]} &= \frac{u^{(k+1)} + u^{(k)}}{2}, & w^{[k]} &= \frac{w^{(k+1)} + w^{(k)}}{2}, \\ \gamma_x^{[k]} &= \frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{h_{[k]}}, & \gamma^{[k]} &= \frac{w^{(k+1)} - w^{(k)}}{h_{[k]}}, \end{aligned} \quad (21)$$

учитывая которые, выражения (8) и (10) можно привести к виду

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \left[\left(Q_{11}^{(k)} \delta u^{(k)} + Q_{13}^{(k)} \delta w^{(k)} \right) \Big|_{x=L}^{x=0} + \int_0^L \left(X_1^{(k)} \delta u^{(k)} + X_3^{(k)} \delta w^{(k)} \right) dx, \quad (22)$$

$$\delta \Pi = \sum_{k=1}^N \int_0^L \left(S_{11}^{(k)} \delta u_{,x}^{(k)} + S_{13}^{(k)} \delta w_{,x}^{(k)} + N_{13}^{(k)} \delta u^{(k)} + N_{33}^{(k)} \delta w^{(k)} \right) dx, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{1\alpha}^{(1)} &= \frac{Q_{1\alpha}^{[1]}}{2} - \frac{L_{1\alpha}^{[1]}}{h_{[1]}}, & Q_{1\alpha}^{(N)} &= \frac{Q_{1\alpha}^{[N-1]}}{2} + \frac{L_{1\alpha}^{[N-1]}}{h_{[N-1]}}, \\ Q_{1\alpha}^{(k)} &= \frac{Q_{1\alpha}^{[k-1]} + Q_{1\alpha}^{[k]}}{2} + \frac{L_{1\alpha}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}} - \frac{L_{1\alpha}^{[k]}}{h_{[k]}}, & k &= 2, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 3, \\ X_{\alpha}^{(1)} &= \frac{X_{\alpha}^{[1]}}{2} - \frac{M_{\alpha}^{[1]}}{h_{[1]}}, & X_{\alpha}^{(N)} &= \frac{X_{\alpha}^{[N-1]}}{2} + \frac{M_{\alpha}^{[N-1]}}{h_{[N-1]}}, \\ X_{\alpha}^{(k)} &= \frac{X_{\alpha}^{[k-1]} + X_{\alpha}^{[k]}}{2} + \frac{M_{\alpha}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}} - \frac{M_{\alpha}^{[k]}}{h_{[k]}}, & k &= 2, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 3, \\ S_{1\alpha}^{(1)} &= \frac{S_{1\alpha}^{[1]}}{2} - \frac{H_{1\alpha}^{[1]}}{h_{[1]}}, & S_{1\alpha}^{(N)} &= \frac{S_{1\alpha}^{[N-1]}}{2} + \frac{H_{1\alpha}^{[N-1]}}{h_{[N-1]}}, \\ S_{1\alpha}^{(k)} &= \frac{S_{1\alpha}^{[k-1]} + S_{1\alpha}^{[k]}}{2} + \frac{H_{1\alpha}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}} - \frac{H_{1\alpha}^{[k]}}{h_{[k]}}, & k &= 2, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 3, \\ N_{\alpha 3}^{(1)} &= -\frac{N_{\alpha 3}^{[1]}}{h_{[1]}}, & N_{\alpha 3}^{(N)} &= \frac{N_{\alpha 3}^{[N-1]}}{h_{[N-1]}}, \\ N_{\alpha 3}^{(k)} &= \frac{N_{\alpha 3}^{[k-1]}}{h_{[k-1]}} - \frac{N_{\alpha 3}^{[k]}}{h_{[k]}}, & k &= 2, \dots, N-1, \quad \alpha = 1, 3. \end{aligned} \quad (24)$$

В рассматриваемом случае вместо (12) должно выполняться вариационное уравнение принципа возможных перемещений $\delta \Pi - \delta A = 0$, которое после проведения стандартных преобразований приобретает вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\left(S_{11}^{(k)} - Q_{11}^{(k)} \right) \delta u^{(k)} + \left(S_{13}^{(k)} - Q_{13}^{(k)} \right) \delta w^{(k)} \right] \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \left(f_1^{(k)} \delta u^{(k)} + f_2^{(k)} \delta w^{(k)} \right) dx \right\} = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

В силу произвольности вариаций $\delta u^{(k)}$, $\delta w^{(k)}$ (25) сводится к системе $2N$ дифференциальных уравнений равновесия вида

$$\begin{aligned} f_1^{(k)} &= S_{11,x}^{(k)} - N_{13}^{(k)} + X_1^{(k)} = 0, \\ f_2^{(k)} &= S_{13,x}^{(k)} - N_{33}^{(k)} + X_3^{(k)} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

для которых в торцевых сечениях стержня $x = 0$, $x = L$ формулируются граничные условия

$$S_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta u^{(k)} \neq 0, \quad S_{13}^{(k)} = Q_{13}^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta w^{(k)} \neq 0. \quad (27)$$

3. Соотношения упругости

Будем считать материалы слоёв стержня ортотропными, причём оси ортотропии совпадают с осями выбранной координат. Для такого материала компоненты напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{[k]}$ связаны с компонентами деформаций физическими зависимостями следующего вида

$$\sigma_{11}^{[k]} = g_{11}^{[k]} \varepsilon_1^{[k]} + g_{13}^{[k]} \varepsilon_3^{[k]}, \quad \sigma_{33}^{[k]} = g_{13}^{[k]} \varepsilon_1^{[k]} + g_{33}^{[k]} \varepsilon_3^{[k]}, \quad \sigma_{13}^{[k]} = G_{13}^{[k]} \gamma_{13}^{[k]}. \quad (28)$$

Для волокнистых композитных материалов, изготавливаемых из углеленты, первые две зависимости являются линейными вплоть до разрушения композита, третья зависимость в соответствии с результатами работы [23, 24] является нелинейной. В [23] модуль сдвига $G_{13}^{[k]}$ зависит от уровня формирующихся в слое сдвиговых деформаций $\gamma_{13}^{[k]}$ и в общем случае может быть представлена в виде $G_{13}^{[k]} = G_{13}^{[k]}(\gamma_{13}^{[k]})$. Входящие в соотношения (28) упругие характеристики $g_{11}^{[k]}$, $g_{13}^{[k]}$, $g_{33}^{[k]}$ через модули упругости $E_1^{[k]}$, $E_3^{[k]}$ и коэффициенты Пуассона $\nu_{\alpha\beta}^{[k]} (\alpha \neq \beta \quad \alpha = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3)$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} g_{11}^{[k]} &= E_1^{[k]} \left(1 - \nu_{23}^{[k]} \nu_{32}^{[k]} \right) / \Delta^{[k]}, \quad g_{33}^{[k]} = E_3^{[k]} \left(1 - \nu_{12}^{[k]} \nu_{21}^{[k]} \right) / \Delta^{[k]}, \\ g_{13}^{[k]} &= E_1^{[k]} \left(\nu_{21}^{[k]} + \nu_{23}^{[k]} \nu_{31}^{[k]} \right) / \Delta^{[k]}, \\ \Delta^{[k]} &= 1 - \nu_{12}^{[k]} \nu_{21}^{[k]} - \nu_{23}^{[k]} \nu_{32}^{[k]} - \nu_{31}^{[k]} \nu_{13}^{[k]} - 2\nu_{12}^{[k]} \nu_{23}^{[k]} \nu_{31}^{[k]}. \end{aligned} \quad (29)$$

После подстановки выражений (28) в (9), использовании соотношений (2) и осреднении модуля сдвига $G_{13}^{[k]}$ в пределах толщины $[k]$ -го слоя можно получить следующие выражения для физических зависимостей усилий и моментов от деформаций

$$\begin{aligned} Q_x^{[k]} &= C_{11}^{[k]} \varepsilon_{11}^{[k]} + C_{13}^{[k]} \varepsilon_{33}^{[k]}, \quad Q_z^{[k]} = 2B_{13}^{[k]} \varepsilon_{13}^{[k]}, \\ T_z^{[k]} &= C_{13}^{[k]} \varepsilon_{11}^{[k]} + C_{33}^{[k]} \varepsilon_{33}^{[k]}, \\ M_y^{[k]} &= D_{11}^{[k]} \chi_{11}^{[k]}, \quad S_{xz}^{[k]} = D_{13}^{[k]} \gamma_{13}^{[k]}, \end{aligned} \quad (30)$$

в которых введены обозначения для соответствующих жесткостей

$$\begin{aligned} C_{11}^{[k]} &= h_{[k]} g_{11}^{[k]}, \quad C_{33}^{[k]} = h_{[k]} g_{33}^{[k]}, \quad C_{13}^{[k]} = h_{[k]} g_{13}^{[k]}, \\ D_{11}^{[k]} &= h_{[k]}^3 g_{11}^{[k]} / 12, \quad D_{13}^{[k]} = h_{[k]}^3 g_{13}^{[k]} / 12, \quad B_{13}^{[k]} = h_{[k]} G_{13}^{[k]}. \end{aligned} \quad (31)$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-38-60068, 17-08-01279) и в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 9.1395.2017/ПЧ).

Литература

1. *Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.* Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // Докл. РАН. – 2004. – Т. 396, № 4. – С. 492–495.
2. *Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.* О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // Прикл. матем. и механика. – 2005. – Т. 69. Вып. 5. – С. 861–881.
3. *Паймушин В.Н.* Об уравнениях геометрически нелинейной теории упругости и безмоментных оболочек при произвольных перемещениях // Прикл. матем. и механика. – 2008. – Т. 72, Вып. 5. – С. 822–841.
4. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л.-М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
5. *Доннелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
6. *Шклярчук Ф.Н.* К расчету деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем. // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 140–146.
7. *Бережной Д.В., Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.* Исследование качества уравнений геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях и произвольных перемещениях. // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 6. – С. 31–47.
8. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев: Наукова думка, 1973. – 270 с.
9. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
10. *Rosen B.W.* Mechanics of composite strengthening // Fibre Composite Materials. – American Society for Metals, 1965. – P. 574–586.
11. *Budiansky B., Fleck N.A.* Compressive failure of fibre composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – V. 41, No 1. – P. 183–211.
12. *Xu Y.L., Reifsnider K.L.* Micromechanical modeling of composite compressive strength // J. Composite Materials. – 1993. – V. 27, No 6. – P. 572–588.
13. *Zhang G., Latour R.A. Jr.* FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity // J. Thermoplastic Composite Materials. – 1993. – V. 6, No 4. – P. 298–311.
14. *Zhang G., Latour R.A. Jr.* An analytical and numerical study of fiber microbuckling // Composites Sci. Technol. – 1994. – V. 51, No 1. – P. 95–109.
15. *Naik N.K., Kumar R.S.* Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models // Composite Structures. – 1999. – V. 46, No 3. – P. 299–308.
16. *Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // Composite Structures. – 2010. – V. 92, No 2. – P. 295–305.
17. *Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В.* Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // Материалы XXII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». – М.: ООО «ТРП», 2016. – С. 197–202.

18. *Паймушин В.Н.* Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней // Прикл. матем. и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 855–893.
19. *Паймушин В.Н., Гюнал И.Ш., Луканкин С.А., Фирсов В.А.* Исследование качества нелинейных уравнений теории упругости на задачах устойчивости плоских криволинейных стержней слоистой структуры (постановка задачи) // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2010. – № 2. – С. 34–37.
20. *Паймушин В.Н., Гюнал И.Ш., Луканкин С.А., Фирсов В.А.* Исследование качества нелинейных уравнений теории упругости на задачах устойчивости плоских криволинейных стержней слоистой структуры (алгоритм и результаты численного исследования) // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2010. – № 3. – С. 16–19.
21. *Паймушин В.Н.* К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.
22. *Паймушин В.Н.* Вариационная постановка задач механики составных тел кусочно-однородной структуры // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 27–34.
23. *Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Холмогоров С.А.* Нелинейное поведение волокнистого композита на основе углеродного волокна в условиях сдвига // Материалы XXII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». – М.: ООО «ТРП», 2016. – С. 143–145.
24. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test // Procedia Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1056–1062. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.

Поступила в редакцию
31.01.17

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; профессор кафедры прочности конструкций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: vpajmushin@mail.ru

Холмогоров Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: hkazan@yandex.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 1, pp. 75–87

Consistent Equations of Nonlinear Rectilinear Laminated Bars Theory in Quadratic Approximation

V.N. Paimushin^{a,b*}, S.A. Kholmogorov^{b**}

^aKazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

^bTupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia

E-mail: *vpajmushin@mail.ru, **hkazan@yandex.ru

Received January 31, 2017

Abstract

Two versions of one-dimensional equilibrium equations for rectilinear laminated bars on basis of S.P. Timoshenko's model subject to transversal compression for each layer and describing geometrical nonlinear deformation by arbitrary displacements and small strain have been derived. The equations are based on the earlier proposed consistent theory of elasticity relations, the usage of which does not lead to spurious bifurcation solutions. The first version corresponds to contact problem statement, when contact stresses are introduced in the coupling points of layers as unknown parameters. The second version corresponds to preliminary satisfaction to the kinematic coupling conditions of layers with respect to displacements.

Keywords: rectilinear bar, laminated structure, geometrically nonlinearity, arbitrary displacements, small strain, S.P. Timoshenko's model, contact stresses, kinematic coupling conditions

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-38-60068, 17-08-01279) and was performed within the framework of the state task of the Ministry of Education and Science of Russia (project no. 9.1395.2017).

Figure Captions

Fig. 1. Laminated bar (lengthwise section).

References

1. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation. *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2004, vol. 396, no. 4, pp. 492–495. (In Russian)
2. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. The relations of deformation theory in the quadratic approximation and the problems of constructing improved versions of the geometrically non-linear theory of laminated structures. *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, vol. 69, no. 5, pp. 773–791. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2005.09.013.
3. Paimushin V.N. The equations of the geometrically non-linear theory of elasticity and momentless shells for arbitrary displacements. *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 597–610. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2008.11.003.

4. Novozhilov V.V. Fundamentals of Nonlinear Theory of Elasticity. Leningrad, Moscow, Gostekhizdat, 1948. 211 p. (In Russian)
5. Donnell L.H. Beams, Plates and Shells. New York, McGraw-Hill, 1976. 453 p.
6. Shklyarchuk F.N. Analysis of the strain state and stability of geometrically nonlinear elastic systems. *Mech. Solids*, 1998, vol. 33, no. 1, pp. 114–119.
7. Berezhnoi D.V., Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Studies of quality of geometrically nonlinear elasticity theory for small strains and arbitrary displacements. *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no. 6, pp. 837–851. doi: 10.3103/S0025654409060041.
8. Guz A.N. Stability of Elastic Bodies under Uniform Compression. Kiev, Naukova Dumka, 1973. 270 p. (In Russian)
9. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of Multilayered Structures. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (In Russian)
10. Rosen B.W. Fibre Composite Materials. *Mechanics of Composite Strengthening*. Am. Soc. Met., 1965, pp. 574–586.
11. Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 1, pp. 183–211.
12. Xu Y.L., Reifsnider K.L. Micromechanical modeling of composite compressive strength. *J. Compos. Mater.*, 1993, vol. 27, no. 6, pp. 572–588.
13. Zhang G., Latour R.A., Jr. FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity. *J. Thermoplast. Compos. Mater.*, 1993, vol. 6, no. 4, pp. 298–311.
14. Zhang G., Latour R.A., Jr. An analytical and numerical study of fiber microbuckling. *Compos. Sci. Technol.*, 1994, vol. 51, no. 1, pp. 95–109.
15. Naik N.K., Kumar R.S. Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models. *Compos. Struct.*, 1999, vol. 46, no. 3, pp. 299–308.
16. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305.
17. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Badriev I.B., Makarov M.V. Geometrically and physically nonlinear task on the three-point bending of test composite samples. Materialy XXII Mezhdunar. simpoziuma “Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktsii i sploshnykh sred” [Proc. XXII Int. Symp. “Dynamical and Technological Problems of Structural and Continuum Mechanics”]. Moscow, TRP, 2016, pp. 197–202. (In Russian)
18. Paimushin V.N. Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns. *Prikl. Mat. Mekh.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 855–893. (In Russian)
19. Paimushin V.N., Gyunal I.Sh., Lukankin S.A., Firsov V.A. Investigation of the quality of nonlinear equations of elasticity theory based on the problems of stability of flat curved bars with laminated structure (problem formulation). *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, 2010, no. 2, pp. 34–37. (In Russian)
20. Paimushin V.N., Gyunal I.Sh., Lukankin S.A., Firsov V.A. Investigation of the quality of nonlinear equations of elasticity theory based on the problems of stability of flat curved bars with laminated structure (algorithm and results of calculation). *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, 2010, no. 3, pp. 16–19. (In Russian)

21. Paimushin V.N. Variational methods for solving non-linear spatial problems of the joining of deformable bodies. *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1083–1086. (In Russian)
22. Paimushin Variational formulation of mechanics problems of composite bodies of piecewise-homogeneous structure. *Prikl. Mekh.*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 27–34. (In Russian)
23. Paimushin V.N., Firsov V.A., Kholmogorov S.A. Nonlinear behavior of the fiber composite based on carbon fibre under the conditions of displacement. Materialy XXII Mezhdunar. simpoziuma ‘Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktssii i sploshnykh sred’ [Proc. XXII Int. Symp. “Dynamical and Technological Problems of Structural and Continuum Mechanics”]. Moscow, TRP, 2016, pp. 143–145. (In Russian)
24. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1056–1062. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.

Для цитирования: Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Непротиворечивые уравнения нелинейной теории прямых многослойных стержней в квадратичном приближении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 75–87.

For citation: Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Consistent equations of nonlinear rectilinear laminated bars theory in quadratic approximation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 75–87. (In Russian)