ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 12 (475)

УДК 519.6:519.85

И.В. КОННОВ

КОМБИНИРОВАННЫЙ РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Введение

Пусть U — выпуклое замкнутое множество в n-мерном вещественном пространстве R^n и $G: R^n \to R^n$, $H: R^n \to R^n$ — непрерывные однозначные отображения. Тогда можно определить обобщенное вариационное неравенство как задачу нахождения точки $u^* \in R^n$ такой, что

$$H(u^*) \in U \quad \text{и} \quad \langle G(u^*), w - H(u^*)\rangle \geq 0 \quad \forall w \in U. \tag{1}$$

Эта задача оказалась весьма удобной и общей формой записи многих известных задач нелинейного анализа, имеющих разнообразные приложения в математической физике, экономике, исследовании операций, экологии и других областях (напр., [1], [2]), причем теория и методы решения этих задач разрабатывались достаточно независимо друг от друга (напр., [3]–[5]). Прежде всего, легко видеть, что в случае, когда H есть тождественное отображение, т. е. $H(u) = u$, задача (1) совпадает с обычным вариационным неравенством при однозначном основном отображении G.

Если $U = K$, где K — выпуклый замкнутый конус, то (напр., [1]) задача (1) совпадает с обобщенной задачей дополнительности: найти точку $u^* \in R^n$ такую, что

$$H(u^*) \in K, \quad G(u^*) \in K', \quad \langle G(u^*), H(u^*)\rangle = 0,$$

где

$$K' = \{q \in R^n \mid \langle q, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

обозначает сопряженный конус к K. Если же при этом

$$K = R^n_+ = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n\}$$

— неотрицательный ортант в R^n, а отображение H имеет вид $H(u) = u - m(u)$, где $m: R^n \to R^n$ — заданное отображение, то задача (1) становится эквивалентной хорошо известной неявной задаче дополнительности: найти точку $u^* \in R^n$ такую, что

$$u^* \geq m(u^*), \quad G(u^*) \geq 0, \quad \langle G(u^*), u^* - m(u^*)\rangle = 0, \tag{2}$$

имеющей значительное число приложений(напр., [4], [5]).

Рассмотрим теперь квазивариационное неравенство, которое состоит в нахождении точки $u^* \in K(u^*)$ такой, что

$$\langle G(u^*), v - u^*\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K(u^*), \tag{3}$$

где $K: R^n \to R^n$ – некоторое отображение (напр., [6]). В отличие от обычного вариационного неравенства здесь допустимое множество "движется", т. е. зависит от текущей точки, что намного усложняет исследование и решение таких задач, имеющих в то же время широкие приложения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00068.

и в математической физике, и в теории игр, и в экономике. При этом, если отображение K имеет вид $K(u) = U + m(u)$, где $m : R^n \to R^n$ — заданное отображение, то задача (3) совпадает с (1), где $H(u) = u - m(u)$; поэтому, если дополнительно $U = R^n_+$, задача (3) совпадает с (2).

Заметим, что теория различных классов задач, сводящихся к задаче (1), разработана достаточно хорошо (напр., [1], [3]–[7]), в то же время значительные трудности возникают при построении итеративных методов решения подобных задач, сходящихся при достаточно общих предположениях. В принципе задача (1) может быть сведена к обычному вариационному неравенству, но такое преобразование требует весьма ограничительных дополнительных предположений и значительно ухудшает свойства полученной задачи. В самом деле, задачу (1) при условии $H(U) = U$ можно рассматривать как равновесную задачу вида: найти точку $u^* \in U$ такую, что

$$\Phi(u^*, v) \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

где

$$\Phi(u, v) = \langle G(u), H(v) - H(u) \rangle; \tag{4}$$

но даже в этом случае невыпуклость функции $\Phi(u, \cdot)$ (а также недифференцируемость) не позволяет использовать для ее решения обычные методы (напр., [8]). С другой стороны, задача (1), очевидно, эквивалентна вариационному неравенству с основным отображением $F = G \circ H^{-1}$, но поскольку обратное отображение H^{-1} необязательно однозначно, то получаем задачу о нахождении точки $w^* \in U$ такой, что

$$\exists f^* \in F(w^*), \quad \langle f^*, w - w^* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in U. \tag{5}$$

Ясно, что решение такой задачи потребует весьма сложных методов (напр., [8]). Даже в случае однозначности H^{-1} свойства непрерывности и дифференцируемости F будут иметь место лишь при гораздо более жестких предположениях на G и H. Более того, вычисление значения отображения F, как правило, является более сложным, чем вычисление значений отображений G и H. Следовательно, имеет смысл построить методы, применяемые непосредственно к задаче (1), которые сходились бы к решению без отмеченных дополнительных предположений. Один из таких методов, основанный на комбинированном релаксационном подходе [9], [10], предлагается в данной работе.

2. Вспомогательные результаты

Для обоснования метода понадобятся результаты о существовании решений задачи (1), представляющие собой некоторое уточнение соответствующих результатов из [7]. Для этого напомним следующее свойство задачи (5).

Предложение 1 ([11], теорема 4.5). *Пусть U — непустое, замкнутое и выпуклое подмножество R^n, отображение $F : U \to 2^{R^n}$ имеет непустые образы, для любого $v \in U$ множество $L(v) = \{u \in U \mid \inf_{f \in F(u)} \langle f, u - v \rangle \leq 0\}$ замкнуто; а также существует непустое ограниченное подмножество $D \subseteq U$ такое, что для любого $u \in U \setminus D$ найдется такая точка $v \in D$, что*

$$\inf_{f \in F(u)} \langle f, u - v \rangle > 0. \tag{6}$$

Тогда существует точка $w^* \in U$, для которой

$$\inf_{f \in F(w^*)} \langle f, w^* - v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in U. \tag{7}$$

Теперь напомним некоторые свойства типа непрерывности для многозначных отображений.

Определение 1 (напр., [12], с. 94; [13]). Отображение $T : X \to 2^Y$ называется

a) *замкнутым*, если для любой точки $x' \in X$ из соотношений $\{x^k\} \to x'$, $\{t^k\} \to t'$, $t^k \in T(x^k)$ следует $t' \in T(x')$;

b) *полунепрерывным сверху* (*п. св.*), если для любой точки $x' \in X$ и произвольной окрестности D множества $T(x')$ найдется такая окрестность V точки x', что $T(y) \subseteq D$, если $y \in V$;

c) *ограниченным*, если образ $T(K)$ любого ограниченного множества $K \subseteq X$ ограничен.

Известно (напр., [13]), что любое замкнутое ограниченное отображение п. св.

Лемма 1. *Если отображение $A : X \to Y$ непрерывно, а множество X замкнуто, то отображение A^{-1} замкнуто.*

Доказательство. Выберем последовательности $\{y^k\} \to y'$ и $\{x^k\} \to x'$ такие, что $y^k \in Y$, $y' \in Y$, $x^k \in A^{-1}(y^k)$, $x^k \in X$. Тогда $y^k = A(x^k)$ и $y' = \lim\limits_{k\to\infty} A(x^k) = A(x')$ в силу непрерывности A. Поэтому $x' \in A^{-1}(y')$, т. е. A^{-1} замкнуто. $\square$

Приведем условие существования решения задачи (1) на ограниченном множестве.

Предложение 2. *Пусть U — выпуклое замкнутое множество в R^n, отображения $G : R^n \to R^n$ и $H : R^n \to R^n$ непрерывны. Если множество U непусто и ограничено, а отображение H^{-1} ограничено и непусто на U, то существует решение задачи* (1).

Доказательство. Покажем, что множество $L(v)$ при $F = G \circ H^{-1}$ замкнуто для любого $v \in U$. Заметим, что отображение H^{-1} замкнуто по лемме 1 и поэтому имеет непустые компактные образы, следовательно, таковые имеет и отображение F. Пусть w' — предельная точка $L(v)$, поэтому $\{w^k\} \to w'$, где $w^k \in L(v)$. Тогда для любого k имеем $\langle f^k, w^k - v\rangle \le 0$, где $f^k \in F(w^k)$, или $\langle G(u^k), H(u^k) - v\rangle \le 0$, где $u^k \in H^{-1}(w^k)$. Поскольку H^{-1} п. св., то последовательность $\{u^k\}$ ограничена и имеет хотя бы одну предельную точку u'. Из непрерывности H и G следует, что $H(u') = w' \in U$ и $\langle G(u'), H(u') - v\rangle \le 0$. Поэтому $w' \in L(v)$ и множество $L(v)$ замкнуто. В силу компактности U можно положить $D = U$, тогда (6) выполняется, откуда следует (7), т. е. для любого $v \in U$ существует элемент $f \in F(w^*)$ такой, что $\langle f, w^* - v\rangle \le 0$ для некоторого $w^* \in U$. Тогда точка $u^* \in H^{-1}(w^*)$ является решением исходной задачи (1), что и требовалось. $\square$

Для получения условий существования решения на неограниченном множестве используем дополнительное свойство.

Определение 2 (напр., [7]). Отображение $Q : R^n \to R^n$ называется *сильно H-монотонным* на множестве Y с константой $\tau > 0$, если для всех таких $x, y \in R^n$, что $H(x) \in Y$ и $H(y) \in Y$, выполняется

$$\langle Q(x) - Q(y), H(x) - H(y)\rangle \ge \tau\|x - y\|^2.$$

Предложение 3. *Пусть U — непустое, выпуклое и замкнутое множество в R^n, отображение $G : R^n \to R^n$ непрерывно, а отображение $H : R^n \to R^n$ удовлетворяет условию Липшица. Если при этом отображение G сильно H-монотонно на множестве U, а отображение H^{-1} ограничено и имеет непустые образы на U, то существует единственное решение задачи* (1).

Доказательство. Заметим, что из условий предложения следует также замкнутость множества $L(v)$ при $F = G \circ H^{-1}$, а сильная H-монотонность G влечет единственность решения задачи (1). Поэтому остается показать, что выполняется неравенство (6). Зафиксируем точку $v \in U$ и определим $\widetilde{v} \in H^{-1}(v)$. Тогда для любого $y \in R^n$ имеем

$$\langle G(y), H(y) - H(\widetilde{v})\rangle \ge \langle G(\widetilde{v}), H(y) - H(\widetilde{v})\rangle + \tau\|y - \widetilde{v}\|^2 \ge -L\|G(\widetilde{v})\|\,\|y - \widetilde{v}\| + \tau\|y - \widetilde{v}\|^2 \to +\infty$$

при $\|y - \widetilde{v}\| \to +\infty$. Здесь L — константа Липшица для H. Поэтому, если множество U не ограничено, выберем ограниченное множество $\widetilde{D}$ так, чтобы $\widetilde{v} \in \widetilde{D}$ и правая часть неравенства была положительной при $y \notin \widetilde{D}$. Положим $D = U \bigcap H(\widetilde{D})$, ясно, что D непусто и ограничено.

Кроме того, для любого $u \in U \backslash D$ имеем $\langle G(y), H(y) - v\rangle > 0$, где $y \in H^{-1}(u)$, т. е. неравенство (6) выполняется. $\square$

3. Описание метода

При обосновании метода в дальнейшем будем считать выполненными следующие предположения.

(A1) *U — выпуклое замкнутое множество в R^n.*

(A2) *$G : R^n \to R^n$ — локально липшицево отображение.*

(A3) *$H : R^n \to R^n$ — липшицево отображение такое, что отображение H^{-1} ограничено и непусто на выпуклом замкнутом множестве $Y \supseteq U$.*

(A4) *Задача* (1) *имеет решение.*

(A5) *Для любой точки $u \in R^n$ такой, что $H(u) \in U$, выполняется*

$$\langle G(u), H(u) - H(u^*)\rangle \geq 0 \quad \forall u^* \in U^*, \tag{8}$$

где U^* обозначает множество решений задачи (1).

Отметим, что данные условия являются достаточно общими. Так в силу предложений 1–3 условия (A1)–(A3) обеспечивают выполнение (A4) в случае ограниченности U или при выполнении соответствующего условия коэрцитивности. Далее, условие (A5) может быть интерпретировано как существование решений дуального вариационного неравенства к задаче (1), либо (5) при $F = G \circ H^{-1}$ (напр., [9], [8]), что, как известно, выполняется в условиях псевдомонотонности F и существования решения задачи (1) (либо (5)). Заметим также, что (A3) выполняется, если отображение H имеет вид $H(u) = Mu + q$, где M — положительно определенная матрица.

Метод решения задачи (1) при предположениях (A1)–(A5) может быть описан следующим образом. Обозначим через Z_+ множество целых неотрицательных чисел, а через $\pi_Y(\cdot)$ — оператор проектирования на множество Y.

Шаг 0. Выбрать такую точку $u^0 \in R^n$, что $H(u^0) \in Y$, числа $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,2)$, $\widetilde{\theta} > 0$. Определить такое семейство отображений $\{T_k : R^n \times R^n \to R^n\}$, что для каждого $k = 0, 1, \ldots$ выполняются условия

(a) отображение $T_k(x, \cdot)$ сильно H-монотонно на множестве Y с константой $\tau' > 0$ и удовлетворяет условию Липшица с константой $\tau'' < \infty$ для любого $x \in R^n$;

(b) $T_k(x, x) = 0$ для всех $x \in R^n$.

Определить $k := 0$.

Шаг 1. Определить m как наименьший номер из Z_+, для которого выполняется неравенство

$$\langle G(u^k) - G(z^{k,m}), H(u^k) - H(z^{k,m})\rangle \leq (1-\alpha)(\widetilde{\theta}\beta^m)^{-1}\langle T_k(u^k, z^{k,m}), H(z^{k,m}) - H(u^k)\rangle, \tag{9}$$

где $z^{k,m} \in R^n$ — решение задачи

$$H(z^{k,m}) \in U, \quad \langle G(u^k) + (\widetilde{\theta}\beta^m)^{-1} T_k(u^k, z^{k,m}), w - H(z^{k,m})\rangle \geq 0 \quad \forall w \in U. \tag{10}$$

Шаг 2. Определить $\theta_k := \beta^m \widetilde{\theta}$, $v^k := z^{k,m}$. Если $u^k = v^k$, то остановиться. Иначе определить

$$\begin{aligned} g^k &:= G(v^k) - G(u^k) - \theta_k^{-1} T_k(u^k, v^k), \\ \omega_k &:= \langle g^k, H(u^k) - H(v^k)\rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Шаг 3. Определить такую точку $u^{k+1} \in R^n$, что

$$H(u^{k+1}) := \pi_Y[H(u^k) - \gamma(\omega_k / \|g^k\|^2) g^k], \tag{12}$$

$k := k + 1$ и перейти к шагу 1.

Заметим, что задача (10) всегда имеет единственное решение в силу предложения 3. Что касается условий (a), (b) на выбор семейства $\{T_k\}$, то они являются достаточно общими и позволяют использовать на шаге 1 метода в качестве вспомогательной процедуры аналоги итераций разнообразных методов. Например, можно определить $T_k(x,y) = A_k(y-x)$, где $\{A_k\}$ — заданная последовательность матриц, и при $A_k \equiv I$ получим в (10) итерацию проективного метода, при $A_k = \nabla G(u^k)$ — итерацию метода Ньютона и т. д. [10]. При этом данные итерации применяются не к задаче (5) с $F = G \circ H^{-1}$, а к исходной задаче (1) и поэтому подобные итерации метода Ньютона становятся реализуемыми даже при недифференцируемости (многозначности) отображения H^{-1}. Также известно (напр., [8], [10]), что даже в случае, когда H — тождественное отображение, подобные методы не гарантируют сходимости в условиях (A1)–(A5), в то же время метод 1, построенный на основе комбинированного релаксационного подхода, обеспечивает сходимость. Следует отметить, что сильная H-монотонность отображения $T_k(x,\cdot)$ не обязательно требует сильной монотонности $T_k(x,\cdot)$ (положительной определенности A_k) и H. Например, если определить $n = 2$, $H(x) = Bx$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то условие сильной H-монотонности выполняется при

$$A_k \equiv A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

поскольку

$$\langle A(x'-x''), B(x'-x'')\rangle = \langle B^T A(x'-x''), x'-x''\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}(x'-x''), x'-x'' \right\rangle \geq \|x'-x''\|^2.$$

При этом обе матрицы A и B не являются даже неотрицательно определенными.

Следует отметить, что вспомогательная задача (10) эквивалентна нелинейному уравнению

$$H(z^{k,m}) = \pi_U[H(z^{k,m}) - (\widetilde{\theta}\beta^m)G(u^k) - T_k(u^k, z^{k,m})] \tag{13}$$

(напр., [7]). Выбор T_k позволяет существенно упростить эту задачу даже в общем случае. Например, полагая $T_k(u,z) = H(z) - H(u)$ в (13), получаем итерацию проективного типа

$$H(z^{k,m}) := \pi_U[H(u^k) - (\widetilde{\theta}\beta^m)G(u^k)]. \tag{14}$$

Задачи (12)–(14) представляют собой уравнения (в общем случае нелинейные) с основным отображением H (но не G). Методы их решения разработаны достаточно хорошо (напр., [14]) и зависят от способа задания отображения H и множеств U и Y. В частности, если отображение H аффинно или кусочно-аффинно, то можно найти точное решение задач (12) и (14) с помощью конечных алгоритмов. Для случая, когда U есть неотрицательный ортант, решение задачи (10) (или (13)) может быть найдено с помощью аппарата оценочных функций (напр., [15]). В общем случае решение этих задач можно найти приближенно, что обычно не сказывается на свойствах сходимости методов данного типа.

Также отметим, что по сравнению с методом проксимального типа из [16], сходящимся при близких предположениях, метод 1 не требует решения вспомогательных нелинейных задач, содержащих отображение G, т. е. его реализация существенно проще. При обосновании метода в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$w^k = H(u^k), \quad t^k = H(v^k), w^* = H(u^*) \text{ при } u^* \in U^*. \tag{15}$$

4. Обоснование сходимости

Сначала рассмотрим условие останова на шаге 2.

Лемма 2. *Если $u^k = v^k$, то $u^k \in U^*$.*

Доказательство. Если $u^k = v^k$, то из (10) и свойства (b) для T_k получаем, что $u^k \in U^*$. $\square$

Таким образом, останов метода 1 возможен лишь в точке, являющейся решением задачи. Поэтому в дальнейшем считаем, что останова не происходит, т.е. $u^k \neq v^k$ для $k = 0, 1, \dots$ Обоснуем теперь конечность процедуры линейного поиска.

Лемма 3. a) *Процедура линейного поиска на шаге 1 всегда конечна.*

b) *Если последовательность $\{w^k\}$ ограничена, то ограничены последовательности $\{u^k\}$, $\{v^k\}$ и $\{t^k\}$, а также выполняется соотношение*

$$\theta_k \geq \theta' > 0 \quad \textit{для} \quad k = 0, 1, \dots \tag{16}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $\widetilde{u} \in R^n$ такую, что $H(\widetilde{u}) \in U$. Тогда для любого $j \in Z_+$ из (10) следует

$$\langle G(u^k) + (\widetilde{\theta}\beta^j)^{-1} T_k(u^k, z^{k,j}), H(\widetilde{u}) - H(z^{k,j}) \rangle \geq 0,$$

отсюда с учетом (A3) и свойств T_k получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta} L_H \|G(u^k)\| \, \|\widetilde{u} - z^{k,j}\| &\geq (\widetilde{\theta}\beta^j) \langle G(u^k), H(\widetilde{u}) - H(z^{k,j}) \rangle \geq \\ &\geq \langle T_k(u^k, z^{k,j}) - T_k(u^k, \widetilde{u}), H(z^{k,j}) - H(\widetilde{u}) \rangle + \\ &+ \langle T_k(u^k, \widetilde{u}) - T_k(u^k, u^k), H(z^{k,j}) - H(\widetilde{u}) \rangle \geq \tau' \|z^{k,j} - \widetilde{u}\|^2 - \tau'' L_H \|\widetilde{u} - u^k\| \, \|z^{k,j} - \widetilde{u}\|,\end{aligned}$$

или

$$\tau' \|z^{k,j} - \widetilde{u}\| \leq L_H (\widetilde{\theta} \|G(u^k)\| + \tau'' \|\widetilde{u} - u^k\|),$$

где L_H — константа Липшица для H. Следовательно,

$$\|z^{k,j} - u^k\| \leq \|z^{k,j} - \widetilde{u}\| + \|\widetilde{u} - u^k\| \leq (\widetilde{\theta} L_H / \tau') \|G(u^k)\| + (L_H \tau'' / \tau' + 1) \|\widetilde{u} - u^k\| = \mu_k. \tag{17}$$

В силу (A2) существует константа Липшица $L_G^{(k)}$ для G на множестве $\{u \in R^n \mid \|u - u^k\| \leq \mu_k\}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\langle G(u^k) - G(z^{k,j}), H(u^k) - H(z^{k,j}) \rangle &\leq L_G^{(k)} L_H \|u^k - z^{k,j}\|^2 \leq \\ &\leq (L_G^{(k)} L_H / \tau') \langle T_k(u^k, z^{k,j}) - T_k(u^k, u^k), H(z^{k,j}) - H(u^k) \rangle \leq \\ &\leq (1 - \alpha)(\widetilde{\theta}\beta^j)^{-1} \langle T_k(u^k, z^{k,j}), H(z^{k,j}) - H(u^k) \rangle,\end{aligned}$$

если $(1 - \alpha)(\widetilde{\theta}\beta^j)^{-1} \geq L_G^{(k)} L_H / \tau'$ или $\widetilde{\theta}\beta^j \leq (1 - \alpha)\tau' / (L_G^{(k)} L_H)$. Поэтому соотношение (9) будет выполняться для достаточно большого $j = m$, при этом

$$\theta_k \geq \min\{\beta(1 - \alpha)\tau' / (L_G^{(k)} L_H), \widetilde{\theta}\} > 0. \tag{18}$$

Утверждение a) справедливо. В случае ограниченности последовательности $\{w^k\}$ в силу (A3) и (15) последовательность $\{u^k\}$ также ограничена, поэтому существуют числа $\mu < \infty$ и $L_G < \infty$ такие, что $\mu_k \leq \mu < \infty$ и $L_G^{(k)} \leq L_G < \infty$ для всех $k = 0, 1, \dots$, и из (18) теперь следует (16), а из (17) — ограниченность последовательностей $\{v^k\}$ и $\{t^k\}$, т.е. утверждение b) справедливо. $\square$

Лемма 4. *В методе* 1 *выполняются соотношения*

$$\langle g^k, w^k - t^k\rangle \geq (\alpha/\theta_k)\langle T_k(u^k, v^k), t^k - w^k\rangle \geq (\alpha\tau'/\theta_k)\|u^k - v^k\|^2 \tag{19}$$

и

$$\|w^{k+1} - w^*\|^2 \leq \|w^k - w^*\|^2 - \gamma(2-\gamma)(\omega_k/\|g^k\|)^2 \quad \forall w^* \in W^*, \tag{20}$$

где $W^* = \{w^* \in U \mid w^* = H(u^*),\ u^* \in U^*\}$.

Доказательство. Используя (9), (11) и свойства T_k, имеем

$$\begin{aligned}\langle g^k, w^k - t^k\rangle &= \langle G(v^k) - G(u^k) - \theta_k^{-1}T_k(u^k, v^k), w^k - t^k\rangle \geq \\ &\geq ((1-\alpha)/\theta_k)\langle T_k(u^k, v^k), w^k - t^k\rangle - \theta_k^{-1}\langle T_k(u^k, v^k), w^k - t^k\rangle = \\ &= (\alpha/\theta_k)\langle T_k(u^k, v^k), t^k - w^k\rangle \geq (\alpha\tau'/\theta_k)\|u^k - v^k\|^2,\end{aligned}$$

т. е. (19) выполняется. Далее, сложение (8) с $u = v^k$ и (10) с $w = w^*$ дает

$$\langle G(v^k) - G(u^k) - \theta_k^{-1}T_k(u^k, v^k), t^k - w^*\rangle \geq 0$$

для любого $w^* \in W^*$, поэтому

$$\langle g^k, w^k - w^*\rangle = \langle g^k, w^k - t^k\rangle + \langle g^k, t^k - w^*\rangle \geq \omega_k \geq 0$$

в силу (11) и (19). Используя теперь свойства проекции, имеем

$$\begin{aligned}\|w^{k+1} - w^*\|^2 &\leq \|w^k - \gamma(\omega_k/\|g^k\|^2)g^k - w^*\|^2 = \\ &= \|w^k - w^*\|^2 - 2\gamma(\omega_k/\|g^k\|^2)\langle g^k, w^k - w^*\rangle + (\gamma\omega_k/\|g^k\|)^2 \leq \\ &\leq \|w^k - w^*\|^2 - 2\gamma(\omega_k/\|g^k\|)^2 + (\gamma\omega_k/\|g^k\|)^2,\end{aligned}$$

т. е. (20) также выполняется. □

Отметим, что в случае, когда останов не происходит, т. е. когда $u^k \neq v^k$, из (19) следует $g^k \neq 0$, т. е. шаг 3 метода 1 корректен. Теперь нетрудно установить сходимость метода.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{u^k\}$ *построена методом* 1, *то она имеет предельные точки, причем все они находятся в* U^*, *кроме того,*

$$\lim_{k\to\infty} w^k = w^* \in W^*. \tag{21}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (20) следует ограниченность последовательности $\{w^k\}$, а значит, по лемме 3 b) последовательности $\{u^k\}$, $\{v^k\}$ и $\{t^k\}$ также ограничены и выполняется (16). Теперь из (19) и (20) следует

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - v^k\| = 0. \tag{22}$$

В силу ограниченности последовательностей $\{u^k\}$ и $\{v^k\}$ они содержат сходящиеся подпоследовательности $\{u^{k_s}\}$ и $\{v^{k_s}\}$, при этом из (22) следует $\lim\limits_{s\to\infty} u^{k_s} = \lim\limits_{s\to\infty} v^{k_s} = u^*$, кроме того, $H(u^*) \in U$ в силу непрерывности H. Далее, для произвольной точки $w \in U$ из (10) получим

$$\langle G(u^{k_s}), w - t^{k_s}\rangle \geq \langle T_{k_s}(u^{k_s}, v^{k_s}), t^{k_s} - w\rangle/\theta_{k_s} \geq -\tau''\|u^{k_s} - v^{k_s}\|\,\|t^{k_s} - w\|/\theta'.$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$, с учетом (22) получаем $\langle G(u^*), w - H(u^*)\rangle \geq 0$, т. е. $u^* \in U^*$ в силу произвольности выбора w, и первое утверждение теоремы справедливо. Далее, в силу непрерывности H получаем

$$w' = \lim_{s\to\infty} w^{k_s} = \lim_{s\to\infty} H(u^{k_s}) = H(u^*) \in W^*,$$

и соотношение (21) следует из (20). □

5. Скорость сходимости

При дополнительных предположениях о свойствах G метод 1 достигает линейной скорости сходимости.

Теорема 2. *Пусть отображение G сильно H-монотонно на множестве U с константой τ. Если последовательность $\{u^k\}$, построенная методом 1, бесконечна, то соответствующая последовательность $\{w^k\}$ сходится линейно к точке $w^* = H(u^*)$ такой, что u^* — единственное решение задачи* (1).

Доказательство. Согласно предложению 3 задача (1) имеет единственное решение при сделанных предположениях. Сложение (1) с $w = H(v^k)$ и (10) с $w = H(u^*)$ дает

$$\langle G(u^*) - G(u^k) - \theta_k^{-1}T_k(u^k, v^k), H(v^k) - H(u^*)\rangle \geq 0,$$

или с учетом свойств T_k

$$\begin{aligned}\langle G(u^*) - G(u^k), H(u^*) - H(u^k)\rangle &\leq \langle G(u^*) - G(u^k), H(v^k) - H(u^k)\rangle + \\ &+ \theta_k^{-1}\langle T_k(u^k, v^k), H(u^*) - H(v^k)\rangle \leq \\ &\leq \langle G(u^*) - G(u^k), H(v^k) - H(u^k)\rangle + \theta_k^{-1}\langle T_k(u^k, v^k), H(u^*) - H(u^k)\rangle.\end{aligned}$$

Тогда, учитывая ограниченность последовательности $\{w^k\}$ в силу (20), а также утверждение леммы 3 b), получаем

$$\begin{aligned}\tau\|u^k - u^*\|^2 &\leq \langle G(u^k) - G(u^*), H(u^k) - H(u^*)\rangle \leq \\ &\leq \langle G(u^*) - G(u^k), H(v^k) - H(u^k)\rangle + \theta_k^{-1}\langle T_k(u^k, v^k), H(u^*) - H(u^k)\rangle \leq \\ &\leq L_G L_H\|u^k - u^*\|\|u^k - v^k\| + (\tau'' L_H/\theta')\|u^k - u^*\|\,\|u^k - v^k\|,\end{aligned}$$

где L_G и L_H – соответствующие константы Липшица для G и H. Отсюда следует $\|u^k - v^k\|^2 \geq \mu\|w^k - w^*\|^2$, где $\mu = (\tau/((L_G L_H + \tau'' L_H/\theta')L_H))^2$. С другой стороны, используя (11), (19) и свойства T_k, имеем

$$\begin{aligned}(\omega_k\|g^k\|)^2 &\geq (\alpha\tau')^2\|u^k - v^k\|^4/(\theta_k\|G(v^k) - G(u^k) - \theta_k^{-1}T_k(u^k, v^k)\|)^2 \geq \\ &\geq (\alpha\tau')^2\|u^k - v^k\|^2/(\tilde{\theta}L_G + \tau'')^2 = \mu'\|u^k - v^k\|^2.\end{aligned}$$

Объединяя оба неравенства вместе с (20), получаем

$$\|w^{k+1} - w^*\|^2 \leq \|w^k - w^*\|^2 - \gamma(2-\gamma)\mu\mu'\|w^k - w^*\|^2 = \nu\|w^k - w^*\|^2$$

при $\nu = 1 - \gamma(2-\gamma)\mu\mu' \in (0,1)$, что и требовалось. □

В случае, когда H — тождественное отображение, получаем результат о скорости сходимости метода для обычных вариационных неравенств (напр., [10], теорема 1.4.5). Заметим, что результат теоремы 2 не требует свойств гладкости и однозначности отображения H^{-1} в пространстве R^n, т.е. получаем существенное усиление результатов сходимости по сравнению с известными результатами для различных методов, примененных к преобразованной эквивалентной задаче (5) с $F = G \circ H^{-1}$.

Литература

1. Noor M.A., Noor K.I., Rassias Th.M. *Invitation to variational inequalities* // Analysis, Geometry and Groups: A Riemann Legacy Volume. – Palm Harbor: Hadronic Press, 1993. – P. 373–448.
2. Noor M.A. *Variational inequalities in physical oceanography* // Ocean Waves Engineering. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994. – P. 201–226.
3. Harker P.T., Pang J.-S. *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications* // Math. Progr. – 1990. – V. 48. – № 2. – P. 161–220.

4. Pang J.-S. *The implicit complementarity problem* // Nonlinear Programm. 4. Proc. 4th Symp. (Madison, Wisc., July 14–16, 1980). – New York: Academic Press, 1981. – P. 487–518.
5. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. *Импульсное управление и квазивариационные неравенства.* – М.: Наука, 1987. – 600 с.
6. Mosco U. *Implicit variational problems and quasivariational inequalities* // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1976. – V. 543. – P. 83–156.
7. Pang J.-S., Yao J.-C. *On a generalization of a normal map and equation* // SIAM J. Contr. and Optim. – 1995. – V. 33. – № 1. – P. 168–184.
8. Коннов И.В. *Методы решения конечномерных вариационных неравенств.* – Казань: ДАС, 1998. – 101 с.
9. Коннов И.В. *Комбинированные релаксационные методы для поиска точек равновесия и решения смежных задач* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 2. – С. 46–53.
10. Konnov I.V. *Combined relaxation methods for variational inequalities.* – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. – 181 p.
11. Yao J.-C., Guo J.-S. *Variational and generalized variational inequalities with discontinuous mappings* // J. Math. Anal. Appl. – 1994. – V. 182. – № 2. – P. 371–392.
12. Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика.* – М.: Мир, 1972. – 520 с.
13. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Многозначные отображения* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1982. – Т. 19. – С. 127–230.
14. Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975. – 560 с.
15. Kanzow C., Fukushima M. *Equivalence of the generalized complementarity problem to differentiable unconstrained optimization* // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1996. – V. 90. – № 3. – P. 581–603.
16. He B. *Inexact implicit methods for monotone general variational inequalities* // Math. Progr. – 1999. – V. 86. – № 1. – P. 199–217.

Казанский государственный университет

Поступила
29.01.2001