КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 123, кн. 1 *Ученые записки* 1963

Л. И. ЧИБРИКОВА

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Наряду с кругом и полуплоскостью прямоугольник часто используется в качестве канонической области. Поэтому изучению граничных задач для прямоугольника уделяется столь большое внимание. В ранних работах [1] — [3] можно найти различные методы решения задачи Дирихле, в более поздних, например, в работах [4] — [7], — задачи Гильберта и смешанной задачи.

В данной статье мы, используя свойства эллиптических функций, укажем единый способ решения этих задач и, кроме того, рассмотрим ряд задач склеивания, в которых внутри прямоугольника отыскиваются аналитические функции по граничным условиям, связывающим значения искомой функции в разных точках.

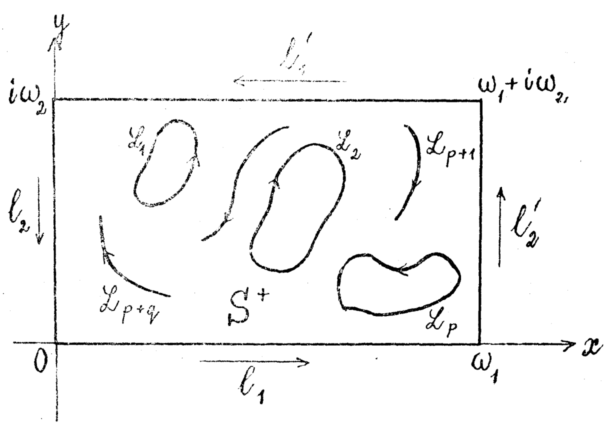

Рис. 1

Основой при решении всех этих задач будет краевая задача Римана для двоякопериодических функций. Краткие указания о методе ее решения имеются в работе [8], но они требуют некоторых дополнений и уточнений. Поэтому мы начнем наше изложение с решения этой задачи.

§ 1. Краевая задача для двоякопериодических функций

Обозначим через S^+ внутренность прямоугольника с вершинами в точках 0, ω_1, $\omega_1 + i\omega_2$, $i\omega_2$, где ω_1, ω_2 — некоторые вещественные положительные числа (рис. 1). Нижнее и верхнее основания прямоугольника обозначим через l_1 и l_1', а боковые стороны через l_2 и l_2'

соответственно. Пусть L есть заданная на прямоугольнике S^+ линия, состоящая из p простых гладких замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_p$ и q разомкнутых $L_{p+1}, \ldots, L_{p+q}$, не имеющих общих точек. Рассмотрим задачу:

Найти кусочноголоморфную двоякопериодическую с основными периодами ω_1, $i\omega_2$ функцию $\Phi(z)$, имеющую полюсы не выше заданных порядков $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ в соответствующих точках $z_1, z_2, \ldots, z_m$ прямоугольника S^+, если на линии L она удовлетворяет граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{1.1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L.

Прямоугольник S^+ является фундаментальной областью (параллелограммом периодов) двоякопериодической группы Γ, порожденной подстановками

$$\sigma_1(z) = z + \omega_1, \quad \sigma_2(z) = z + i\omega_2,$$

и двоякопериодические функции являются одним из классов автоморфных функций с двумя основными инвариантами $p(z)$ и $p'(z)$, где

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right] \tag{1.2}$$

есть двоякопериодическая функция Вейерштрасса [9], принимающая в параллелограмме периодов каждое значение два раза; здесь суммирование распространено на все неравные нулю периоды $\Omega = m_1\omega_1 + i m_2\omega_2$. Так как род прямоугольника S^+ $\rho = 1$, то согласно известным результатам [10] при решении задачи Римана в качестве аналога ядра Коши можно было бы взять двоякопериодическую функцию

$$\begin{gathered} H(z, \tau) = \zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - z_0) + \zeta(z - a_1) - \zeta(z_0 - a_1), \\ \zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2}\right) = \\ = \frac{1}{z} - c_2\frac{z^3}{3} - c_5\frac{z^5}{5} - \ldots \end{gathered} \tag{1.3}$$

с одним неподвижным полюсом первого порядка в точке $z = a_1$. Однако все рассуждения и вычисления будут проще, если вместо ядра $H(z, \tau)$ использовать функцию $\zeta(\tau - z)$, обладающую свойством квазипериодичности:

$$\begin{gathered} \zeta(z + \Omega) = \zeta(z) + \eta, \\ \eta = m_1\eta + m_2\eta_2, \quad \eta_1 = 2\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right), \quad \eta_2 = 2\zeta\left(\frac{iw_2}{2}\right). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Некоторые свойства интегралов с ядром $\zeta(\tau - z)$ изучались Койтером [12].

Остановимся сначала на задаче определения кусочноголоморфной функции $\Phi(z)$ по заданному скачку $g(t)$:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t). \tag{1.5}$$

Легко видеть, что вся совокупность ограниченных в прямоугольнике S^+ квазипериодических функций, определяемых формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(\tau)\,\zeta(\tau - z)\,d\tau + C \tag{1.6}$$

имеет на линии L скачок, равный $g(t)$. При изменении z на период Ω любая из них изменяется на постоянное слагаемое

$$-\frac{\eta}{2\pi i}\int_L g(\tau)\,d\tau,$$

и двоякопериодическими они будут лишь в том случае, если

$$\int_L g(\tau)\,d\tau=0. \tag{1.7}$$

Таким образом, условие (1.7) является необходимым и достаточным для того, чтобы краевая задача (1.5) имела ограниченные в параллелограмме периодов двоякопериодические решения. При выполнении условия (1.7) все такие решения будут содержаться в формуле (1.6).

В частности, исчезающее в точке $z=0$ решение будет иметь такой вид:

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau. \tag{1.8}$$

На основании известного тождества

$$\frac{p'(\tau)+p'(z)}{p(\tau)-p(z)}=2\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)+\zeta(z)\right] \tag{1.9}$$

и условия (1.7) это решение можно записать ещё так:

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_L g(\tau)\,\frac{p'(\tau)+p'(z)}{p(\tau)-p(z)}\,d\tau. \tag{1.10}$$

Решением задачи (1.5), имеющим в точках $z_1, z_2,\ldots, z_m$ полюсы порядков не выше $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m$ будет, очевидно, функция

$$\begin{gathered}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\,\zeta(\tau-z)\,d\tau+C+\\+\sum_{j=1}^{m}\left[C_{j0}\,\zeta(z-z_j)+C_{j1}\,\zeta'(z-z_j)+\ldots+C_{j,\lambda_j-1}\,\zeta^{(\lambda_j-1)}(z-z_j)\right]\end{gathered} \tag{1.11}$$

при условии, что

$$C_{10}+C_{20}+\ldots+C_{m0}=\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\,d\tau. \tag{1.12}$$

Это условие обеспечивает периодичность правой части равенства (1.11). В силу него в формуле (1.11) будет ровно $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m$ произвольных постоянных.

Каноническую функцию однородной задачи

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t) \tag{1.13}$$

строим следующим образом. Берем функцию $e^{\Gamma(z)}$, где

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\,\zeta(\tau-z)\,d\tau \tag{1.14}$$

и пусть $c_1, c_2,\ldots, c_{2q+p}$ есть точки, принятые за начало обхода на замкнутых контурах $L_1, L_2,\ldots, L_p$, входящих в L, и концы разомкнутых контуров $L_{p+1},\ldots, L_{p+q}$. Вблизи точки c_j $\Gamma(z)$ ведет себя как обычный интеграл типа Коши:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=(\alpha_j+i\beta_j)\ln(z-c_j)+\Gamma_1(z)=\\&=(\alpha_j+i\beta_j)\ln\sigma(z-c_j)+\Gamma^*(z),\end{aligned} \tag{1.15}$$

где $\Gamma^*(z)$ — некоторая функция, стремящаяся к вполне определенному конечному пределу, когда $z \to c_j$, оставаясь справа или слева от L; число

$$\alpha_j + i\beta_j = \pm \frac{1}{2\pi i} \ln G(c_j), \tag{1.16}$$

когда точка c_j является концевой, и

$$\beta_j = 0, \quad \alpha_j = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{L_j}, \tag{1.17}$$

когда c_j лежит на замкнутом контуре L_j; $\sigma(z)$ есть сигма-функция Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega}\right)^2}. \tag{1.18}$$

Функция $\sigma(z)$ — целая, нечетная; ее логарифмическая производная дает функцию $\zeta(z)$:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z). \tag{1.19}$$

При изменении z на период Ω $\sigma(z)$ приобретает множитель:

$$\sigma(z + \Omega) = \varepsilon e^{\eta\left(z + \frac{\Omega}{2}\right)} \sigma(z), \tag{1.20}$$

где $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$, смотря по тому, будет $\frac{\Omega}{2}$ периодом или нет.

Функция $e^{\Gamma(z)}$ удовлетворяет граничному условию (1.13), но в точках c_j, для которых $\alpha_j < 0$, $|\alpha_j| \geqslant 1$, будет обращаться в бесконечность неинтегрируемого порядка, так как в окрестности c_j в силу формулы (1.15)

$$e^{\Gamma(z)} = [\sigma(z - c_j)]^{\alpha_j + i\beta_j} e^{\Gamma_*(z)}.$$

Мы же, как обычно, отыскиваем решение задачи Римана среди кусочноголоморфных функций, интегрируемых вдоль линии L. Для определенности будем рассматривать кусочноголоморфные функции, ограниченные в S заданных неособенных концах и интегрируемых на остальных концах, то-есть функции одного из классов h_s ([11], стр. 239). Одной из функций этого класса, удовлетворяющей краевому условию (1.13), будет произведение

$$P(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=1}^{2q+p} [\sigma(z - c_j)]^{-\varkappa_j}, \tag{1.21}$$

если целые числа $\varkappa_j$ подобрать так, чтобы $0 < \alpha_j - \varkappa_j < 1$ на концах c_j, определяющих избранный класс h_s, $-1 < \alpha_j - \varkappa_j < 0$ на остальных неособенных концах и $\alpha_j - \varkappa_j = 0$ на особенных концах и в точках c_j, расположенных на замкнутых контурах линии L. Обозначим через $\varkappa$ сумму всех этих чисел

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_{2q+p}. \tag{1.22}$$

При изменении z на период Ω получим:

$$P(z + \Omega) = P(z)\, \varepsilon^{-\varkappa} e^{\eta(\beta - \alpha)} e^{-\eta\varkappa\left(z + \frac{\Omega}{2}\right)},$$

где α и β — постоянные:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G(\tau)\,d\tau, \quad \beta = \sum_{j=1}^{2q+p} \varkappa_j c_j. \tag{1.23}$$

Пусть $\varkappa > 0$. Умножая $P(z)$ на $\sigma(z-\theta_1)$, $\sigma(z-\theta_2), \ldots, \sigma(z-\theta_\varkappa)$, где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\varkappa$ — некоторые точки прямоугольника S^+, не лежащие на L, такие что

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\varkappa = \beta - \alpha, \tag{1.24}$$

получим двоякопериодическую функцию

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=1}^{2q+p} [\sigma(z-c_j)]^{-\varkappa_j} \prod_{k=1}^{\varkappa} \sigma(z-\theta_k), \tag{1.25}$$

обладающую всеми свойствами канонической функции. В прямоугольнике S^+ она имеет порядок $-\varkappa$, а именно, $\varkappa$ нулей $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\varkappa$. Среди этих точек могут быть и одинаковые. Будем считать, что различных среди них n: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ с кратностями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ соответственно, так что индекс задачи

$$\varkappa = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n.$$

Если нам требуется найти общее решение неоднородной задачи класса h_s, то, используя функцию (1.25), записываем краевое условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Отношение $\Phi(z)/X(z)$ представляет кусочноголоморфную двоякопериодическую функцию, имеющую в параллелограмме периодов S^+ полюсы в точках $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_m$ порядков $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ соответственно, а на линии L — скачок, равный $g(t)/X^+(t)$. На основании вышеизложенного все искомые решения будут содержаться в формуле

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau - z)\,d\tau +$$

$$+ X(z)\Big\{C + \sum_{j=1}^{m} [C_{j0}\zeta(z-z_j) + \ldots + C_{j,\lambda_j-1}\zeta^{(\lambda_j-1)}(z-z_j)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} [D_{k0}\zeta(z-\theta_k) + \ldots + D_{k,\mu_k-1}\zeta^{(\mu_k-1)}(z-\theta_k)]\Big\}, \tag{1.26}$$

если постоянные C_{j0} ($j = 1, \ldots, m$) и D_{k0} ($k = 1, \ldots, n$) связаны соотношением

$$\sum_{j=1}^{m} C_{j0} + \sum_{k=1}^{n} D_{k0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau. \tag{1.27}$$

Таким образом, при $\varkappa > 0$ задача Римана (1.1) имеет $\varkappa + \lambda$ линейно-независимых решений класса h_s, имеющих в параллелограмме периодов заданный порядок λ.

Чтобы получить ограниченные в прямоугольнике S^+ решения, надо в формуле (1.26) положить все $C_{ji} = 0$. Таких решений, очевидно, ровно $\varkappa$.

При $\varkappa = 0$ $e^{\Gamma(z)}$ при изменении z на период Ω приобретает множитель $e^{-\eta\alpha}$. Здесь, очевидно, могут представиться два случая.

1). $\alpha = 0$. В этом случае

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \tag{1.28}$$

будет двоякопериодической и общее решение неоднородной задачи определится теми же формулами (1.26), (1.27), если положить в них все $D_{kl} = 0$. Произвольных постоянных в формуле (1.26) будет λ.

Что касается ограниченных в S^+ решений, то при выполнении условия

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau = 0 \tag{1.29}$$

их целое однопараметрическое семейство.

2). $\alpha \neq 0$.

Если α не является одним из периодов группы Γ, можно за каноническую функцию по-прежнему взять функцию (1.28), но вместо квазипериодического ядра $\zeta(\tau - z)$ взять

$$\frac{\sigma(\tau - z - \alpha)}{\sigma(-\alpha)\,\sigma(\tau - z)}.$$

Это ядро при изменении z на период Ω приобретает множитель $e^{\eta\alpha}$. Единственным ограниченным в S^+ решением задачи (1.1) будет

$$\Phi(z) = \frac{e^{\Gamma(z)}}{2\pi i} \int_L g(\tau)\, e^{-\Gamma^+(\tau)} \frac{\sigma(\tau - z - \alpha)}{\sigma(-\alpha)\,\sigma(\tau - z)} d\tau. \tag{1.30}$$

Но можно сделать и так. Взять за каноническую функцию

$$X(z) = \frac{\sigma(z + \alpha_1)}{\sigma(z - \alpha_2)} e^{\Gamma(z)},$$

где α_1 и α_2 — два любые числа, не являющиеся периодами и такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Тогда единственным ограниченным решением неоднородной задачи будет

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \alpha_2) + \zeta(\tau + \alpha_1) - \zeta(\alpha)]\, d\tau.$$

Если же α — период, то ограниченное решение будет существовать лишь при выполнении условия (1.29). Оно будет иметь вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \alpha_2)]\, d\tau\cdot$$

При $\varkappa < 0$ за каноническую функцию можно взять

$$X(z) = P(z) \prod_{k=1}^{-\varkappa} [\sigma(z - \theta_k)]^{-1},$$

где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{-\varkappa}$ — некоторые точки, не лежащие на L, и такие, что

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{-\varkappa} = \alpha - \beta.$$

Если все точки θ_k между собой различны, то неоднородная задача будет иметь (единственное) ограниченное в S^+ решение

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \theta_{-\varkappa})] d\tau$$

только в том случае, если функция $g(t)$ удовлетворяет условию (1.29) и условиям

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [\zeta(\tau - \theta_k) - \zeta(\tau - \theta_{-\varkappa})]\, d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1.$$

Всего получается $(-\varkappa)$ условий разрешимости.

Решение задачи Римана при условии четности или нечетности искомой функции существенно отличается от рассмотренного общего случая. Это объясняется следующими причинами.

Четные двоякопериодические функции являются автоморфными по отношению к группе Γ_*, подстановки которой имеют вид

$$\sigma_k(z) = \pm z + \Omega, \quad \Omega = m_1\omega_1 + im_2\omega_2.$$

Двоякопериодическая группа Γ является подгруппой группы Γ_*. Фундаментальной областью группы Γ_* является половина параллелограмма периодов группы Γ. Простейшей четной двоякопериодической функцией является $p(z)$. Если каждое свое значение в параллелограмме периодов $p(z)$ принимает дважды, то в фундаментальной области группы Γ_* — только один раз. Следовательно, фундаментальная область группы Γ_* имеет род, равный нулю, и функция $p(z)$ есть единственный основной инвариант этой группы. Когда линия L лежит целиком внутри прямоугольника S^+, решение задачи Римана удобно записывать в интегралах с ядром $p'(\tau)/p(\tau) - p(z)$ ([8], стр. 74—75).

Нечетная функция не является автоморфной, ибо при всех преобразованиях подгруппы вращений группы Γ_* она приобретает множитель (-1). Однако и в этом случае решение задачи Римана находится при помощи очень простых рассуждений ([8], стр. 75—77).

§ 2. Краевая задача Гильберта

Рассмотрим следующую задачу:

Найти функцию $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, голоморфную внутри прямоугольника S^+, по граничному условию

$$au + bv = c \quad \text{на} \quad L = l_1 + l_1' + l_2 + l_2', \tag{2.1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на L действительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера всюду, кроме вершин прямоугольника, где они могут иметь разрывы первого рода; при этом $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L.

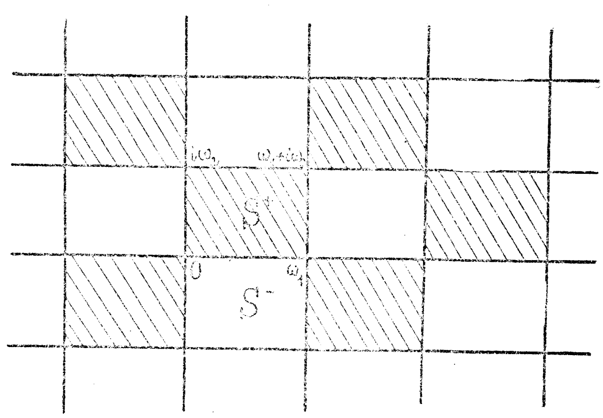

Рис. 2.

Эта задача может быть решена методом, аналогичным тому, каким в монографии [11] (стр. 98—117) она решается для круга и полуплоскости. Обозначая через S^- прямоугольник, симметричный с S^+ относительно вещественной оси (рис. 2), введем вспомогательную кусочноголоморфную функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} F(z), & z \in S^+, \\ \overline{F}(\bar z), & z \in S^-, \end{cases}$$

которую распространяем автоморфно относительно группы Γ_* на всю плоскость:

$$\Phi(\pm z + \Omega) = \Phi(z), \quad \Omega = 2m_1\omega_1 + 2im_2\omega_2. \tag{2.2}$$

Эта кусочноголоморфная функция вне линий скачков обладает свойством

$$\overline{\Phi}(z) = \Phi(z), \tag{2.3}$$

а на L — границе прямоугольника S^+ — из краевого условия (2.1) при помощи (2.2) и (2.3) без труда получим:

$$\Phi^+(t) = -\frac{a(t)+ib(t)}{a(t)-ib(t)}\Phi^-(t) + \frac{2c(t)}{a(t)-ib(t)}. \tag{2.4}$$

Таким образом, для определения функции $\Phi(z)$ получили задачу Римана для двоякопериодических четных функций, причем надо найти ограниченные решения этой задачи, удовлетворяющие условию (2.3).

Так как точка $z=0$, являющаяся полюсом функции $p(z)$, лежит на линии L, при решении задачи удобнее пользоваться интегралами, ядра которых выражаются через функцию $\zeta(z)$. Берем четную двоякопериодическую функцию

$$e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G_0(\tau)\left[\zeta(\tau - z) + \zeta(\tau + z)\right]d\tau,$$
$$G_0(t) = i(a+ib), \tag{2.5}$$

удовлетворяющую граничному условию

$$\Psi^+(t) = i(a+ib)\Psi^-(t). \tag{2.6}$$

В окрестности любой из четырех вершин прямоугольника S^+ $t_0=0$, $t_1=\omega_1$, $t_2=\omega_1+i\omega_2$, $t_3=i\omega_2$

$$\Gamma(z) = (\alpha_j + i\beta_j)\ln\sigma(z-t_j) + \Gamma_*(z),$$
$$e^{\Gamma(z)} = \left[\sigma(z-t_j)\sigma(z+t_j)\right]^{\alpha_j+i\beta_j} e^{\Gamma_*(z)},$$

где

$$\alpha_j + i\beta_j = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G_0(t_j-0)}{G_0(t_j+0)}.$$

Предположим, что ни одна из вершин не является особенной и пусть целые числа $\varkappa_j$ таковы, что $-1 < \alpha_j - \varkappa_j < 0$, а их сумма

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$$

неотрицательна: $\varkappa \geqslant 0$. При этих условиях четная двоякопериодическая функция

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)}\prod_{j=0}^{3}\left[\sigma(z-t_j)\sigma(z+t_j)\right]^{-\varkappa_j}\prod_{k=1}^{\varkappa}\sigma(z-\theta_k)\sigma(z+\theta_k), \tag{2.7}$$

где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\varkappa$ — произвольные различные между собой точки из прямоугольника S^+, будет канонической функцией однородной задачи (2.6) класса h_0, а функция

$$X(z) = \chi(z)\overline{\chi}(z) = e^{\Gamma(z)+\overline{\Gamma}(z)}\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{3}\left[\sigma(z-t_j)\sigma(z+t_j)\sigma(z-\overline{t}_j)\sigma(z+\overline{t}_j)\right]^{-\varkappa_j}\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{\varkappa}\sigma(z-\theta_k)\sigma(z+\theta_k)\sigma(z-\overline{\theta}_k)\sigma(z+\overline{\theta}_k) \tag{2.8}$$

канонической функцией того же класса однородной задачи (2.4), удовлетворяющей условию симметрии (2.3).

Общее решение задачи (2.4) класса h_0 находится обычным способом. Оно будет иметь такой вид:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_L \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)}[\zeta(\tau-z)+\zeta(\tau+z)]\,d\tau+$$

$$+X(z)\Big(C+\sum_{k=1}^{\varkappa}\{C_k[p(z)-p(\theta_k)]^{-1}+\overline{C}_k[p(z)-p(\overline{\theta}_k)]^{-1}\}\Big), \qquad (2.9),$$

где C — вещественная постоянная. Всего в эту формулу входит $2\varkappa+1$ произвольных вещественных постоянных. При $z\in S^+$ формула (2.9) дает все решения задачи Гильберта (2.1) непрерывные всюду в $\overline{S^+}$, кроме вершин, где они обращаются в бесконечность порядка меньше единицы.

При $\varkappa<0$ задача Гильберта в общем случае неразрешима. Условия разрешимости, при выполнении которых она будет иметь единственное решение, получаются известным образом как условия разрешимости соответствующей задачи Римана, и мы на этом не останавливаемся.

При $a=1$, $b=0$ задача Гильберта вырождается в задачу Шварца. Краевое условие соответствующей задачи Римана имеет вид

$$\Phi^+(t)=-\Phi^-(t)+2c(t).$$

Ее канонической функцией, удовлетворяющей условию симметрии (2.3), будет кусочнопостоянная функция, равная $+i$ в прямоугольнике S^+ и $-i$ в S^-. Из формулы (2.9) при $z\in S^+$ получаем вид оператора Шварца:

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L c(\tau)[\zeta(\tau-z)+\zeta(\tau+z)]\,d\tau+iC.$$

§ 3. Прямоугольник как плоская модель римановой поверхности

Возьмем прямоугольник S^+ и будем считать каждую пару противолежащих точек его границы за одну единственную точку (например, точки A и A', B и B', C и C', D и D' на рис. 3, а). Согнем этот прямоугольник сначала в кусок кругового цилиндра и склеим стороны l_1 и l_1' так, чтобы тождественные точки A и A', B и B' совпали. Затем изогнем этот цилиндр в виде кругового кренделя и края цилиндра склеим так, чтобы совпали точки C и C', D и D'. Получаем поверхность тора; граница прямоугольника переходит при этом в „каноническую систему разрезов“ тора, причем каждый из разрезов соответствует двум противоположным сторонам прямоугольника (рис. 3, б). Обратно: если разрезать тор вдоль канонической системы, то всегда получается фигура, топологически эквивалентная прямоугольнику с указанным соответствием сторон.

Если прямоугольник рассматривать как фундаментальную область двоякопериодической группы, то теории двоякопериодических функций на плоскости будет соответствовать теория однозначных функций на торе, и наоборот. Следовательно, с этой точки зрения рассмотренная нами в § 1 краевая задача Римана для двоякопериодических функций эквивалентна аналогичной задаче для кусочноголоморфных однозначных функций на торе, если линии скачков их не совпадают с каноническими разрезами.

Из прямоугольника S^+ можно получить и другие поверхности, если по иному закону отождествлять граничные точки. На рис. 4 приведены еще четыре схемы отождествления точек границы.

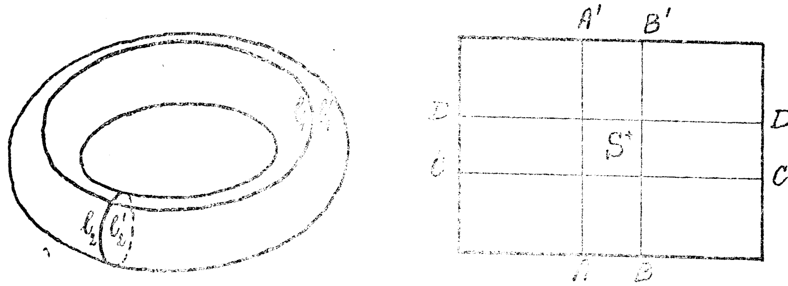

Рис.3.

Рис. 4, а изображает модель плоского кругового кольца. Как и тор, кольцо — двусторонняя поверхность, но, в отличие от замкнутой поверхности тора, с двумя граничными линиями l_1 и l_1'.

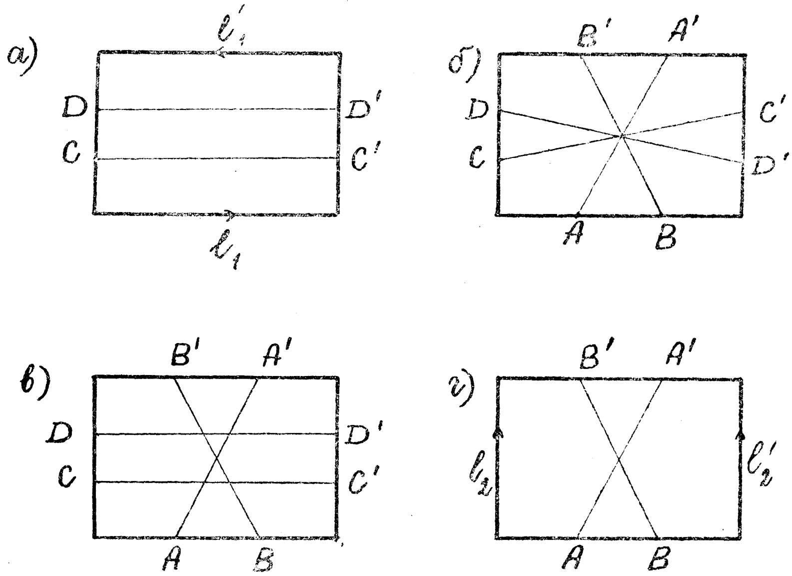

Рис. 4.

Схема отождествления каждой пары диаметрально противоположных точек границы прямоугольника, изображенная на рис. 4, б, соответствует проективной плоскости. Это — замкнутая односторонняя поверхность. Эту поверхность можно получить еще из шара, рассматривая пары диаметрально противоположных точек как тождественные.

Односторонними будут и две следующие поверхности — бутылка Клейна и лист Мебиуса, соответствующие схемам 4, в и 4, г. Первая из них — замкнута, вторая — имеет единственную граничную кривую.

Ниже для каждой из указанных моделей поверхности мы рассмотрим „задачи склеивания“, состоящие в отыскании аналитических внутри прямоугольника функций по заданному соотношению, связывающему граничные значения искомой функции в паре отождествляемых точек. На несклеиваемых участках границы, соответствующих граничным кривым поверхности, для простоты будем все время задавать граничное условие Гильберта.

§ 4. Задача Карлемана

Одна из простейших задач склеивания состоит в отыскании функции $F(z)$, голоморфной в односвязной области S^+, по граничному условию

$$F^+(t) = G(t)F^+[\alpha(t)] + g(t), \tag{4.1}$$

если функция $\alpha(t)$ отображает границу области S^+ взаимно однозначно саму в себя с изменением направления обхода, причем

$$\alpha[\alpha(t)] = t. \tag{4.2}$$

Эта задача была впервые сформулирована Карлеманом [13] в 1932 году и решена полностью в 1946 году Д. А. Квеселава [14] при следующих предположениях: границей области S^+ является кривая Ляпунова; функция $\alpha(t)$ непрерывна и имеет производную $\alpha'(t)$, удовлетворяющую условию Гельдера; функции $G(t)$ и $g(t)$ тоже гельдеровы, $G(t) \neq 0$ всюду на границе области S^+ и, кроме того,

$$G(t)\,G[\alpha(t)] = 1, \quad g(t) + G(t)g[\alpha(t)] = 0. \tag{4.3}$$

Здесь мы дадим решение задачи Карлемана для прямоугольника S^+, понимая под $\alpha(t)$ следующую функцию (рис. 3, а):

$$\alpha(t) = \begin{cases} t + i\omega_2, & t \in l_1, \\ t - i\omega_2, & t \in l_1', \\ t + \omega_1, & t \in l_2, \\ t - \omega_1, & t \in l_2'. \end{cases} \tag{4.4}$$

Условию (4.2) наша функция $\alpha(t)$, очевидно, удовлетворяет, но вершины прямоугольника являются для нее точками разрыва первого рода. Будем эти точки считать точками разрыва и для функций $G(t)$ и $g(t)$.

В данном случае задача (4.1) может быть решена чрезвычайно просто. Введем вспомогательную кусочноголоморфную двоякопериодическую функцию $\Phi(z)$ с основными периодами ω_1 и $i\omega_2$, совпадающую внутри прямоугольника S^+ с искомой функцией $F(z)$:

$$\begin{aligned} &\Phi(z) = F(z), \quad z \in S^+; \\ &\Phi(z) = \Phi(z + \omega_1) = \Phi(z + i\omega_2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Так как функция $\alpha(t)$ на каждой из сторон прямоугольника совпадает с одной из основных подстановок двоякопериодической группы или им обратных, то из условий периодичности имеем:

$$\Phi(z) = \Phi[\alpha(z)], \tag{4.6}$$

откуда вдоль всей границы прямоугольника L

$$\Phi^-(t) = \Phi^+[\alpha(t)]. \tag{4.7}$$

Учитывая, что в силу первого из равенств (4.5) вдоль L $\Phi^+(t) = F^+(t)$, из условия (4.1) будем иметь:

$$\Phi^+(t) = G\cdot(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{4.8}$$

Получили задачу Римана для двоякопериодических функций с основными периодами ω_1 и $i\omega_2$, но в отличие от случая, рассмотренного в § 1, здесь линия L содержит конгруэнтные участки: l_1' получается из l_1 при помощи преобразования двоякопериодической группы $z+i\omega_2$ а l_2' из l_2 преобразованием $z+\omega_1$.

Подобный особый случай задачи Римана для автоморфных функций был рассмотрен нами в работе [15]. Согласно изложенным там результатам, при решении задачи мы должны граничное условие (4.8) рассматривать лишь на линии $L_1 = l_1 + l_2$, отбросив вторую конгруэнтную половину.

Оценим интеграл

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \ln G(\tau)\,\zeta(\tau - z)\,d\tau \tag{4.9}$$

в окрестности точки $z=0$. Эта точка является точкой разрыва для $G(t)$. Поэтому вблизи нее

$$\Gamma(z) = (\alpha_0 + i\beta_0)\ln\sigma(z) + \Gamma^*(z),$$

где

$$\alpha_0 + i\beta_0 = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(-0) - \ln G(+0)]. \tag{4.10}$$

В точках ω_1, $i\omega_2$, $\omega_1 + i\omega_2$ в силу их конгруэнтности точке $z=0$ $\Gamma(z)$ ведет себя так же.

Пусть $\beta_0 \neq 0$ и $\varkappa$ — целое число, подобранное так, что $0 < \alpha_0 - \varkappa < 1$ или $-1 < \alpha_0 - \varkappa < 0$ в зависимости от того, какое решение нас интересует: ограниченное при $z=0$ или обращающееся в бесконечность интегрируемого порядка. Тогда при $\varkappa > 0$ канонической функцией будет

$$X(z) = e^{\Gamma(z)}[\sigma(z)]^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{\varkappa}\sigma(z-\theta_k), \tag{4.11}$$

если точки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\varkappa$ подобраны так, что

$$\sum_{k=1}^{\varkappa}\theta_k = \alpha, \quad \alpha = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\ln G(\tau)\,d\tau, \tag{4.12}$$

а общее решение запишется в виде

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau - z)\,d\tau + X(z)\left[C + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_k\zeta(z-\theta_k)\right], \tag{4.13}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} C_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau. \tag{4.14}$$

Таким образом, при $\varkappa > 0$ задача имеет $\varkappa$ линейно-независимых решений.

При $\varkappa = 0$ разрешимость и число решений задачи зависят от значения постоянной α. Когда $\alpha = 0$, имеем семейство решений, зависящее от одного параметра C; эти решения определяются той же формулой (4.13), если положить в ней все $C_k = 0$; равенство (4.14) превращается в условие разрешимости. Когда $\alpha \neq 0$, решение единственно; оно определяется формулой (1.30). Если α — период, то единственное решение (1.31) существует лишь при выполнении условия (1.29).

Решение исходной задачи Карлемана (3.1) определяется формулами (4.19) — (4.14), если в них $z \in S^+$.

Единственное решение задачи при $\varkappa < 0$ и условия его существования на основании всего сказанного находятся без труда.

Для случая, когда S^+ является фундаментальной областью некоторой фуксовой группы, задача Карлемана иным методом решена В. И. Показеевым [16].

§ 5. Задача Гильберта для кольца

Пусть на границе $L^* = l_1^* + l_2^*$ кругового кольца $q < |w| < 1$ заданы вещественные функции $a_1(\zeta)$, $b_1(\zeta)$, $c_1(\zeta)$, удовлетворяющие условию Гельдера, причем, как всегда, $a_1^2(\zeta) + b_1^2(\zeta) \neq 0$ на L^*. Отыскивается аналитическая внутри кольца однозначная функция $F_1(w) = u_1(\xi, \eta) + iv_1(\xi, \eta)$ по граничному условию

$$a_1(\zeta)\, u_1(\zeta) + b_1(\zeta)\, v_1(\zeta) = c_1(\zeta), \quad \zeta \in L^*. \tag{5.1}$$

Разрезав кольцо вдоль отрезка $[q, 1]$ вещественной оси, полученный криволинейный четырехугольник отображаем конформно при помощи функции $z = \frac{\omega_1}{2\pi i} \ln w$ на прямоугольник S^+ плоскости z с вер-

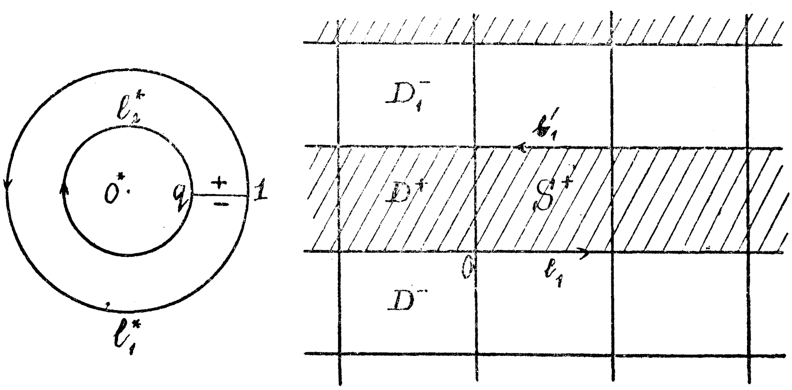

Рис. 5.

шинами 0, ω_1, $\omega_1 + i\omega_2$, $i\omega_2$, где ω_1 — некоторое вещественное число, а $\omega_2 = -\frac{\omega_1 \ln q}{2\pi}$. При этом отображении окружности l_2^* и l_1^* перейдут, соответственно, в верхнее и нижнее основания l_1' и l_1 (рис. 5). Искомая аналитическая функция $F_1(w)$ перейдет в аналитическую функцию $F(z)$:

$$F_1(w) = F_1\left(e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}}\right) = F(z).$$

На отрезках l_1 и l_1' вещественная и мнимая части функции $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в силу (5.1) удовлетворяют граничному условию того же вида

$$a(t)\, u(t) + b(t)\, v(t) = c(t), \quad t \in L = l_1 + l_1'. \tag{5.2}$$

Точке ζ, расположенной на разрезе $[q, 1]$, соответствуют при конформном отображении точки t и $t + \omega_1$, лежащие на боковых гранях l_2 и l_2'. Так как $F_1(w)$ в точках разреза $[q, 1]$ является аналитической, то $F_1^+(\zeta) = F_1^-(\zeta)$, откуда для функции $F(z)$ получаем:

$$F^+(t) = F^+(t + \omega_1), \quad t \in l_2, \tag{5.3}$$

если считать, как обычно, границу прямоугольника ориентированной так, что при обходе по ней точки прямоугольника S^+ остаются слева. Или же

$$F^+(t) = F^+(t - \omega_1), \quad t \in l_2'. \tag{5.4}$$

Но равенство (5.3) или (5.4) есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $F(z)$ имела период ω_1:

$$F(z + \omega_1) = F(z). \tag{5.5}$$

Таким образом, функцию $F(z)$ можно рассматривать во всей горизонтальной полосе D^+ ширины ω_2 и для ее определения имеем периодическую задачу Гильберта для полосы D^+ с граничным условием (5.2) на $L = l_1 + l_1'$. На остальной части границы полосы краевое условие для $F(z)$ получается из условия (5.2) на основании свойства периодичности.

Чтобы решить полученную задачу, вводим вспомогательную кусочноголоморфную функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} F(z), & z \in D^+, \\ \overline{F}(z), & z \in D^-, \end{cases} \tag{5.6}$$

где через D^- обозначена полоса, симметричная полосе D^+ относительно вещественной оси. Затем функцию $\Phi(z)$ распространяем периодически с периодом $2i\omega_2$ на всю плоскость. Полученная таким путем кусочноголоморфная функция $\Phi(z)$ будет двоякопериодической с основными периодами ω_1 и $2i\omega_2$ и удовлетворять условию симметрии $\overline{\Phi}(z) = \Phi(z)$, используя которое из краевого условия (5.2) получим краевое условие задачи Римана вида (2.4). Линия $L = l_1 + l_1'$ в данном случае представляет сумму двух разомкнутых контуров, у каждого из них начало и конец являются конгруэнтными точками. Нам надо найти решения, ограниченные на концах.

Рассмотрим интеграл

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln\left[-\frac{a(\tau) + ib(\tau)}{a(\tau) - ib(\tau)}\right] \zeta(\tau - z)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L [2i\theta(\tau) + \pi i]\, \zeta(\tau - z)\, d\tau, \quad \theta(\tau) = \arg[a(\tau) + ib(\tau)]. \tag{5.7}$$

Так как точка $z = 0$ является началом l_1 и концом конгруэнтного ему интервала, то в ее окрестности имеем:

$$\Gamma(z) = \frac{2\theta(-0) - 2\theta(+0)}{2\pi} \ln\sigma(z) + \Gamma^*(z) = 2\varkappa_1 \ln\sigma(z) + \Gamma^*(z). \tag{5.8}$$

Число

$$\varkappa_1 = \frac{\theta(-0) - \theta(+0)}{2\pi} = \operatorname{Ind}\,(a_1 + ib_1)_{l_1^*},$$

очевидно, целое. В силу конгруэнтности точек $z = 0$ и $z = \omega_1$ $\Gamma(z)$ ведет себя в них одинаково. Аналогично, на концах $i\omega_2$, $\omega_1 + i\omega_2$ поведение $\Gamma(z)$ определяется формулой

$$\Gamma(z) = 2\varkappa_2 \ln(z - i\omega_2) + \Gamma^{**}(z), \tag{5.9}$$

где целое число $\varkappa_2 = \operatorname{Ind}\,(a_1 + ib_1)_{l_2^*}$.

Из свойств интеграла $\Gamma(z)$ и формул (5.8), (5.9) следует, что произведение

$$P(z) = e^{\Gamma(z)} [\sigma(z)]^{-2\varkappa_1} [\sigma(z - i\omega_2)\, \sigma(z + i\omega_2)]^{-\varkappa_2}$$

имеет конечные на L граничные значения, удовлетворяющие граничному условию (2.4) при $c(t)\equiv 0$. При изменении z на один из периодов получаем:

$$P(z+\Omega)=P(z)\,e^{-\eta\alpha-2\varkappa\eta\left(z+\frac{\Omega}{2}\right)},$$

если $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$, а α — вещественная постоянная:

$$\alpha=\frac{1}{2\pi}\int\limits_L[2\theta(\tau)+\pi]\,d\tau.$$

Следовательно, чтобы построить каноническую функцию, можно умножить

$$P(z)\ \text{на}\ [\sigma(z-z_1)\,\sigma(z-\bar z_1)]^{+\varkappa_1}\,[\sigma(z-z_2)\,\sigma(z-\bar z_2)]^{+\varkappa_2}$$

и подобрать не лежащие на L точки z_1, z_2 так, чтобы полученная функция

$$\begin{aligned}X(z)=e^{\Gamma(z)}\,[\sigma(z)]^{-2\varkappa_1}\,[\sigma(z-i\omega_2)\,\sigma(z+i\omega_2)]^{-\varkappa_2}\times\\ \times[\sigma(z-z_1)\,\sigma(z-\bar z_1)]^{\varkappa_1}\,[\sigma(z-z_2)\,\sigma(z-\bar z_2)]^{\varkappa_2}\end{aligned}\qquad(5.10)$$

была двоякопериодической. Это будет, когда

$$\varkappa_1(z+\bar z_1)+\varkappa_2(z_2+\bar z_2)+\alpha=0.\qquad(5.11)$$

Если хотя бы одно из чисел $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ отлично от нуля, абсциссы точек z_1, z_2 из уравнения (5.11) определятся, ординаты могут быть какими угодно, и их можно, например, взять такими, чтобы точки z_1, z_2 лежали в полосе D^+. Функция $X(z)$, очевидно, удовлетворяет условию симметрии $\overline{X}(z)=X(z)$; в параллелограмме периодов S^++S^- она имеет порядок $-2\varkappa$.

Пусть $\varkappa\geqslant 0$, причем $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ неравны нулю одновременно. Переписывая граничное условие (2.4) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{2c(t)}{X^+(t)\,(a-ib)},$$

видим, что при $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2>0$ двоякопериодическая функция $\Phi(z)/X(z)$ имеет полюсы порядка $\varkappa_2$ в точках z_2, $\bar z_2$ и полюсы порядка $\varkappa_1$ в точках z_1, $\bar z_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_L\frac{c(\tau)}{X^+(\tau)\,(a+ib)}\,\zeta(\tau-z)\,d\tau+\\ +X(z)\Big\{C+\sum_{j=0}^{\varkappa_1-1}[A_j\zeta^{(j)}(z-z_1)+\bar A_j\zeta^{(j)}(z-\bar z_1)]+\\ +\sum_{k=0}^{\varkappa_2-1}[B_k\zeta^{(k)}(z-z_2)+\bar B_k\zeta^{(k)}(z-\bar z_2)]\Big\},\end{aligned}\qquad(5.12)$$

где C — вещественная постоянная и

$$A_0+\bar A_0+B_0+\bar B_0=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{c(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)\,(a-ib)}.\qquad(5.13)$$

Учитывая это равенство, видим, что в формуле (5.12) содержится $2\varkappa$ произвольных вещественных постоянных.

Если одно из чисел $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ отрицательно, например, $\varkappa_2<0$, но попрежнему $\varkappa_1+\varkappa_2>0$, то функция $\Phi(z)/X(z)$ должна иметь в точках z_1, $\bar z_1$ полюсы порядка $\varkappa_1$, а в точках z_2, $\bar z_2$ — нули порядка $\varkappa_2$. Общее решение задачи будет определяться теми же формулами (5.12), (5.13), только в них все B_k надо положить равными нулю и приравнять нулю первые $-\varkappa_2$ коэффициентов в разложении функции $\Phi(z)/X(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_2. Это дает $-\varkappa_2$ уравнений, связывающих постоянные C, A_j $(j=1, 2, \ldots, \varkappa_1-1)$. Произвольных вещественных постоянных останется опять $2\varkappa$.

Если $\varkappa < 0$, то для разрешимости задачи потребуется выполнение некоторых дополнительных условий. При $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 < 0$, например, эти дополнительные условия получаются так: надо разложить функцию

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)}\zeta(\tau-z)\,d\tau + C$$

в ряды Тейлора по степеням $z-z_1$ и $z-z_2$ и приравнять нулю первые $-\varkappa_1$ и $-\varkappa_2$ коэффициентов в этих разложениях. Одному из этих условий можно удовлетворить подбором C; остальные $-2\varkappa-1$ вещественных условий будут условиями разрешимости задачи.

Пусть, наконец, $\varkappa=0$. Это может быть в двух случаях: 1) $\varkappa_1=-\varkappa_2\neq 0$; 2) $\varkappa_1=\varkappa_2=0$.

В случае (1) опять обращаемся к формулам (5.12), (5.13), учитывая, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ имеют противоположные знаки. Анализ этих формул показывает, что неоднородная задача имеет единственное решение.

В случае (2) за каноническую функцию можно взять

$$X(z)=e^{\Gamma(z)},\quad X(z+\Omega)=X(z)\,e^{-\eta\alpha}.$$

Если $\alpha=0$, то $X(z)$ является периодической и неоднородная задача будет иметь целое семейство решений

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L \frac{c(\tau)\zeta(\tau-z)}{X^+(\tau)(a-ib)}\,d\tau + CX(z), \tag{5.14}$$

если при этом

$$\int_L \frac{c(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(a-ib)}=0. \tag{5.15}$$

Если же $\alpha\neq 0$, то единственным решением неоднородной задачи будет

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)}\cdot\frac{\sigma(\tau-z+\alpha)}{\sigma(\alpha)\,\sigma(\tau-z)}\,d\tau. \tag{5.16}$$

Считая в формулах (5.10), (5.12), (5.14), (5.16) точку z принадлежащей полосе D^+, получим решение периодической задачи Гильберта для этой полосы. Если, кроме того, в этих формулах возвратиться к переменному $w=e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}}$, то они определят решение задачи Гильберта для кольца. Проведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующий известный результат:

Если вдоль границы кругового кольца $\operatorname{Ind}(a_1+ib_1)=2\varkappa>0$, *то неоднородная задача Гильберта* (5.1) *разрешима при любой функции* $c_1(\zeta)$ *и имеет* $2\varkappa$ *линейно-независимых решений. При* $\varkappa<0$ *неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняется* $-2\varkappa-1$ *дополнительных условий.*

В случае $\varkappa=0$ *могут представиться две возможности:* 1) $\alpha=0$, *то есть*

$$\int_0^{2\pi}\theta_1(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\theta_2(x)\,dx, \tag{5.17}$$

где через $\theta_1(x)$ *и* $\theta_2(x)$ *обозначены значения* $\arg(a_1+ib_1)$ *на* l_1^* и l_2^* *соответственно. Неоднородная задача разрешима при выполнении одного условия вида* (5.15) *и имеет целое семейство решений, зависящее от одного вещественного параметра.* 2) $\alpha \neq 0$, *то есть условие* (5.17) *не выполнено. Неоднородная задача безусловно разрешима и имеет единственное решение.*

Частным случаем периодической задачи Гильберта (5.2) является периодическая задача Дирихле. Пусть в полосе D^+ требуется определить гармоническую периодическую функцию $u(x, y)$, $u(x+\omega_1, y) = u(x, y)$, непрерывную вплоть до границы, по ее значениям $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ на l_1 и l_2'. Обозначая через $F(z)=u+iv$ аналитическую в D^+ функцию, имеющую период ω_1, видим, что она должна быть решением задачи Гильберта (5.2), когда $a(t)=1$, $b(t)=0$, $c(t)=\varphi_1(t)$ на l_1 и $c(t)=\varphi_2(t)$ на l_1'. Краевое условие соответствующей задачи Римана в данном случае имеет вид

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=2c(t), \quad t \in L.$$

Очевидно, $X(z)=i$ в D^+ и $X(z)=-i$ в D^-; $\varkappa_1=\varkappa_2=0$, $\alpha=0$ и решение задачи определится формулами (5.14), (5.15). Итак, если

$$\int_L c(\tau)\,d\tau=0,$$

то периодический оператор Шварца для полосы D^+ имеет такой вид:

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L c(\tau)\,\zeta(\tau-z)\,d\tau+iC,$$

где C — вещественная постоянная, или

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\omega_1}\varphi_1(\tau)\,\zeta(\tau-z)\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_0^{\omega_1}\varphi_2(\tau)\,\zeta(\tau-z+i\omega_2)\,d\tau+iC.$$

Это — известная формула Вилля, определяющая функцию, регулярную внутри прямоугольника, по заданным значениям вещественной части на его горизонтальных сторонах.

Если в последней формуле положить $z=\frac{\omega_1}{2\pi i}\ln w$, $\tau=\frac{\omega_1}{2\pi i}\ln t$ и обозначить через $\zeta_3(u)=\zeta(u+i\omega_2)$, то получим формулу Вилля, представляющую оператор Шварца для кругового кольца. При $\omega_1=2\pi$ она имеет следующий вид:

$$F(w)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\varphi_1(\theta)\,\zeta(\theta+i\ln w)\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\varphi_2(\theta)\,\zeta_3(\theta+i\ln w)\,d\theta+iC.$$

§ 6. Решение одной задачи склеивания для кольца

Пусть, как и в предыдущем параграфе, на границе кольца $L^*=l_1^*+l_2^*$ искомая аналитическая функция $F_1(w)$ удовлетворяет граничному условию (5.1), а на берегах разреза $[q, 1]$ ее значения связаны линейным соотношением

$$F_1^-(\zeta)=G^*(\zeta)\,F_1^+(\zeta)+g^*(\zeta), \tag{6.1}$$

где $G^*(\zeta)$, $g^*(\zeta)$ — гельдеровы функции, причем $G^*(\zeta)$ нигде не обращается в нуль. Осуществив конформное отображение $z = \frac{\omega_1}{2\pi i} \ln w$ для функции $F(z) = F_1(e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}})$ на боковых сторонах прямоугольника S^+, будем иметь:

$$F^+(t) = G_1(t) F^+(t + \omega_1) + g_1(t), \quad t \in l_2,$$
$$F^+(t) = \frac{1}{G_1(t - \omega_1)} F^+(t - \omega_1) - \frac{g_1(t - \omega_1)}{G_1(t - \omega_1)}, \quad t \in l_2'. \tag{6.2}$$

Если ввести обозначения

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t), & t \in l_2; \\ 1/G_1(t - \omega_1), & t \in l_2'; \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} g_1(t), & t \in l_2; \\ -g_1(t - \omega_1)/G_1(t - \omega_1), & t \in l_2'; \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} t + \omega_1, & t \in l_2, \\ t - \omega_1, & t \in l_2', \end{cases} \tag{6.4}$$

то краевые условия (6.2) можно записать в виде одного:

$$F^+(t) = G(t) F^+[\alpha(t)] + g(t), \quad t \in L_1 = l_2 + l_2'. \tag{6.5}$$

Функция $\alpha(t)$, очевидно, устанавливает взаимно-однозначное отображение линии L_1 на себя с изменением направления обхода, причем

$$\alpha[\alpha(t)] = t. \tag{6.6}$$

Следовательно, условие (6.5) есть краевое условие задачи Карлемана [13], [14], для которой необходимые условия разрешимости

$$G(t) G[\alpha(t)] = 1, \quad g(t) + G(t) g[\alpha(t)] = 0 \tag{6.7}$$

выполнены. Это следует непосредственно из формул (6.3).

Итак, имеем следующую задачу:

Найти внутри прямоугольника S^+ аналитическую функцию $F(z)$, если на верхнем и нижнем основаниях она удовлетворяет краевому условию Гильберта (5.2), *а на боковых сторонах — краевому условию Карлемана* (6.5).

Чтобы решить эту задачу, вводим кусочноголоморфную функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} F(z), & z \in S^+, \\ \overline{F}(z), & z \in S^-, \end{cases}$$

периодическую с периодами ω_1 и $2i\omega_2$:

$$\Phi(z) = \Phi(z + \omega_1) = \Phi(z + 2i\omega_2).$$

На линии L для нее получается краевое условие

$$\Phi^+(t) = -\frac{a + ib}{a - ib} \Phi^-(t) + \frac{2c(t)}{a - ib}, \tag{6.8}$$

а на линии L_1

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t). \tag{6.9}$$

Получили задачу Римана для двоякопериодической функции с периодами ω_1 и $2i\omega_2$, удовлетворяющей условию симметрии $\Phi(z) = \overline{\Phi}(z)$, причем линия L_1 состоит из конгруэнтных друг другу отрезков l_2 и l_2'.

При построении канонической функции берем

$$e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln[i(a + ib)] \zeta(\tau - z) d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4\pi i} \int_{L_1} \ln G(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau, \tag{6.10}$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&f^{+}(t)=G_0(t)f^{-}(t), \quad G_0(t)=i(a+ib), \quad t\in L,\\
&f^{+}(t)=\sqrt{G(t)}\,f^{-}(t), \quad t\in l_2.
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

В окрестности точки $z=0$ (и $z=\omega_1$)

$$
\Gamma(z)=(\alpha_0+i\beta_0)\ln\sigma(z)+\Gamma^{*}(z),
$$

$$
\alpha_0+i\beta_0=\frac{1}{2\pi i}\left[-\ln G_0(0)+\frac{1}{2}\ln G(0)\right];
$$

в окрестности точки $z=i\omega_2$ (и $z=\omega_1+i\omega_2$)

$$
\Gamma(z)=(\alpha_1+i\beta_1)\ln\sigma(z-i\omega_2)+\Gamma^{**}(z),
$$

$$
\alpha_1+i\beta_1=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G_0(i\omega_2)-\frac{1}{2}\ln G(i\omega_2)\right].
$$

Подбирая целые числа $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ так, чтобы они удовлетворяли одному из неравенств $-1<\alpha_j-\varkappa_j<1$ согласно избранному классу искомых функций, получим каноническую функцию вспомогательной однородной задачи (6.11) при $\varkappa>0$, $\varkappa=\varkappa_0+\varkappa_1$, в таком виде

$$
\chi(z)=e^{\Gamma(z)}[\sigma(z)]^{-\varkappa_0}[\sigma(z-i\omega_2)]^{-\varkappa_1}\prod_{k=1}^{\varkappa}\sigma(z-\theta_k),
\tag{6.12}
$$

если различные между собой точки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\varkappa$ выбрать так, чтобы

$$
\begin{aligned}
&\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\varkappa=i\varkappa_1\omega_2-\alpha,\\
&\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\ln G_0(\tau)\,d\tau+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{l_2}\ln G(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Произведение

$$
\begin{aligned}
X(z)=\chi(z)\overline{\chi}(z)=e^{\Gamma(z)+\overline{\Gamma}(z)}\times\\
\times[\sigma(z)]^{-2\varkappa_0}[\sigma(z-i\omega_2)\sigma(z+i\omega_2)]^{-\varkappa_1}\prod_{k=1}^{\varkappa}\sigma(z-\theta_k)\sigma(z-\overline{\theta}_k)
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

будет, очевидно, канонической функцией исходной задачи, удовлетворяющей условию $X(z)=\overline{X}(z)$, и общее решение неоднородной задачи

$$
\begin{aligned}
\Phi(z)=X(z)[\varphi(z)+\overline{\varphi}(z)]+\\
+X(z)\left\{C+\sum_{k=1}^{\varkappa}[C_k\zeta(z-\theta_k)+\overline{C}_k\zeta(z-\overline{\theta}_k)]\right\},
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

где

$$
\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{c(\tau)}{X^{+}(\tau)(a-ib)}\zeta(\tau-z)\,d\tau+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{l_2}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\zeta(\tau-z)\,d\tau,
$$

$$
\sum_{k=1}^{\varkappa}Re\,C_k=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{c(\tau)\,d\tau}{X^{+}(\tau)(a-ib)}+Re\left[\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{l_2}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\,d\tau\right],
$$

а C — вещественная постоянная, будет содержать при $\varkappa>0$ $2\varkappa$ произвольных вещественных постоянных.

На основании всего ранее изложенного случаи $\varkappa\leqslant 0$ исследуются без труда.

Два частных случая с краевыми условиями

1) $u_1 = f_1$ на l_1^*, $u_1 = f_2$ на l_2^*,

$$F_1^+(\zeta) - F_1^-(\zeta) = g_1(\zeta) \text{ на } [q, 1];$$

2) $u_1 = f_1$ на l_1^*, $v_1 = \varphi_2$ на l_2^*,

$$F_1^+(\zeta) - F_1^-(\zeta) = g_1(\zeta) \text{ на } [q, 1]$$

были рассмотрены Герстом [17].

§ 7. Граничная задача, аналогичная задаче Карлемана

I. Пусть (схема, рис. 4, б)

$$\alpha(t) = \begin{cases} -\bar{t} + \omega_1 + i\omega_2, & t \in l_1, \\ -\bar{t} + \omega_1 - i\omega_2, & t \in l_1', \\ \bar{t} + \omega_1 + i\omega_2, & t \in l_2, \\ \bar{t} - \omega_1 + i\omega_2, & t \in l_2'. \end{cases} \tag{7.1}$$

Функция $\alpha(t)$, очевидно, переводит $L = l_1 + l_1' + l_2 + l_2'$ в себя с сохранением направления обхода, причем

$$\alpha[\alpha(t)] = t. \tag{7.2}$$

Рассмотрим такую задачу:

Найти голоморфную внутри прямоугольника S^+ функцию $F(z)$ по граничному условию

$$F^+(t) = G(t)\overline{F^+[\alpha(t)]} + g(t), \quad t \in L. \tag{7.3}$$

Как и раньше, будем считать, что функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера всюду, кроме вершин прямоугольника, где допускаются разрывы первого рода. При этом $G(t) \neq 0$ на L.

Используя условие (7.2) из (7.3), получаем:

$$F^+[\alpha(t)] = G[\alpha(t)]\overline{F^+(t)} + g[\alpha(t)].$$

Вставляем это выражение в (7.3):

$$F^+(t) = G(t)\overline{G[\alpha(t)]}F^+(t) + g(t) + G(t)\overline{g[\alpha(t)]}.$$

Значит, одним из случаев разрешимости задачи (7.3) является тот, когда

$$G(t)\overline{G[\alpha(t)]} = 1, \quad g(t) + G(t)\overline{g[\alpha(t)]} = 0. \tag{7.4}$$

Только на этом случае мы и остановимся.

Вводим вспомогательную кусочноголоморфную функцию:

$$\Phi(z) = \begin{cases} F(z), \; z \in S^+, \\ \overline{F(-\bar{z} + \omega_1 - i\omega_2)}, & z \in S^-, \end{cases} \tag{7.5}$$

четную, с периодами $2\omega_1$, $2i\omega_2$:

$$\Phi(z) = \Phi(-z) = \Phi(z + 2\omega_1) = \Phi(z + 2i\omega_2).$$

В силу условий периодичности $\Phi(z + \omega_1) = \Phi(z - \omega_1)$, $\Phi(z + i\omega_2) = \Phi(z - i\omega_2)$. Учитывая эти соотношения, из способа определения функции $\Phi(z)$ сразу получаем условие симметрии

$$\Phi(z) = \overline{\Phi[\alpha(z)]}, \tag{7.6}$$

на основании которого всюду на L будем иметь:

$$\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+[\alpha(t)]} = \overline{F^+[\alpha(t)]}. \tag{7.7}$$

Подставляя в краевое условие (7.3) $\overline{F^+[\alpha(t)]} = \Phi^-(t)$, $F^+(t) = \Phi^+(t)$, получим

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{7.8}$$

Пришли, таким образом, к задаче Римана для четных двоякопериодических функций, причем надо найти лишь те решения, которые удовлетворяют условию симметрии (7.6).

Отметим сразу следующее обстоятельство: если $\Phi_1(z)$ — какое-либо решение задачи (7.8), то $f(z) = \overline{\Phi_1[\alpha(z)]}$ тоже будет решением этой задачи. В самом деле, на L

$$f^+(t) = \overline{\Phi^-[\alpha(t)]}, \quad f^-(t) = \overline{\Phi^+[\alpha(t)]}.$$

Заменяя в краевом условии (7.8) t на $\alpha(t)$ и переходя к комплексно сопряженным значениям, будем иметь:

$$\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} = \overline{G[\alpha(t)]}\;\overline{\Phi^-[\alpha(t)]} + \overline{g[\alpha(t)]},$$

или

$$f^-(t) = \overline{G[\alpha(t)]}\,f^+(t) + \overline{g[\alpha(t)]},$$

или, в силу условий (7.4),

$$f^+(t) = G(t)\,f^-(t) + g(t),$$

что и доказывает наше утверждение.

Это свойство позволяет из любого решения задачи (7.8) получить решение, удовлетворяющее условию симметрии, в виде

$$\frac{1}{2}\left[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1[\alpha(z)]}\right],$$

где $\alpha(z)$ надо положить равным одному из аналитических выражений этой функции согласно равенствам (7.1), ибо остальные получаются из него подстановками группы Γ_*.

Найдем каноническую функцию вспомогательной задачи

$$f^+(t) = \sqrt{G(t)}\,f^-(t). \tag{7.9}$$

Интеграл

$$\Gamma(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_L \ln G(\tau)\,[\zeta(\tau - z) + \zeta(\tau + z)]\,d\tau, \tag{7.10}$$

где дзэта-функция построена для периодов $2\omega_1$, $2i\omega_2$, в окрестности любой из вершин t_j может быть представлена так:

$$\Gamma(z) = (\alpha_j + i\beta_j)\ln[\sigma(z - t_j)\,\sigma(z + t_j)] + \Gamma^*(z),$$

если

$$\alpha_j + i\beta_j = \frac{1}{4\pi i}[\ln G(t_j - 0) - \ln G(t_j + 0)]. \tag{7.11}$$

Следовательно, функция $\chi(z)$ вида (2.7), где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\varkappa$ — произвольные точки из прямоугольника S^+, $\Gamma(z)$ определяется формулой (7.10), — а числа $\varkappa_j$ подобраны соответствующим образом по числам α_j из формулы (7.11) — будет канонической функцией задачи (7.9) при $\varkappa \geqslant 0$. Каноническую функцию задачи (7.8), удовлетворяющую условию симметрии (7.6), можно взять в таком виде:

$$X(z) = \chi(z)\,\overline{\chi(-\bar{z} + \omega_1 + i\omega_2)}. \tag{7.12}$$

В фундаментальной области группы Γ_* $X(z)$ имеет $2\varkappa$ простых нулей: в точках $\theta_k \in S^+$ и в точках $-\bar{\theta}_k + \omega_1 - i\omega_2 \in S^-$.

Общее решение задачи при $\varkappa \geqslant 0$ складывается из общего решения соответствующей однородной задачи

$$\Phi_0(z) = X(z)\left\{C + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_k [p(z) - p(\theta_k)]^{-1} + \right. \tag{7.13}$$
$$\left. + \overline{C}_k [p(-z + \omega_1 - i\omega_2) - p(\theta_k)]^{-1}\right\},$$

где C — произвольная вещественная постоянная, и частного решения задачи неоднородной

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2}[\Phi(z) + \overline{\Phi(-\overline{z} + \omega_1 + i\omega_2)}],$$
$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}[\zeta(\tau - z) + \zeta(\tau + z)]\,d\tau. \tag{7.14}$$

Всего в общее решение входит $2\varkappa + 1$ произвольных вещественных постоянных.

При $\varkappa < 0$ для разрешимости задачи требуется выполнение $-2\varkappa-1$ дополнительных вещественных условий.

Задача Гильберта (§ 2) есть частный случай рассмотренной задачи, когда $\alpha(t) \equiv t$.

II. Пусть отождествление граничных точек прямоугольника S^+ осуществляется по схеме рис. 4, г. Обозначая через

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} -\overline{t} + \omega_1 + i\omega_2, & t \in l_1, \\ -\overline{t} + \omega_1 - i\omega_2, & t \in l_1', \end{cases} \tag{7.15}$$

рассмотрим такую задачу:

Найти аналитическую внутри прямоугольника S^+ функцию $F(z) = u + iv$ по граничным условиям

$$F^+(t) = G_1(t)\,\overline{F^+[\alpha_1(t)]} + g_1(t), \quad t \in L_1 = l_1 + l_1' \tag{7.16}$$
$$au + bv = c(t), \quad t \in L_2 = l_2 + l_2', \tag{7.17}$$

где гёльдеровы функции $G_1(t)$ и $g_1(t)$ удовлетворяют на L_1 соотношениям

$$G_1(t)\,\overline{G_1[\alpha_1(t)]} = 1, \quad g_1(t) + \overline{g_1[\alpha_1(t)]}\,G_1(t) = 0,$$

а вещественные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, кроме всех обычных требований (§ 2), принимают одинаковые значения в диаметрально противоположных вершинах прямоугольника. Это требование означает просто непрерывность этих функций вдоль единственной граничной кривой листа Мебиуса.

Эта задача есть частный случай только что рассмотренной задачи (7.3). В самом деле, перепишем граничное условие (7.17) в виде

$$F^+(t) = -\frac{a + ib}{a - ib}\overline{F^+(t)} + \frac{2c(t)}{a - ib}, \quad t \in L_2,$$

и введем обозначения

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t), & t \in L_1, \\ -\dfrac{a + ib}{a - ib}, & t \in L_2, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} g_1(t), & t \in L_1, \\ \dfrac{2c(t)}{a - ib}, & t \in L_2, \end{cases}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & t \in L_1, \\ t, & t \in L_2. \end{cases}$$

Теперь краевые условия (7.16), (7.17) можно записать в виде одного

$$F^{+}(t)=G(t)\,\overline{F^{+}[\alpha(t)]}+g(t),\quad t\in L=L_1+L_2.$$

Функция $\alpha(t)$, очевидно, совпадает со своей обратной и переводит границу L прямоугольника S^{+} в себя с сохранением направления обхода; коэффициенты $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют соотношениям (7.4). Следовательно, получили задачу (7.3).

§ 8. Смешанная задача склеивания

Пусть, наконец, отождествление граничных точек прямоугольника осуществляется по схеме рис. 4, в, так что

$$\begin{aligned}\alpha_1(t)&=\begin{cases}-\bar{t}+\omega_1+i\omega_2, & t\in l_1,\\ -\bar{t}+\omega_1-i\omega_2, & t\in l_1',\end{cases}\\ \alpha_2(t)&=\begin{cases}t+\omega_1, & t\in l_2,\\ t-\omega_1, & t\in l_2'.\end{cases}\end{aligned}\tag{8.1}$$

Функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ условию (7.2) по-прежнему удовлетворяют, но $\alpha_1(t)$ на отрезках $l_1+l_1'=L_1$ положительный обход сохраняет, и $\alpha_2(t)$ на $l_2+l_2'=L_2$ — изменяет. Рассмотрим задачу:

Найти в прямоугольнике S^{+} голоморфную функцию $F(z)$ по граничным условиям

$$F^{+}(t)=G_1(t)\,\overline{F^{+}[\alpha_1(t)]}+g_1(t),\quad t\in L_1,\tag{8.2}$$

$$F^{+}(t)=G_2(t)\,F^{+}[\alpha_2(t)]+g_2(t),\quad t\in L_2,\tag{8.3}$$

где $G_1(t)$, $g_1(t)$, $G_2(t)$, $g_2(t)$ — заданные функции, соответственно, на L_1 и L_2, удовлетворяющие условию Гельдера, $G_1(t)\neq 0$ на L_1, $G_2(t)\neq 0$ на L_2 и, кроме того, $G_1(t)$ и $g_1(t)$ удовлетворяют на L_1 соотношениям (7.4), *а $G_2(t)$ и $g_2(t)$ на L_2 — соотношениям* (4.3).

Вспомогательную кусочноголоморфную функцию вводим следующим образом:

$$\Phi(z)=\begin{cases}F(z), & z\in S^{+},\\ \overline{F(-\bar{z}+\omega_1-i\omega_2)}, & z\in S^{-},\end{cases}$$

$$\Phi(z)=\Phi(z+\omega_1)=\Phi(z+2i\omega_2).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(z)=\overline{\Phi[\alpha_1(z)]},\quad \Phi(z)=\Phi[\alpha_2(z)].\tag{8.4}$$

Значит,

$$\begin{aligned}\Phi^{+}(t)&=F^{+}(t),\quad t\in L_1+L_2,\\ \Phi^{-}(t)&=\overline{\Phi^{+}[\alpha_1(t)]}=\overline{F^{+}[\alpha_1(t)]},\quad t\in L_1,\\ \Phi^{-}(t)&=\Phi^{+}[\alpha_2(t)]=F^{+}[\alpha_2(t)],\quad t\in L_2\end{aligned}$$

и из краевых условий (8.2), (8.3) получаем:

$$\Phi^{+}(t)=G_1(t)\,\Phi^{-}(t)+g_1(t),\quad t\in L_1,\tag{8.5}$$

$$\Phi^{+}(t)=G_2(t)\,\Phi^{-}(t)+g_2(t),\quad t\in L_2.\tag{8.6}$$

Итак, чтобы определить функцию $\Phi(z)$, надо найти такие решения краевой задачи Римана для двоякопериодических функций с основными периодами ω_1 и $2i\omega_2$, которые будут удовлетворять первому из условий (8.4).

При решении задачи краевое условие (8.6) берем лишь на отрезке l_2, ибо l_2 и l_2' связаны преобразованием $z+\omega_1$, принадлежащим рассматриваемой группе Г. В данном случае

$$\Gamma(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_1} \ln G_1(\tau)\,\zeta(\tau - z)\,d\tau + \frac{1}{4\pi i}\int_{l_2} \ln G_2(\tau)\,\zeta(\tau - z)\,d\tau \tag{8.7}$$

оцениваем вблизи точек $z=0$ и $z=i\omega_2$. Точка $z=0$ является началом отрезка l_1 и концом l_2. Поэтому в ее окрестности

$$\Gamma(z) = (\alpha_0 + i\beta_0)\ln\sigma(z) + \Gamma^*(z),$$

$$\alpha_0 + i\beta_0 = \frac{1}{4\pi i}\left[-\ln G_1(0) + \ln G_2(0)\right];$$

$z=i\omega_2$ — конец l_1' и начало l_2:

$$\Gamma(z) = (\alpha_1 + i\beta_1)\ln\sigma(z - i\omega_2) + \Gamma^{**}(z),$$

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \frac{1}{4\pi i}\left[\ln G_1(i\omega_2) - \ln G_2(i\omega_2)\right].$$

Подбирая по α_0 и α_1 нужным образом целые числа $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ при $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 > 0$, находим каноническую функцию

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)}\left[\sigma(z)\right]^{-\varkappa_0}\left[\sigma(z - i\omega_2)\right]^{-\varkappa_1}\prod_{k=1}^{\varkappa}\sigma(z - \theta_k) \tag{8.8}$$

однородной задачи

$$f^+(t) = \sqrt{G_1(t)}\,f^-(t), \quad t\in L_1,$$

$$f^+(t) = \sqrt{G_2(t)}\,f^-(t), \quad t\in l_2,$$

если точки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\varkappa$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{\varkappa}\theta_k = i\varkappa_1\omega_2 - \alpha, \tag{8.9}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_1}\ln G_1(\tau)\,d\tau + \frac{1}{4\pi i}\int_{l_2}\ln G_2(\tau)\,d\tau.$$

Канонической функцией задачи (8.2), (8.3) при $\varkappa > 0$ будет:

$$X(z) = \chi(z)\,\overline{\chi(-\bar z + \omega_1 + i\omega_2)} = e^{\Gamma(z) - \overline{\Gamma(\bar z - i\omega_2)}}\times$$
$$\times\left[\sigma(z)\right]^{-\varkappa}\left[\sigma(z - i\omega_2)\right]^{-\varkappa_1}\left[\sigma(z + i\omega_2)\right]^{-\varkappa_0}\prod_{k=1}^{\varkappa}\sigma(z - \theta_k)\,\sigma(z + \bar\theta_k + i\omega_2). \tag{8.10}$$

В параллелограмме периодов $X(z)$ имеет $2\varkappa$ нулей: в точках $\theta_k\in S^+$ и в точках $-\bar\theta_k + \omega_1 - i\omega_2 \in S^-$.

Общее решение задачи имеет вид

$$\Phi(z) = X(z)\left[\varphi(z) + \overline{\varphi(-\bar z + \omega_1 + i\omega_2)}\right] +$$
$$+ X(z)\left\{C + \sum_{k=1}^{\varkappa}\left[C_k\zeta(z - \theta_k) - \bar C_k\zeta(z + i\omega_2)\right]\right\}, \tag{8.11}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_1}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau - z)\,d\tau + \frac{1}{4\pi i}\int_{l_2}\frac{g_2(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau - z)\,d\tau,$$

C — произвольная вещественная постоянная, C_k — комплексные постоянные, связанные соотношением

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} \operatorname{Im} C_k = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau + \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{l_2} \frac{g_2(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau \right\}.$$

Всего в формулу (8.11) входит $2\varkappa$ произвольных вещественных постоянных.

Легко получить условия разрешимости задачи и в случае $\varkappa \leqslant 0$.

* * *

Рассмотренные нами задачи, конечно, не исчерпывают всех задач, которые могут быть решены указанным методом. Можно было бы, например, сохраняя вид перечисленных краевых условий на границе прямоугольника, добавить внутри него конечное число линий скачков и на них задать краевые условия Римана. Принимая во внимание результаты нашей предыдущей статьи [18], читатель в случае надобности без больших затруднений проделает это сам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Граве Д. А. Об основных задачах математической теории построения географических карт. СПБ, 1896.
2. Schwarz. Rappresentazione di un'ellise sopra un circolo. Annali di Mathematica pure applicata. Serie II, tomo III.
3. Villat. Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire. Rendiconti del Circolo Mathem. di Palermo, t. 33. (1912), p. 147 etc.
4. Нумеров С. Н. Решение задач о фильтрации без промежутков высачивания. ПММ, т. VI (1942), вып. 1.
5. Положий Г. Н. Решение некоторых задач плоской теории упругости для областей с угловыми точками. Украинский матем. журнал, № 4 (1949), 16—41.
6. Вудс. Дозвуковое плоское течение в кольцевой области или в канале с периодическими по длине граничными условиями. Механика, сб. переводов, № 2 (1956).
7. Komatu I. On boundary value problems for a rectangle. Kodai Mathematical Seminar Reports, t. 7, № 1 (1955), 8—14.
8. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казанского гос. ун-та, т. 116, кн. 4 (1956), 59—110.
9. Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. ГТТИ, 1933.
10. Чибрикова Л. И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами. Известия ВУЗов (математика), № 6 (1961), 121—131. Письмо в редакцию. Известия ВУЗов (математика), № 3 (1962).
11. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
12. Koiter W. T. Some general theorems on doubly — periodic and quasiperiodic functions. Proc. Konikl. nederl. akad. wet., A. 62, № 2 (1959), 120—128.
13. Karleman T. Sur la theorie des équations integrales et ses applications. Verhandlungen des internat. mathem. Kongr. Zürich, I B., 1932.
14. Квеселава Д. А. Некоторые граничные задачи теории функций. Труды Тбилисского мат. ин-та, т. XVI, 1948.
15. Чибрикова Л. И. Об одном особом случае задачи Римана для автоморфных функций. Сборник „Краевые задачи теории аналитических функций", изд-во КГУ, 1962.
16. Показеев В. И. Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника. Настоящий сборник.
17. Geurst J. A. A note on the Villat — Dini formula and some related formulas. Nieuw Archief voor Wiskunde (3), VIII, 89—100 (1960).
18. Чибрикова Л. И. Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем. Настоящий сборник.