ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.958

С.Л. ТОНКОНОГ, Л.Д. ЭСКИН

О НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЯХ И ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ. II

Предлагаемая статья является второй частью работы авторов [1], в которой были классифицированы уравнения, описывающие динамику свободной поверхности неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом и допускающие группу симметрий. Здесь изучаются инвариантные решения найденных там уравнений, сохранены все обозначения из [1], нумерация разделов и формул продолжает принятую там нумерацию. Список цитированной литературы для удобства читателя приведен в [1].

3. Инвариантные решения

6. Построим решение уравнения (3.8), инвариантное относительно группы с оператором (3.9). Это решение представляется в виде

$$u = t^{-(l+s)}\chi_1(J), \quad \sigma = t^{-3s}\chi_2(J) \tag{6.1}$$

где инвариант $J = t(x-(\ln t-1+\varepsilon^{-1})\beta^{-1})$. После подстановки выражений (6.1) в уравнение (3.8) для неизвестных функций χ_1, χ_2 получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' - (1+\varepsilon)J\xi_1' + (l+s)\chi_1 + \psi(\chi_1,\chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

При $\varepsilon = -3l$, $\psi = 0$ имеем замкнутое решение (n нечетно)

$$u = \begin{cases} c_n t^{-(l+s)}(\xi_0^p - J^p)^{l-s}, & |J| \le \xi_0, \quad c_n = (l^{-1}(l+s)^{1/n})^{l-s}; \\ 0, & |J| > \xi_0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Решение (6.2) описывает течение пленки неньютоновской жидкости с нулевыми стоками в точках фронта, движущихся по логарифмическому закону

$$x_f^{\text{л}} = \beta^{-1}\left(\ln t - \frac{5n+4}{3n+3}\right) - \xi_0 t^{-1}, \quad x_f^{\text{п}} = \beta^{-1}\left(\ln t - \frac{5n+4}{3n+3}\right) + \xi_0 t^{-1}.$$

Таким образом, вся масса пленки при $t \to \infty$ медленно движется вправо, причем ширина пленки (расстояние между точками фронта, равное $2\xi_0 t^{-1}$) быстро уменьшается. Быстро спадает со временем и высота купола пленки

$$u_{\max} = c_n\xi_0^l t^{-(l+s)},$$

причем сам купол также движется вправо по закону

$$x_k = \beta^{-1}\left(\ln t - \frac{5n+4}{3n+3}\right).$$

Заметим, что в случае нулевого баланса массы свободное растекание пленки (растекание с нулевыми точками в точках фронта) описывается решением (2.5) уравнения (2.1). В этом случае купол неподвижен ($x_k = 0$), его высота спадает медленнее ($u_{\max} \sim t^{-r}$), точки фронта движутся

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00346).

к ∞ по степенному закону. Все указанные особенности течения, описываемого решением (6.2) уравнения (3.8) с ненулевым балансом массы

$$g = \varepsilon t^{-1}(\beta^{-1}(\ln t - 1) - x)\sigma u^{-1} = -\varepsilon(Jt^{-2} + (\varepsilon\beta t)^{-1})\sigma u^{-1}, \quad \varepsilon = -3l < 0, \tag{6.3}$$

можно объяснить следующим образом (полагая для определенности $\beta > 0$). Из (6.2) имеем $\sigma u^{-1} > 0$ при $J < 0$, т.е. при $x_f^{\text{п}} < x < x_k$, и $\sigma u^{-1} < 0$ при $J > 0$, т.е. при $x_f^{\text{п}} > x > x_k$. Отсюда и из (6.3) убеждаемся, что баланс массы g на решении (6.3) отрицателен при $x < x_k$, положителен при $x_k < x < \beta^{-1}(\ln t - 1)$ и снова отрицателен при $\beta^{-1}(\ln t - 1) < x < x_f^{\text{п}}$, причем при больших t последний случай невозможен. Отрицательный баланс g равносилен стоку на поверхности, а положительный — источнику. Наличие стока на поверхности слева от x_k и приводит к тому, что пленка движется вправо. На временах $t < -\varepsilon\beta\xi_0$ сток превалирует над источником, что приводит к быстрому опусканию купола.

При $\varepsilon = -1$ вместо (6.2) нетрудно получить решение в квадратурах, но с ненулевым стоком на фронте. Такие решения здесь не рассматриваются.

Решение уравнения (3.10), инвариантное относительно группы с оператором (3.11), следует искать в виде

$$u = \chi_1(J), \quad \sigma = t^{-2m}\chi_2(J), \tag{6.4}$$

где $J = xt^{-2m} + (\varepsilon m)^{-1}t^{-m}$ — инвариант группы (3.11). Подстановка в уравнение (3.10) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для неизвестных функций χ_1, χ_2

$$(\chi_1^2\chi_2^2)' + \varepsilon(m^2J^2\chi_1' + \psi(\chi_1, \chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{6.5}$$

В случае $\psi = 0$, или, более общо, $\psi = \beta\chi_1^\mu\chi_2^\nu$, где

$$\mu + \frac{3}{n+2}\nu = \frac{3(n+1)}{n+2},$$

уравнение (6.5) допускает группу растяжений с оператором

$$J\frac{\partial}{\partial J} + (l+s)\chi_1\frac{\partial}{\partial\chi_1},$$

следовательно, допускает понижение порядка, т.е. сводится к динамической системе на плоскости, которая может быть исследована методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Рассмотрим инвариантные решения уравнений п. 4. В случае уравнения (4.11) решение, инвариантное относительно группы с оператором (4.12), имеет вид

$$u = t^\alpha\chi_1(J), \quad \sigma = t^{-\lambda\alpha}\chi_2(J), \tag{7.1}$$

где инвариант $J = xt^{-\alpha(2+\lambda)} - \varepsilon t^{k-1}/(k-1)$, а функции χ_1, χ_2 удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + \alpha(2+\lambda)J\chi_1' - \alpha\chi_1 + \varepsilon\psi(\chi_1, \chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{7.2}$$

При $\psi = 0$, $\lambda = -3$ оно имеет замкнутое решение, которое получается из решения (2.5) уравнения (2.1), если в нем заменить автомодельную переменную ξ инвариантом J. Это решение описывает растекание пленки с подвижным куполом и при $\varepsilon = 0$ превращается в решение (2.5).

Наиболее интересно среди инвариантных уравнений п. 4 уравнение (4.13). Его решение, инвариантное относительно группы с оператором (4.14), получается в виде

$$u = t^\alpha \exp(\varepsilon l\mu(t))\chi_1(J), \quad \sigma = t^{-\alpha\lambda}\exp(\varepsilon s\mu(t))\chi_2(J), \tag{7.3}$$

где $\mu(t) = (k-1)^{-1}t^{k-1}$, $J = xt^{-\alpha(2+\lambda)}\exp(-\varepsilon\mu(t))$ — инвариант группы с оператором (4.14), а функции χ_1, χ_2 удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + \alpha(2+\lambda)J\chi_1' - \alpha\chi_1 + \varepsilon J^l\psi(\chi_1 J^{-l}, \chi_2 J^{-s}) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{7.4}$$

В случае $\psi = 0$, $\lambda = -3$ уравнение (7.4) имеет замкнутое решение (аналог решения (2.5) уравнения (2.1))

$$u = \begin{cases} c_n t^{-r} \exp(\varepsilon l \mu(t))(\xi_0^p - J^p)^{l-s}, & |J| \le \xi_0; \\ 0, & |J| \ge \xi_0, \end{cases} \tag{7.5}$$
$$J = xt^{-r}\exp(-\varepsilon\mu(t)).$$

Постоянная c_n определена соотношением (2.5). Оказывается, что решение (7.5) уравнения (4.13) описывает течение пленки или ледника, существенно отличающееся по своим физическим свойствам от течения, описываемого решением (2.5) уравнения с нулевым балансом массы (2.1). Действительно, пусть $\varepsilon < 0$. Из (7.5) имеем

$$x_f^{\text{л}} = -\xi_0 t^r \exp(\varepsilon\mu(t)), \quad x_f^{\text{п}} = \xi_0 t^r \exp(\varepsilon\mu(t)), \tag{7.6}$$
$$u_k = u_{\max} = u(0,t) = c_n \xi_0^l t^{-r} \exp(\varepsilon l \mu(t)). \tag{7.7}$$

Рассмотрим три случая.

1) $k > 1$. В этом случае $x_f^{\text{п}}(t)$ растет ($x_f^{\text{л}}(t)$ убывает) на интервале $0 < t < t_0 = (-r/\varepsilon)^{1/(k-1)}$ от нуля до максимального значения, равного $\xi_0 t_0^r \exp(-r(k-1)^{-1})$, затем с ростом t убывает от своего максимального значения ($x_f^{\text{л}}$ растет от своего минимального значения) до нуля. При этом высота купола u_k убывает $\lim u_k = 0$ ($t \to \infty$). Таким образом, на временном интервале $0 < t < t_0$ имеем растекание пленки (наступление ледника) и последующее ее схлопывание (отступление ледника).

2) $k < 1$. В этом случае в силу (7.6) $x_f^{\text{п}} \to -\infty$, $x_f^{\text{л}} \to \infty$ при $t \to \infty$, причем из (7.7) получаем $u_k \to 0$ при $t \to \infty$. Решение (7.5) с ростом t приближается к решению (2.5) и также описывает растекание пленки.

3) $k = 1$. В этом случае вместо формул (7.3) получаем

$$u = t^{\alpha+\varepsilon l}\chi_1(J), \quad \sigma = t^{-\alpha\lambda+\varepsilon s}\chi_2(J),$$

а функции χ_1, χ_2 снова удовлетворяют уравнению (7.4). В случае $\psi = 0$, $\lambda = -3$ имеем замкнутое решение

$$u = \begin{cases} c_n t^{-r+\varepsilon l}(\xi_0^p - J^p)^{l-s}, & |J| \le \xi_0; \\ 0, & |J| \ge \xi_0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Формулы (7.6), (7.7) заменяются соотношениями

$$x_f^{\text{л}} = -\xi_0 t^{r+\varepsilon}, \quad x_f^{\text{п}} = \xi_0 t^{r+\varepsilon}, \quad u_k = c_n \xi_0^l t^{-r+\varepsilon l}. \tag{7.9}$$

Из соотношений (7. 9) следует, что решение (7.8) уравнения (4.13) описывает растекание пленки при $\varepsilon > -r$ и схлопывание при $\varepsilon < -r$, при $\varepsilon = -r$ точки фронта неподвижны, но купол опускается.

Отмеченные особенности течения снова можно объяснить, рассматривая баланс массы $g = \varepsilon t^{k-2}(lu - x\sigma u^{-1})$, $\varepsilon < 0$, на замкнутых решениях (7.5), (7.8). Баланс g оказывается отрицательным, т.е. играет роль стока. При $k > 1$ и $k = 1$, $\varepsilon < -r$ сток достаточно силен и приводит к схлопыванию пленки, а в случае растекания наличие слабого стока с поверхности приводит к более быстрому, чем в отсутствие стока, оседанию купола и замедлению движения точек фронта.

Мы привели пример решения уравнения (4.13) в элементарных функциях — решение (7.5). Это решение описывает течение пленки с нулевыми стоками в точках фронта. Нетрудно привести аналогичные примеры и для ряда других инвариантных уравнений вида (1.1), полученных в настоящей работе. Мы здесь на этих примерах останавливаться не будем, а укажем возможность построения для этих уравнений решений в квадратурах с ненулевым стоком на фронте. А именно, если снова положить $\psi = 0$, но $\lambda = -2$ (следовательно, $\alpha = -s$), то в уравнении (7.4) исчезнут слагаемые, содержащие независимую переменную J. Полученное после этого уравнение допускает понижение порядка и интегрируется в квадратурах. Его неотрицательное монотонно возрастающее решение $\chi_1^{(1)}$ определяется из уравнения (n нечетно)

$$J - \xi_0 = \int_0^{\chi_1} \frac{v^{(n+2)/n} dv}{(\xi_1 - lrv^{1/nr})^{1/(n+1)}} = M(\chi_1, \xi_1), \quad \xi_0 \le J \le J_1 = \xi_0 + M((\xi_1/(lr))^{nr}, \xi_1),$$

ξ_0, $\xi_1 > 0$ — константы. Неотрицательное монотонно убывающее решение $\chi_1^{(2)}$ определяется из уравнения

$$\eta_0 - J = \int_0^{\chi_1} \frac{v^{(n+2)/n} dv}{(\eta_1 - lrv^{1/nr})^{1/(n+1)}} = M(\chi_1, \eta_1), \quad \eta_0 - M(\eta_1/(lr))^{nr}, \eta_1) = J_2 \le J \le \eta_0,$$

η_0, $\eta_1 > 0$ — константы. Имеем

$$\chi_1^{(1)}(J_1) = (\xi_1/(lr))^{nr}, \quad \chi_1^{(2)}(J_2) = (\eta_1/(lr))^{nr},$$
$$(\chi_1^{(1)}(J))' = (\xi_1 - lr(\chi_1^{(1)}(J))^{1/(nr)})^{1/(n+1)}(\chi_1^{(1)}(J))^{-(n+2)/n},$$
$$(\chi_1^{(2)}(J))' = -(\eta_1 - lr(\chi_1^{(2)}(J)^{1/(nr)})^{1/(n+1)}(\chi_1^{(2)}(J))^{-(n+2)/n},$$

откуда получаем

$$\lim_{J \to J_1 - 0} (\chi_1^{(1)}(J))' = 0, \quad \lim_{J \to J_2 + 0} (\chi_1^{(2)}(J))' = 0.$$

Потребовав выполнения равенств $J_1 = J_2$ и $\chi_1^{(1)}(J_1) = \chi_1^{(2)}(J_1)$, найдем $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_0 = 2J_1 - \xi_0$. Теперь на интервале (ξ_0, η_0) без труда строится неотрицательное непрерывное вместе с первой производной решение χ_1 уравнения (7.4) с $\lambda = -2$, $\psi = 0$ в виде

$$\chi_1(J) = \begin{cases} \chi_1^{(1)}(J), & \xi_0 \le J \le J_1; \\ \chi_1^{(2)}(J), & J_1 \le J \le \eta_0. \end{cases}$$

Решение χ_1 полностью определяется выбором постоянных ξ_0, ξ_1. Оно обращается в нуль при $J = \xi_0$ и $J = \eta 0$, а его производная равна нулю в точке $J = J_1$. Имея решение χ_1, с помощью соотношения (7.3) получаем решение уравнения (4.13) (с $\alpha = -s$) с двумя точками фронта. Нетрудно заметить, что для этого решения сток в точке фронта $x_f^{\text{п}} = (2J_1 - \xi_0)\exp(\varepsilon\mu(t))$ отличен от нуля и равен

$$q = -t^{-2l} \exp(\varepsilon s \mu(t)/r) \xi_1^{n/(n+1)},$$

а в точке фронта $x_f^{\text{л}} = \xi_0 \exp(\varepsilon\mu(t))$ получаем отличный от нуля источник

$$q = t^{-2l} \exp(\varepsilon s \mu(t)/r) \xi_1^{n/(n+1)},$$

производная u_x при $x = x_k = J_1 \exp(\varepsilon\mu(t))$ (координата купола) обращается в нуль.

Аналогичные решения нетрудно построить и для других инвариантных уравнений.

Автомодельное решение уравнения (4.16), инвариантное относительно группы растяжений X_λ^0, ищем в виде (2.3), но для неизвестных функций χ_1, χ_2 из (4.16) вместо уравнения (2.4) получаем уравнение

$$(\chi_1^2 \chi_2^n)' + \alpha(2+\lambda) I_1 \chi_1' - \alpha\chi_1 + \varepsilon I_1^{-(n+1)\lambda/(2+\lambda)} \psi(\chi_1 I_1^{-1/(2+\lambda)}, \chi_2 I_1^{2/(2+\lambda)}, \quad \chi_2 = \chi_1' \chi_1.$$

Уравнение (4.16) наиболее интересно в случае $\lambda = -1$ и функции $\psi(p, q)$, зависящей лишь от отношения своих аргументов, т.е. в случае уравнения

$$u_t = (u^2 \sigma^n)_x + \varepsilon x^{n+1} \varphi(\sigma/u), \quad \sigma = u u_x. \tag{7.10}$$

Уравнения вида (7.10) имитируют динамику поверхности ледника в случае, когда осадки на его поверхность переносятся ветром постоянного направления (причем выбор функции φ определяется именно направлением ветра и мощностью осадков, предполагаемой постоянной).

Перейдем к уравнению (4.21). Его решение, инвариантное относительно группы с оператором (4.22), записывается в виде

$$u = \chi_1(x)(t - \varepsilon\sqrt{\beta t^2 + \beta_2})^{-s}, \quad \sigma = \chi_2(x)(t - \varepsilon\sqrt{\beta t^2 + \beta_2})^{-2s},$$

причем функции χ_1, χ_2 удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + s(1 - \beta\varepsilon^2)\chi_1 + \varepsilon\chi_1^{2(n+1)}\psi(x, \chi_2/\chi_1^2), \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Рассмотрим теперь уравнение (4.26) при $c_3 = 0$ и $\theta_2 = 0$. Уравнение (4.25) удовлетворяется, а функции φ и θ_1 удовлетворяют системе (4.24). Инвариантное относительно группы с оператором X_λ(2.12) решение уравнения (4.26) ищем в виде

$$u = \chi_1(J)\exp\Big(\alpha\int\frac{1+\varepsilon\zeta_1}{t+\varepsilon\alpha\varphi}dt\Big), \quad \sigma = \chi_2(J)\exp\Big(\alpha\int\frac{-\lambda+\varepsilon\zeta_2}{t+\varepsilon\alpha\varphi}dt\Big), \tag{7.11}$$

где инвариант

$$J = x\exp\Big(-\alpha\int\frac{2+\lambda+\varepsilon\theta_1}{t+\varepsilon\alpha\varphi}dt\Big).$$

Подстановка соотношений (7.11) в уравнение (4.26) ($c_3 = \theta_2 = 0$) после достаточно громоздких преобразований, основанных на использовании соотношений (4.27), приводит к уравнению для χ_1, χ_2

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (\alpha(2+\lambda) + \varepsilon(c_2 + \varepsilon\alpha d_2))J\chi_1' - \alpha[1 + \varepsilon(l(\alpha^{-1}c_2 + \varepsilon d_2) - s(\varkappa + \varepsilon\alpha d_1))]\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

В случае уравнения (4.29) решение, инвариантное относительно группы с оператором (4.30), получаем в виде

$$u = t^{(\alpha+\varepsilon(l-s\mu))/(1+\varepsilon\mu)}\chi_1(J), \quad \sigma = t^{(\varepsilon s(1-2\mu)-\alpha\lambda)/(1+\varepsilon\mu)}\chi_2(J), \quad J = xt^{-(\alpha(2+\lambda)+\varepsilon)/(1+\varepsilon\mu)}.$$

Функции χ_1, χ_2 удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + \Big(\frac{\alpha(2+\lambda)+\varepsilon}{1+\varepsilon\mu} + \varepsilon c_2\Big)J\chi_1' - \Big(\frac{\alpha+\varepsilon(l-s\mu)}{1+\varepsilon\mu} - \varepsilon c_1\Big)\chi_1 + J^l\psi(\chi_1 J^{-l}, \chi_2 J^{-s}) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

Приведем и пример решения уравнения (4.29), инвариантного относительно двупараметрической группы с операторами (4.30) и X_λ^0

$$u = m_1 t^{-s}x^l, \quad \sigma = m_2 t^{-2s}x^s,$$

причем коэффициенты m_1, m_2 должны удовлетворять алгебраической системе уравнений

$$sr^{-1}m_1^2m_2^n + (s + \varepsilon c_1)m_1 + \varepsilon c_2 m_2 m_1^{-1} + \varepsilon\psi(m_1, m_2) = 0, \quad m_2 = lm_1^2.$$

Далее, с помощью (4.32) находим, что инвариантное решение уравнения (4.31) следует искать в виде

$$u = t^\alpha\chi_1(J), \quad \sigma = t^{-\lambda\alpha}\chi_2(J), \quad J = xt^{-\alpha(2+\lambda)} - \frac{\varepsilon\delta}{1+\varepsilon\beta}\ln t.$$

Для функций χ_1, χ_2 получаем уравнение

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + \alpha(2+\lambda)(1+\varepsilon\beta)J\chi_1' + \varepsilon\Big(c_3 + \frac{\delta}{1+\varepsilon\beta}\Big)\chi_1' - (\alpha - \varepsilon c_1)\chi_1 + \varepsilon\psi(\chi_1, \chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

В заключение укажем автомодельное решение уравнения (4.33), оно задается соотношениями (2.3), но для функций χ_1, χ_2 получаем уравнение

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + [(\alpha(2+\lambda) + \varepsilon c_2)\xi + \varepsilon c_3]\chi_1' - (\alpha - \varepsilon c_1)\chi_1 + \varepsilon\psi(\xi, \chi_1, \chi_2) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'.$$

8. Перейдем к построению инвариантных решений уравнений п. 5. Для уравнения (5.4), инвариантного относительно группы с оператором (5.5), решение следует искать в виде

$$u = \chi_1(J)\exp\Big(\varepsilon l\int\theta_1 dt\Big),\quad \sigma = \chi_2(J)\exp\Big(\varepsilon s\int\theta_1 dt\Big), \tag{8.1}$$

где

$$J = \Big(I_1 - \lambda\delta^{-1}\Big(\int\theta_1 dt + \varepsilon^{-1}\Big)\Big)\exp\Big(-\varepsilon\int\theta_1 dt\Big) + \lambda(\varepsilon\delta)^{-1}$$

— инвариант группы (5.5), равный $I_1 = x + \lambda t$ при $\varepsilon = 0$. После подстановки (8.1) в уравнение (5.4) получим для определения неизвестных функций χ_1, χ_2 уравнение

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (\varepsilon\delta J - \lambda)\chi_1' + \varepsilon\chi_1\psi(\chi_1\chi_2^{-n-1}) = 0,\quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{8.2}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (8.2) переходит в уравнение для решений типа бегущей волны невозмущенного уравнения (2.1), имеющих вид (2.6). Отметим, что уравнение (5.4) содержит произвольную функцию времени θ_1, что позволяет получать решения (8.1) с достаточно разнообразными свойствами и поведением на больших временах. В случае $\psi = \delta$ нетрудно построить замкнутое решение для уравнения (8.2), а затем получить и замкнутое решение уравнение (5.4)

$$u = \begin{cases} c_n(\xi_0^p - (J - \lambda/(\varepsilon\delta))^p)^{l-s}\exp\Big(\varepsilon l\int\theta_1 dt\Big), & |J - \lambda/(\varepsilon\delta)| \le \xi_0,\quad c_n = (\varepsilon\delta(l-s)^{-n})^s;\\ 0, & |J - \lambda/(\varepsilon\delta)|| > \xi_0. \end{cases}$$

Это решение обращается в нуль при $\varepsilon = 0$.

Решение уравнения (5.6), инвариантное относительно группы с оператором (5.7), имеет вид

$$u = \chi_1(J)\exp\Big(\varepsilon l\frac{\theta_0 t}{1+\varepsilon\varphi_0}\Big),\quad \sigma = \chi_2(J)\exp\Big(\varepsilon s\frac{\theta_0 t}{1+\varepsilon\varphi_0}\Big), \tag{8.3}$$

где функции χ_1, χ_2 удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned}(\chi_1^2\chi_2^n)' + \varepsilon\Big(\delta - \frac{\varepsilon\varphi_0\theta_0}{1+\varepsilon\varphi_0}\Big)\Big(J - \frac{\lambda}{\varepsilon\delta} + \frac{\lambda\varphi_0(\delta-\theta_0)}{\delta^2}\Big)\chi_1' +\\ + \varepsilon\chi_1\Big(\psi(\chi_1\chi_2^{-n-1}) - \frac{l\theta_0}{1+\varepsilon\varphi_0}\Big) = 0,\quad \chi_2 = \chi_1\chi_1',\end{aligned} \tag{8.4}$$

а

$$\begin{aligned}J = \Big[I_1 + \lambda\delta^{-1}(\varphi_0 - \varphi_0\theta_0\delta^{-1} - \varepsilon^{-1} - \theta_0 t) - \frac{\varepsilon c\varphi_0}{\delta + \varepsilon\varphi_0(\delta-\theta_0)}\exp(\delta t/\varphi_0)\Big] \times\\ \times\exp\Big(-\frac{\varepsilon\theta_0 t}{1+\varepsilon\varphi_0}\Big) + \lambda\delta^{-1}(\varepsilon^{-1} + \varphi_0\theta_0\delta^{-1} - \varphi_0).\end{aligned}$$

Инвариант J снова выбран так, чтобы иметь $J = I_1$ при $\varepsilon = 0$. Отметим, что в случае

$$\psi = 0,\quad \theta_0 = \frac{\delta(1+\varepsilon\varphi_0)}{\varepsilon\varphi_0 - l}$$

уравнение (8.4), а вместе с ним и (5.6), имеют замкнутое решение, на деталях его построения не останавливаемся.

Перейдем к уравнению (5.8), инвариантному относительно группы с оператором (5.9). Его инвариантное решение представляется в виде

$$u = (1+\varepsilon\nu t)^{-\mu/\nu}\chi_1(J),\quad \sigma = (1+\varepsilon\nu t)^{-(2\mu+1)\nu^{-1}}\chi_2(J), \tag{8.5}$$

где

$$J = (1+\varepsilon\nu t)^{-1/\nu}(x - \lambda\varepsilon^{-1} - \varepsilon b\nu t^{1/\nu}) + \lambda\varepsilon^{-1}$$

— инвариант группы, удовлетворяющей условию $J|_{\varepsilon=0} = I_1$, а функции χ_1, χ_2 удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + \varepsilon((J - \lambda\varepsilon^{-1})\chi_1' + \mu\chi_1 + \psi(\chi_1\chi_2^{-\mu(2\mu+1)^{-1}}) = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{8.6}$$

В случае $\mu = 1$, $\psi = 0$ уравнение (5.8) снова решается в замкнутой форме.

В заключение укажем инвариантное решение уравнения (5.10), полагая с целью упрощения выкладок $\lambda = 0$, $c = b(2n+2)^{-1}$ и заменив произвольную постоянную μ на $-\mu$. Получаем уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x - \varepsilon\bigg[\frac{b}{2(n+1)}t^{-1/2}x + dt^{-1/2}\exp(2t^{1/2}b^{-1})\sigma u^{-1} + \mu\sigma^{n+1}\bigg], \quad \sigma = uu_x, \tag{8.7}$$

инвариантное относительно группы с оператором

$$X = (1+\varepsilon bt^{1/2})\partial_t + \varepsilon\bigg[x\bigg(1+\frac{b}{2(n+1)}t^{-1/2}\bigg) + dt^{-1/2}\exp(2t^{1/2}b^{-1})\bigg]\partial_x + \varepsilon lu\partial_u + \varepsilon\bigg(s - \frac{b}{2(n+1)}t^{-1/2}\bigg)\sigma\partial_\sigma.$$

Инвариантное решение уравнения (8.7) имеет вид

$$u = \chi_1(J)(1+\varepsilon bt^{1/2})^{-2l/(\varepsilon b^2)}\exp(2lt^{1/2}b^{-1}),$$
$$\sigma = \chi_2(J)(1+\varepsilon bt^{1/2})^{-(\frac{1}{n+1}+\frac{2s}{\varepsilon b^2})}\exp(2st^{1/2}b^{-1}),$$

где

$$J = (1+\varepsilon bt^{1/2})^{-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{\varepsilon b^2}}\bigg(x\exp(-2t^{1/2}b^{-1}) - \frac{2d}{b(-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{\varepsilon b^2})}\bigg),$$

а функции χ_1, χ_2 удовлетворяют уравнению

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + \varepsilon b\bigg(\frac{\varepsilon b}{2(n+1)} - b^{-1}\bigg)J\chi_1' - \varepsilon l\chi_1 - \mu\chi_2^{n+1} = 0, \quad \chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{8.8}$$

В случае $\mu = 0$, $\varepsilon > 0$, $b = \pm(2nl/\varepsilon)^{1/2}$ уравнение (8.8) имеет замкнутое решение, в результате для этих значений μ и b получаем замкнутое решение уравнения (8.7)

$$u = \begin{cases} c_n(1+\varepsilon bt^{1/2})^{-1/n}\exp(2lt^{1/2}/b)(J^p - \xi_0^p)^{l-s}, & |J| \geq \xi_0; \\ 0, & |J| < \xi_0, \end{cases} \tag{8.9}$$
$$c_n = (\varepsilon l)^{1/n}l^{-(l-s)}.$$

Рассмотрим два случая.

1) $b > 0$. Из (8.9) легко следует, что пленка распадается на две части: правую

$$x \geq x_f^{\text{п}} = [\xi_0(1+\varepsilon bt^{1/2})^{-1/n} + 2dnb^{-1}]\exp(2t^{1/2}b^{-1})$$

и левую

$$x \leq x_f^{\text{л}} = [-\xi_0(1+\varepsilon bt^{1/2})^{-1/n} + 2dnb^{-1}]\exp(2t^{1/2}b^{-1}).$$

На больших временах ($t \to \infty$) в случае $d > 0$ $x_f^{\text{п,л}} \to \infty$, т.е. правая половина пленки отступает, а левая наступает; в случае $d < 0$ имеем обратную картину. Этот результат нетрудно объяснить, рассматривая второе слагаемое (основное при больших t) в балансе массы в уравнении (8.7). Так как $\sigma u^{-1} = u_x$ больше нуля при $x > x_f^{\text{п}}$ и меньше нуля при $x < x_f^{\text{л}}$, то второе слагаемое в балансе при $\varepsilon > 0$, $d > 0$ на решении (8.9) играет роль источника на левой половине поверхности пленки и стока на правой; при $\varepsilon > 0$, $d < 0$ — наоборот, имеем источник справа и сток слева.

2) $b < 0$. Обозначив $t_0 = (\varepsilon b)^{-2}$, найдем, что при $t \to t_0 - 0$ $x_f^{\text{п}} \to \infty$, $x_f^{\text{л}} \to -\infty$, т.е. за конечное время правая половина пленки с быстро возрастающей скоростью уходит в ∞, а левая — в $-\infty$.

Из (8.9) следует, что пленка с ростом t пучится. Этот результат объясняется тем, что в балансе массы основную роль играет первое слагаемое

$$-\varepsilon b t^{-1/2} x \sigma (2(n+1)u)^{-1},$$

которое для обеих половин поверхности пленки играет при $b < 0$, $\varepsilon > 0$ роль поверхностного источника.

Пользуясь случаем, авторы искренне благодарят рецензентов статьи [1] и данной работы за стимулирующие замечания и А.Н. Саламатина и В.А. Чугунова за внимание и обсуждения полученных результатов.

Литература

1. Тонконог С.Л., Эскин Л.Д. *О некоторых симметриях и инвариантных решениях уравнения динамики неньютоновской жидкости. I* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 1. – С. 55–66.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 16.05.1995
окончательный вариант 17.04.1997