ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 517.982

А.Г. МЯСНИКОВ

АМЕНАБЕЛЬНЫЕ $L_1(G)$-МОДУЛИ, УСРЕДНЯЕМЫЕ ФУНКЦИИ И ПРОСТРАНСТВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

1. Введение

В настоящей статье продолжается исследование аменабельных модулей [1]. Основное внимание уделяется изучению свойств топологически усредняемых функций из компоненты аменабельности в $L_\infty(G)$. Полученные результаты применяются для решения вопроса об аменабельности функциональных модулей и, в частности, модулей со смешанными L_p-нормами. Дополнительная информация об усредняемых функциях может быть найдена в работах [2]–[4].

В дальнейшем через G обозначается локально компактная группа с левой мерой Хаара λ_G, через $L_p(G)$, $p \in [1,\infty]$, — соответствующие пространства комплекснозначных функций, рассматриваемые как левые банаховы $L_1(G)$-модули относительно свертки $\varphi * f = \int\limits_G \varphi(s) f(s^{-1}t)d\lambda_G(s)$, $t \in G$ ($\varphi \in L_1(G)$, $f \in L_p(G)$). Далее, $P(G) = \{\varphi \in L_1(G) : \varphi \geq 0, \quad \|\varphi\|_1 = 1\}$, $RUC(G) = L_1(G) * L_\infty(G)$, $C_{00}(G)$ — множество непрерывных на G комплекснозначных функций с компактными носителями. Значение функционала $F \in X^*$ в $x \in X$ обозначается $\langle x, F\rangle$. И, наконец, используются обозначения ${}_sf(t) = f(st)$, $f_s(t) = f(ts)$, $\widetilde{f}(t) = f(t^{-1})$, $f^*(t) = \Delta_G(t^{-1})f(t^{-1})$, где Δ_G — модулярная функция.

2. Топологически левоусредняемые функции

Левый банахов $L_1(G)$-модуль M называется аменабельным, если множество всех $x \in M$, удовлетворяющих условию $\inf\{\|\varphi x\| : \varphi \in P(G)\} = 0$, замкнуто относительно сложения (свойство Эмерсона [5]). Произвольный левый банахов $L_1(G)$-модуль M содержит наибольший аменабельный подмодуль AM, который называется компонентой аменабельности в M. Наконец, модуль $\mathcal{L}_M(G)$ определяется как замкнутый подмодуль в $L_\infty(G)$, порожденный функциями $x \circ F$, $\overline{x \circ F}$ ($x \in M$, $F \in M^*$), где функция $x \circ F$ определена равенством $\langle \varphi, x \circ F\rangle = \langle \varphi^* x, F\rangle$ ($\varphi \in L_1(G)$).

Значение последнего определения заключается в том, что аменабельность M эквивалентна аменабельности $\mathcal{L}_M(G)$, а также эквивалентна существованию топологически левоинвариантного на $\mathcal{L}_M(G)$ среднего (функционал $\Phi \in L_\infty(G)^*$ называется топологически левоинвариантным на $X \subset L_\infty(G)$ средним, если 1) $\Phi \geq 0$; 2) $\|\Phi\| = 1$; 3) $\langle \varphi * f, \Phi\rangle = \langle f, \Phi\rangle$ для всех $f \in X$, $\varphi \in P(G)$) [1].

Функция $f \in L_\infty(G)$ называется топологически левоусредняемой к постоянной c, если замыкание множества $P(G) * f = \{\varphi * f : \varphi \in P(G)\}$ содержит функцию $c1_G$ ($1_G(t) \equiv t$).

Пусть $f \in L_\infty(G)$. Обозначим через T_f замкнутое линейное подпространство в $L_\infty(G)$, порожденное функциями f и $\varphi * f$ ($\varphi \in L_1(G)$). Будем говорить, что функция f имеет единственное топологически левоинвариантное среднее значение, если множество топологически левоинвариантных на T_f средних не пусто, причем все такие средние принимают в f одно и то же значение.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in L_\infty(G)$, тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *функция f принадлежит $AL_\infty(G)$ и топологически левоусредняема к постоянной c*;

Работа поддержана Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию (грант № 216424).

2) *для каждого* $\varphi \in P(G)$ *свертка* $\varphi * f$ *топологически левоусредняема к единственной постоянной* c *(не зависящей от* φ*);*
3) *функция* f *принадлежит* $AL_\infty(G)$ *и имеет единственное топологически левоинвариантное среднее значение* c*;*
4) *для каждого среднего* $F \in L_\infty(G)^*$ *функция* $f \circ F$ *имеет единственное топологически левоинвариантное среднее значение* c *(не зависящее от* F*).*

Доказательство. Эквивалентность условий 1)–4) достаточно установить для случая $c = 0$.

2) $\Longrightarrow$ 1), 1) $\Longrightarrow$ 4). Очевидно.

4) $\Longrightarrow$ 3). Каждому конечному подмножеству $X \subset \mathcal{L}_{T_f}(G)$ и $\varepsilon > 0$ сопоставим среднее $\Phi_{X,\varepsilon}$ такое, что $|\{\Phi_{X,\varepsilon}(g)\}| < \varepsilon$ для всех $g \in X$. Пусть Φ — предельная точка сети $\{\Phi_{X,\varepsilon}\}$ в w^*-топологии. Тогда $\Phi(g) = 0$ для всех $g \in \mathcal{L}_{T_f}(G)$, следовательно, модуль T_f аменабелен и, в частности, $f \in AL_\infty(G)$.

Пусть $\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$ — аппроксимативная единица для $L_1(G)$, $I \in L_\infty(G)^*$ — предельная точка сети $\{\varphi_\alpha\}$ в w^*-топологии. Тогда $f = f \circ I$, следовательно, функция f имеет единственное топологически левоинвариантное среднее значение 0.

3) $\Longrightarrow$ 2). Фиксируем среднее Φ, а также топологически левоинвариантное на $AL_\infty(G)$ среднее Ψ. Определим топологически левоинвариантное на $AL_\infty(G)$ среднее $\Phi \circ \Psi$ равенством $\langle g, \Phi \circ \Psi \rangle = \langle g \circ \Phi, \Psi \rangle$ $(g \in L_\infty(G))$. Пусть $\Psi = w^* - \lim\limits_\beta \psi_\beta$, где $\psi_\beta \in P(G)$. Тогда для любого $\varphi \in P(G)$

$$\lim_\beta \langle \psi_\beta^* * \varphi * f, \Phi \rangle = \langle \varphi * f, \Phi \circ \Psi \rangle = \langle f, \Phi \circ \Psi \rangle = 0,$$

откуда $w - \lim\limits_\beta \psi_\beta^* * \varphi * f = 0$. Далее рассуждаем, как в ([6], сс. 48, 49). $\square$

Подмодуль $M \subset L_\infty(G)$ называется топологически левоинтровертным, если $x \circ F \in M$ для всех $x \in M$, $F \in M^*$. Очевидно, множество всех функций, удовлетворяющих условиям 1)–4) теоремы 2.1, является топологически левоинтровертным подмодулем в $AL_\infty(G)$. Заметим также, что в случае $c = 0$ требование единственности в условии 2) выполняется автоматически и может быть опущено.

Пример. Любая слабо почти периодическая функция на G принадлежит $AL_\infty(G)$ ([1], пример 2.3) и имеет единственное топологически левоинвариантное среднее значение ([7], с.86), следовательно, удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Пусть теперь модуль M таков, что для каждого $x \in M$ множество $P(G)x$ является относительно компактным в w-топологии. Тогда для любых $x \in M$, $F \in M^*$ множество функций $P(G) * (x \circ F)$ также относительно компактно в w-топологии и, следовательно, состоит из слабо почти периодических функций ([8], теорема 4). Таким образом, функции из $\mathcal{L}_M(G)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1.

Следствие 2.1. Для произвольного левого банахова $L_1(G)$-модуля M следующие условия эквивалентны:

1) найдется сеть $\{\varphi_\alpha\} \subset P(G)$ такая, что $\lim\limits_\alpha \|\varphi_\alpha x\| = 0$, $x \in M$;
2) каждая функция из $\mathcal{L}_M(G)$ топологически левоусредняема к нулю.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Очевидно.

2) $\Longrightarrow$ 1). По теореме 2.1 модуль $\mathcal{L}_M(G)$ аменабелен, следовательно, найдется среднее Φ такое, что $\Phi(f) = 0$, $f \in \mathcal{L}_M(G)$. Пусть $\Phi = w^* - \lim\limits_\beta \varphi_\beta$, $\varphi_\beta \in P(G)$. Тогда $w - \lim\limits_\beta \varphi_\beta^* x = 0$ для всех $x \in M$. Рассуждая, как в ([6], сс. 48, 49), убедимся в выполнении условия 1). $\square$

3. Ядро компоненты аменабельности и функциональные модули

Назовем ядром компоненты аменабельности в $L_\infty(G)$ множество $\mathcal{K}(G)$ функций $f \in L_\infty(G)$ таких, что свертка $\varphi * |f|$ топологически левоусредняема к нулю для любого $\varphi \in P(G)$. Из теоремы 2.1 следует, что $\mathcal{K}(G)$ является замкнутым подмодулем в $AL_\infty(G)$.

Теорема 3.1. *Пусть группа G не является аменабельной и $f \in L_\infty(G)$. Тогда функция f принадлежит $\mathcal{K}(G)$ в том и только том случае, когда любая функция $g \in L_\infty(G)$, удовлетворяющая условию $0 \le g \le |f|$, принадлежит $AL_\infty(G)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{K}(G)$ и $0 \le g \le |f|$. Так как $\varphi * g \le \varphi * |f|$, $\varphi \in P(G)$, то функция g удовлетворяет условиям теоремы 2.1. В частности, $g \in AL_\infty(G)$.

Предположим теперь, что любая функция $g \in L_\infty(G)$, удовлетворяющая условию $0 \le g \le |f|$, принадлежит $AL_\infty(G)$. Очевидно, $|f| \in AL_\infty(G)$. Предположим, что $\Phi(|f|) > 0$ для некоторого топологически левоинвариантного на $AL_\infty(G)$ среднего Φ. Определим отображение $\Phi_0 : RUC(G)_+ \to \mathbb{R}_+$ равенством $\Phi_0(h) = \sup\{\Phi(g) : g \in ARUC(G),\ \ 0 \le g \le h\}$. Продолжая Φ_0 линейно на $RUC(G)$, получим ненулевой топологически левоинвариантный на $RUC(G)$ функционал. Однако существование такого функционала противоречит предположению о неаменабельности G. $\square$

Теорема 3.2. *Ядро $\mathcal{K}(G)$ является топологически левоинтровертным подмодулем в $L_\infty(G)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{K}(G)$, $\Phi \in L_\infty(G)^*$ — среднее и Ψ — топологически левоинвариантное на $AL_\infty(G)$ среднее. Тогда $|f| \circ \Phi \in AL_\infty(G)$ и т.к. $\Phi \circ \Psi$ — топологически левоинвариантное на $AL_\infty(G)$ среднее, то $\langle |f| \circ \Phi, \Psi\rangle = \langle |f|, \Phi \circ \Psi\rangle = 0$. По теореме 2.1 $|f| \circ \Phi \in \mathcal{K}(G)$. Из неравенства $|f \circ \Phi| \le |f| \circ \Phi$ и теоремы 3.1 следует, что $f \circ \Phi \in \mathcal{K}(G)$. $\square$

Покажем теперь, как ядро компоненты аменабельности в $L_\infty(G)$ может быть использовано для выяснения вопроса об аменабельности функциональных G-модулей. В оставшейся части статьи в целях простоты предполагается, что группа G является σ-компактной.

Обозначим через $\mathcal{L}(G)$ множество всех λ_G-измеримых комплекснозначных функций. При этом функции, совпадающие почти всюду, отождествляются. Отображение $\rho : \mathcal{L}(G) \to [0,\infty]$ называется функциональной нормой на $\mathcal{L}(G)$, если выполнены следующие условия: 1) $\rho(f) = 0$ в том и только том случае, когда $f = 0$; 2) $\rho(\alpha f) = |\alpha|\rho(f)$; 3) $\rho(f+g) \le \rho(f) + \rho(g)$; 4) $|f| \le |g|$ влечет $\rho(f) \le \rho(g)$. Функциональная норма ρ определяет нормированное линейное пространство $L_\rho(G) = \{f : \rho(f) < \infty\}$, называемое нормированным функциональным пространством (или нормированным идеальным пространством).

Функциональная норма ρ называется абсолютно непрерывной, если из условия $f_k \downarrow 0$, $f_k \in L_\rho(G)$, $k = 1, 2, \dots$, следует $\rho(f_k) \downarrow 0$.

Определим ассоциированную норму $\rho'(g) = \sup\Big\{\int\limits_G |fg| d\lambda_G : \rho(f) \le 1\Big\}$. Если норма ρ абсолютно непрерывна, то нормируемое пространство $L_{\rho'}(G)$ является сопряженным к $L_\rho(G)$ с двойственностью $\langle f, g\rangle = \int\limits_G fg\, d\lambda_G$.

Пусть ρ — функциональная норма на $\mathcal{L}(G)$. Нормированное пространство $L_\rho(G)$ будем называть банаховым функциональным G-модулем, если $L_\rho(G)$ полно, $\rho({}_sf) = \rho(f)$ и $f_s \in L_\rho(G)$ для всех $f \in L_\rho(G)$, $s \in G$. Отметим следующие свойства банахова функционального G-модуля $L_\rho(G)$ с абсолютно непрерывной нормой ρ:

1) функция $\omega_\rho(s) = \sup\{\rho(f_s) : \rho(f) \le 1\}$, $s \in G$, полунепрерывна снизу и локально ограничена;
2) $\varphi * f \in L_\rho(G)$ и $\rho(\varphi * f) \le \|\varphi\|_1 \rho(f)$ для всех $\varphi \in L_1(G)$, $f \in L_\rho(G)$;
3) $f * \varphi \in L_\rho(G)$ и $\rho(f * \varphi) \le \|\widetilde{\omega}_\rho \widetilde{\Delta}_G \varphi\|_1 \rho(f)$ для всех функций $\varphi \in L_1(G)$ с компактным носителем и всех $f \in L_\rho(G)$;
4) множество $C_{00}(G)$ плотно в $L_\rho(G)$ ([9], теорема 3).

Примем обозначение $\mathcal{L}_\rho(G) = \mathcal{L}_{L_\rho(G)}(G)$.

Теорема 3.3. *Пусть $L_\rho(G)$ — банахов функциональный G-модуль с абсолютно непрерывной нормой ρ. Тогда*

1) $\mathcal{L}_\rho(G) \subset RUC(G)$;
2) *если* $f \in \mathcal{L}_\rho(G)$, $g \in RUC(G)$ *и* $0 \le g \le |f|$, *то* $g \in \mathcal{L}_\rho(G)$;
3) $\mathcal{L}_\rho(G) = RUC(G)$ *в том и только том случае, когда* $L_\infty(G) \subset L_{\rho'}(G)$ *(или, эквивалентно,* $L_\rho(G) \subset L_1(G)$*)*;
4) *если* $\mathcal{L}_\rho(G) \ne RUC(G)$, *то* $\mathcal{L}_\rho(G) \subset \mathcal{K}(G)$.

Доказательство. 1), 2) Так как $f \circ F = f * \widetilde{F}$ для всех $f \in L_\rho(G)$, $F \in L_{\rho'}(G)$, то $\mathcal{L}_\rho(G)$ совпадает с замкнутым линейным подпространством в $L_\infty(G)$, порожденным множеством $C_{00}(G) * L_{\rho'}(G)^\sim$. Но

$$C_{00}(G) * L_{\rho'}(G)^\sim \subset L_{\rho'}(G)^\sim \cap \mathrm{Cl}\{C_{00}(G) * (C_{00}(G) * L_{\rho'}(G)^\sim)\} \subset \\ \subset L_{\rho'}(G)^\sim \cap RUC(G) \subset \mathrm{Cl}\{C_{00}(G) * L_{\rho'}(G)^\sim\},$$

следовательно,

$$\mathcal{L}_\rho(G) = \mathrm{Cl}\{L_{\rho'}(G)^\sim \cap RUC(G)\}. \tag{1}$$

Утверждения 1), 2) теперь очевидны.

3) В соответствии с (1) равенство $\mathcal{L}_\rho(G) = RUC(G)$ эквивалентно тому, что $1_G \in L_{\rho'}(G)$. Но последнее условие означает, что $L_\infty(G) \subset L_{\rho'}(G)$.

4) Так как $\mathcal{L}_\rho(G) \subsetneqq RUC(G)$, то $1_G \notin \mathcal{L}_\rho(G)$. Следовательно, существует функционал $\Phi_0 \in L_\infty(G)^*$ такой, что $\Phi_0(1_G) = 1$, $\Phi_0(f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{L}_\rho(G)$ и $\|\Phi_0\| = 1$. Так как Φ_0 является топологически левоинвариантным на $\mathcal{L}_\rho(G)$ средним, то $\mathcal{L}_\rho(G)$ — аменабельный модуль.

Для любого топологически левоинвариантного на $\mathcal{L}_\rho(G)$ среднего Φ и любой функции $f \in \mathcal{L}_\rho(G)$ имеем $\langle \varphi, |f| \circ \Phi \rangle = \langle \varphi^* * |f|, \Phi \rangle = \Phi(|f|)$, $\varphi \in P(G)$. Следовательно, $\Phi(|f|)1_G = |f| \circ \Phi \in \mathcal{L}_\rho(G)$, откуда $\Phi(|f|) = 0$. □

Следствие 3.1. Пусть $L_\rho(G)$ — банахов функциональный G-модуль с абсолютно непрерывной нормой ρ. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) модуль $L_\rho(G)$ аменабелен;
2) либо группа G аменабельна, либо $\mathcal{L}_\rho(G) \subset \mathcal{K}(G)$.

4. Модули со смешанной L_p-нормой

Пусть N_1 — замкнутая нормальная подгруппа в G, f — измеримая функция на G. Обозначим через X множество всех $t \in G$ таких, что функция $t_1 \mapsto f(tt_1)$, $t_1 \in N_1$, является λ_{N_1}-измеримой. Тогда 1) если $t \in X$, то $tN_1 \subset X$ и величина $\int\limits_{N_1} |f(t't_1)| d\lambda_{N_1}(t_1)$ не зависит от выбора $t' \in tN_1$; 2) функция $tN_1 \mapsto \int\limits_{N_1} |f(tt_1)| d\lambda_{N_1}(t_1)$ является λ_{G/N_1}-измеримой. Отсюда вытекает корректность следующего определения.

Пусть $\Gamma : \{e\} = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{n+1} = G$ — конечный возрастающий ряд замкнутых нормальных подгрупп, $P = (p_0, \ldots, p_n) \in [1, \infty)^{n+1}$. Произвольной измеримой на G функции f сопоставим величину

$$\|f\|_P = \left(\int_{G/N_n} \cdots \left(\int_{N_2/N_1} \left(\int_{N_1} |f(t_{n+1} \cdots t_2 t_1)|^{p_0} d\lambda_{N_1}(t_1) \right)^{p_1/p_0} d\lambda_{N_2/N_1}(t_2 N_1) \right)^{p_2/p_1} \cdots \\ \cdots d\lambda_{G/N_n}(t_{n+1} N_n) \right)^{1/p_n}.$$

Если некоторые из величин p_i равны ∞, в определение $\|f\|_P$ необходимо внести соответствующие изменения.

Обозначим через $L_P(\Gamma)$ множество всех λ_G-измеримых функций f, удовлетворяющих условию $\|f\|_P < \infty$. Тогда $L_P(\Gamma)$ является банаховым функциональным G-модулем, причем

$$\|f_s\|_P = \Delta_G(s)^{-1/p_0}\Delta_{G/N_1}(sN_1)^{1/p_0-1/p_1}\cdots\Delta_{G/N_n}(sN_n)^{1/p_{n-1}-1/p_n}\|f\|_P.$$

Общие свойства таких модулей изучались в [10].

В случае $P \in [1,\infty)^{n+1}$ справедливы следующие утверждения: 1) норма $\|\cdot\|_P$ абсолютно непрерывна ([11], теорема 3.1); 2) $L_P(\Gamma)^* = L_{P'}(\Gamma)$, где $P' = (p'_0,\dots,p'_n)$, $p_i^{-1} + p_i'^{-1} = 1$ ([11], теорема 2.2).

Введем обозначение $\mathcal{L}_P(\Gamma) = \mathcal{L}_{L_P(\Gamma)}(G)$.

Теорема 4.1. *Пусть $P = [1,\infty)^{n+1}$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *модуль $L_P(\Gamma)$ аменабелен;*
2) *либо группа G аменабельна, либо для некоторого i фактор-группа N_{i+1}/N_i не является компактной и $p_i > 1$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 3.3. $\mathcal{L}_P(\Gamma) \subset \mathcal{K}(G)$ в том и только том случае, когда $1_G \notin L_{P'}(\Gamma)$. Последнее условие эквивалентно тому, что для некоторого i фактор-группа N_{i+1}/N_i не является компактной и $p_i > 1$. Осталось применить следствие 3.1. □

При доказательстве теоремы 4.1 было отмечено, что $\mathcal{L}_P(\Gamma) \subset \mathcal{K}(G)$ в том и только том случае, когда для некоторого i фактор-группа N_{i+1}/N_i не компактна и $p_i > 1$. Этот факт можно использовать для изучения ядра $\mathcal{K}(G)$. Ограничимся наиболее простым случаем дискретной группы G.

Пусть $f \in L_\infty(G)$. Определим функции $f^{(i)} \in L_\infty(N_{i+1}/N_i)$, $i = 0,\dots,n$, равенством $f^{(i)}(tN_i) = \|f(t\,\cdot)\|_{L_\infty(N_i)}$, $t \in N_{i+1}$. Для произвольного $\Omega \subset \{0,\dots,n\}$ обозначим через $C_{00}(\Gamma,\Omega)$ множество функций $f \in L_\infty(G)$ таких, что $\sup\limits_{s\in G} \operatorname{card}\operatorname{supp}({}_sf)^{(i)} < \infty$, $i \in \Omega$. Пусть $C_0(\Gamma,\Omega)$ — замыкание множества $C_{00}(\Gamma,\Omega)$ в $L_\infty(G)$.

Теорема 4.2. *Пусть G — дискретная группа, $P \in [1,\infty)^{n+1}$ и $\Omega = \{i : p_i > 1\}$. Тогда $\mathcal{L}_P(\Gamma) = C_0(\Gamma,\Omega)$.*

Доказательство. Так как $C_{00}(\Gamma,\Omega) \subset L_{P'}(\Gamma) \subset C_0(\Gamma,\Omega)$ и $C_{00}(\Gamma,\Omega) = C_{00}(\Gamma,\Omega)^\sim$, то замыкание множества $L_{P'}(\Gamma)^\sim$ в $L_\infty(\Gamma)$ совпадает с $C_0(\Gamma,\Omega)$. Осталось применить равенство (1). □

Следствие 4.1. Пусть G — дискретная группа, и подмножество Ω таково, что хотя бы для одного $i \in \Omega$ фактор-группа N_{i+1}/N_i бесконечна. Тогда $C_0(\Gamma,\Omega) \subset \mathcal{K}(G)$.

Доказательство. Выберем $P = (p_0,\dots,p_n)$ таким образом, чтобы $p_i > 1$, $i \in \Omega$, и $p_i = 1$, $i \in \{0,\dots,n\} \setminus \Omega$. Тогда $\mathcal{L}_P(\Gamma) \subset \mathcal{K}(G)$. Осталось применить теорему 4.2. □

Предыдущее утверждение указывает на существование связи между ядром компоненты аменабельности и решеткой замкнутых нормальных подгрупп.

Проблема. Совпадает ли ядро $\mathcal{K}(G)$ с наименьшим замкнутым подпространством в $L_\infty(G)$, содержащим все подмножества $C_0(\Gamma,\Omega)$ указанного вида?

Литература

1. Мясников А.Г. *Аменабельные банаховы $L_1(G)$-модули, инвариантные средние и регулярность в смысле Аренса* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 2. – С. 72–80.
2. Rosenblatt J., Yang Z. *Functions with a unique mean value* // Math. J. Illinois. – 1990. – V. 34. – № 4. – P. 744–764.
3. Miao T. *Amenability of locally compact groups and subspaces of $L^\infty(G)$* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 111. – № 4. – P. 1075–1084.
4. Miao T. *The existence of left averaging functions that are not right averaging* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – V. 115. – № 1. – P. 121–123.

5. Emerson W.R. *Characterizations of amenable groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – V. 241. – P. 183–194.
6. Pier J.-P. *Amenable locally compact groups.* – New York: Wiley, 1984. – 418 p.
7. Paterson A.L.T. *Amenability.* – Providence, R. I.: AMS, 1988. – 452 p.
8. Ulger A. *Continuity of weakly almost periodic functionals on* $L^1(G)$ // Quart J. Math. – 1986. – V. 37. – № 148. – P. 495–497.
9. Мясников А.Г. *Об абсолютной непрерывности норм в банаховых идеальных пространствах со сдвигами* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 3. – С. 78–80.
10. Мясников А.Г., Черных С.И. *О пространствах* L_P *со смешанной нормой на локально компактных группах* // Функц. анализ и его прилож. – 1985. – Т. 19. – № 3. – С. 73–74.
11. Мясников А.Г. *О смешанных нормах и абсолютно непрерывных нормах* // 1988. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.06.88, № 4830-В88.

Московский государственный строительный университет

Поступила 27.01.1995