ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.983

В.А. НОГИН, К.С. ШЕВЧЕНКО

ОБРАЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В НЕЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В работе рассматриваются операторы типа потенциала

$$(K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi)(x)=\int_{R^n}\frac{(at')}{|t|^{n-\alpha}}e^{i\gamma|t|}\varphi(x-t)dt,\quad 0<\alpha<n,\quad \gamma>0, \tag{1}$$

$t'=t/|t|$, с символами

$$m^{\alpha}_{a,\gamma}(\xi)=\pi^{n/2}i(a\xi)M^{\alpha}_{\gamma}(|\xi|^2), \tag{2}$$

где

$$M^{\alpha}_{\gamma}(z)=\frac{i^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\gamma^{\alpha+1}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}F\Big(\frac{\alpha+1}{2},\ \frac{\alpha+2}{2};\ \frac{n}{2}+1;\ \frac{z}{\gamma^2}\Big)\quad \text{при}\ \ z<\gamma^2,$$

$$M^{\alpha}_{\gamma}(z)=\frac{2^{\alpha}}{z^{(\alpha+1)/2}}\Bigg[\frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{1+n-\alpha}{2})}F\Big(\frac{\alpha+1}{2},\ \frac{\alpha+1-n}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\gamma^2}{z}\Big)+ + \frac{2i\gamma}{\sqrt{z}}\frac{\Gamma(\frac{\alpha+2}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}F\Big(\frac{\alpha+2}{2},\ \frac{2+\alpha-n}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{\gamma^2}{z}\Big)\Bigg]\quad \text{при}\ \ z>\gamma^2,$$

$F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Строится обращение потенциалов $K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi$ с плотностями $\varphi(x)\in L_p(R^n)$ методом аппроксимативных обратных операторов (АОО).

Поясним интерес, проявляемый нами к задаче обращения потенциалов (1). В настоящее время имеется много работ по обращению операторов типа потенциала

$$(K^{\alpha}_{\theta}\varphi)(x)=\int_{R^n}\frac{\theta(t)}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)dt,\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<n, \tag{3}$$

с гладкими характеристиками $\theta(t)$ в эллиптическом и неэллиптическом случаях([1]–[3]). Основные трудности при обращении операторов (3) возникают в неэллиптическом случае, когда символ

$$K^{\alpha}_{\theta}(\xi)=F\Big[\frac{\theta(t)}{|t|^{n-\alpha}}\Big](\xi)$$

потенциала (3) вырождается на том или ином множестве в R^n. Наиболее общий результат в этом направлении был получен в работах [4], [5] (см. также [3]), где методом АОО была построена общая схема обращения потенциалов $K^{\alpha}_{\theta}\varphi$ с L_p-плотностями в случае вырождения их символов на произвольном множестве меры нуль в R^n. Трудной для построения обращения является также ситуация, в которой символ $K^{\alpha}_{\theta}(\xi)$ потенциала (3) имеет особенности на том или ином множестве в R^n. Обращение таких потенциалов строилось в [6]–[8] (см. также [3]).

Ситуация, в которой символ потенциала (3) одновременно имеет особенности и вырождается на некотором множестве в R^n, более трудная для построения обращения (по сравнению с

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-01-00098-а).

описанными выше), ранее не рассматривалась. Такая ситуация, когда символ $m^{\alpha}_{a,\gamma}(\xi)$ (2) вырождается на гиперплоскости $a\xi = 0$ и имеет особенности (при $\alpha \geq \frac{n-1}{2}$) на сфере $|\xi| = \gamma$, рассматривается в данной работе. Заметим, что построение обращения операторов (1) связано с преодолением существенных трудностей принципиального характера, обусловленных тем, что до сих пор неизвестно, плотен ли в L_p, $1 \leq p < 2$, инвариантный для оператора (1) класс Φ_V Лизоркина–Самко, построенный по сфере $V = \{x \in R^n : |x| = \gamma\}$ (класс Φ_V состоит из шварцевых функций, преобразования Фурье которых исчезают вместе со всеми своими производными на множестве V).

Заметим также, что некоторые результаты по обращению операторов типа потенциала методом АОО, применяемым в данной работе, изложены в обзорной статье [3].

1. Преобразование Фурье потенциала $K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi$ и инвариантное пространство

Пусть Φ_V — упомянутый выше класс Лизоркина–Самко, построенный по сфере $V = \{x \in R^n : |x| = \gamma\}$ (пространства Φ_V, построенные по произвольному замкнутому множеству $V \subset R^n$, исследовались в [9]–[11] (см. также [1], [3])).

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$F[K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi](\xi) = m^{\alpha}_{a,\gamma}(\xi)F[\varphi](\xi), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < n, \quad \varphi \in \Phi_V.$$

Кроме того, класс Φ_V инвариантен для оператора $K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi$: $K^{\gamma}_{\alpha,a}(\Phi_V) = \Phi_V$.

2. Обращение потенциалов $K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi$ с L_p-плотностями

Формально обратный к (1) оператор в соответствии с (2) можно записать в виде

$$(K^{\gamma}_{\alpha,a})^{-1}f = F^{-1}[1/m^{\alpha}_{a,\gamma}(\xi)] * f. \tag{4}$$

Функция $1/m^{\alpha}_{a,\gamma}(\xi)$ обращается в бесконечность на гиперплоскости $a\xi = 0$. Кроме того, ее производные имеют особенности на сфере $|\xi| = \gamma$. Эти обстоятельства вносят существенные трудности в реализацию свертки (4).

Поступим следующим образом. Положим

$$g^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon}(t) = F^{-1}\left[\frac{e^{-\varepsilon|\xi|^2}(|\xi|^2-\gamma^2)^l}{\pi^{n/2}iM^{\alpha}_{\gamma}(|\xi|^2)(a\xi+i\varepsilon)(|\xi|^2+\gamma^2(\varepsilon+i)^2)^l}\right](t),$$

$\varepsilon > 0$, $l > n - 1 + n\frac{n+1}{2}$. Тогда $g^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon}(t) \in L_1(R^n)$, если $0 < \alpha < 1$ или $n-2 \leq \alpha < n$. Этот факт следует из того, что функция $F[g^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon}](\xi)$ принадлежит винеровскому кольцу $R^0(R^n)$ преобразований Фурье суммируемых функций. Последнее проверяется с помощью леммы 5.1 из [1] с учетом условий эллиптичности

$$\inf_{|\xi|<\gamma}|M^{\alpha}_{\gamma}(|\xi|^2)| \neq 0, \quad \inf_{|\xi|>\gamma}|\xi|^{\alpha+1}|M^{\alpha}_{\gamma}(|\xi|^2)| \neq 0. \tag{5}$$

Второе из неравенств (5) удалось доказать при $0 < \alpha < 1$ или при $n - 2 \leq \alpha < n$. Этим вызваны указанные выше ограничения на α. Пусть далее $(T^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon}f)(x) = (g^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon} * f)(x)$. Обратный к (1) оператор будем строить в виде

$$(T^{\gamma}_{\alpha,a}f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon}f)(x). \tag{6}$$

Основной результат статьи составляет

Теорема 2. *Пусть при $0 < \alpha < 1$ или $n - 2 \leq \alpha < n$ выполняется условие $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 < p < \min\{\frac{2n}{n-1}, \frac{n}{\alpha}\}$. Тогда справедливо соотношение*

$$(T^{\gamma}_{\alpha,a}K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi)(x) = \varphi(x),$$

где $T^{\gamma}_{\alpha,a}$ — оператор (6); предел в (6) понимается в смысле “почти всюду” или по норме пространства $L_p + L_r$, где $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $\frac{1}{q} < \frac{n+1}{2n}$ выбирается так, чтобы $0 \leq 1/r \leq 1$.

Доказательство теоремы основано на представлении

$$(T^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon}K^{\gamma}_{\alpha,a}\varphi)(x) = (W_\varepsilon\varphi)(x) + \sum_{k=1}^{l} C^l_k(-\varepsilon\gamma^2(2i+\varepsilon))^k(\gamma(\varepsilon+i))^{l-2k}(G_{2k}(\gamma(\varepsilon+i)|t|) * W_\varepsilon\varphi)(x) -$$
$$- (W_\varepsilon H_\varepsilon\varphi)(x) - \sum_{k=1}^{l} C^l_k(-\varepsilon\gamma^2(2i+\varepsilon))^k(\gamma(\varepsilon+i))^{l-2k}(G_{2k}(\gamma(\varepsilon+i)|t|) * W_\varepsilon H_\varepsilon\varphi)(x), \quad (7)$$

где $W_\varepsilon\varphi$ — интеграл Гаусса–Вейерштрасса, $(H_\varepsilon\varphi)(x) = \varepsilon\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t}\varphi(x-at)dt$, $z^{n-\alpha}G_\alpha(z|t|) = \frac{2^{(2-n-\alpha)/2}}{\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}\left(\frac{1}{z|t|}\right)^{(n-\alpha)/2}K_{(n-\alpha)/2}(z|t|)$, $|\arg z|\le\pi$,— модифицированное бесселево ядро. Представление (7) легко проверяется переходом к образам Фурье для $\varphi(x)\in\Phi_V$ с учетом теоремы 1. Однако распространение его на функции $\varphi(x)\in L_p$ неясно в силу того, что до сих пор неизвестно, плотен ли в L_p $(1\le p<2)$ класс Φ_V.

Доказательство проводится следующим образом. Вначале получается представление для композиции $(T^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon}K^{\gamma}_{\alpha,a,\delta}\varphi)(x)$, $\varphi(x)\in S$, где S — пространство Шварца быстро убывающих гладких функций,

$$(K^{\gamma}_{a,a,\delta}\varphi)(x) = \int_{R^n}\frac{(at')}{|t|^{n-\alpha}}e^{-(\delta-i\gamma)|t|}\varphi(x-t)dt, \quad \delta>0$$

(при этом существенно учитывается суммируемость ядра оператора $K^{\gamma}_{a,a,\delta}$), а затем предельным переходом при $\delta\to0$ из этого представления получается (7) для $\varphi(x)\in S$. Далее представление (7) распространяется по ограниченности на функции $\varphi(x)\in L_p$ (с учетом плотности класса S в L_p).

Замечание. Ограничения $0<\alpha<1$ или $n-2\le\alpha<n$ в теореме 2 вызваны тем, что для остальных α не удалось решить вопрос о нулях функции $M^{\alpha}_{\gamma}(|\xi|^2)$. Однако это обстоятельство не является препятствием для построения обращения потенциалов (1). Это обращение для любого α, $0<\operatorname{Re}\alpha<n$, можно построить в более громоздком (по сравнению с (9)) виде

$$(K^{\gamma}_{\alpha,a})^{-1}f = \overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to0}}\,\overset{(L_2)}{\lim_{\delta\to0}}H^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon,\delta}f,$$

где

$$(H^{\gamma}_{\alpha,a,\varepsilon,\delta}f)(x) = F^{-1}\left[\frac{\overline{m^{\alpha}_{a,\gamma}}(\xi)e^{-\varepsilon|\xi|^2}(|\xi|^2-\gamma^2)^l}{(|m^{\alpha}_{a,\gamma}(\xi)|^2+i\delta)(|\xi|^2+\gamma^2(\varepsilon+i)^2)^l}\right]*f(x),$$

предел по L_p-норме можно заменить пределом почти всюду.

Авторы благодарят профессора С.Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы.

Литература

1. Самко С.Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения.* – Ростов н/Д : Изд-во Ростовск. ун-та, 1984. – 208 с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск : Наука и техн., 1987. – 688 с.
3. Samko S.G. *Inversion theorems for potential-type integral transforms in R^n and on S^{n-1}* // Int. Transf. and Special Funct. – 1993. – V. 1. – № 2. – P. 145–163.
4. Заволженский М.М., Ногин В.А. *Аппроксимативный подход к обращению обобщенных потенциалов Рисса* // Докл. РАН. – 1992. – Т. 324. – № 4. – С. 738–741.
5. Заволженский М.М. *Обращение обобщенных потенциалов Рисса в неэллиптическом случае.* – Ростовск. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1992. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.07.92, № 2495-В92.
6. Заволженский М.М., Ногин В.А. *Об одном методе обращения операторов типа потенциала.* – Ростовск. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1991. – 81 с. – Деп. в ВИНИТИ 06.03.91, № 978-В91.

7. Rubin B.S. *One sided potentials, the spaces $L^{\alpha}_{p,r}$ and the inversion of Riesz and Bessel potentials in the half-space* // Math. Nachr. – 1988. – Bd. 136. – S. 177–208.
8. Алисултанова Э.Д., Заволженский М.М., Ногин В.А. *Обращение потенциалов Рисса с осциллирующими характеристиками.* – Ростовск. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1992. – 23 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.12.91, № 191-В92.
9. Самко С.Г. *Об основных функциях, исчезающих на заданном множестве, и о делении на функции* // Матем. заметки. – 1977. – Т. 21. – № 5. – С. 677–689.
10. Самко С.Г. *О плотности в $L_p(R^n)$ пространств Φ_V типа Лизоркина* // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31. – № 6. – С. 855–865.
11. Samko S.G. *Denseness of the spaces Φ_V of Lizorkin type in the mixed $L^{\overline{p}}(R^n)$-spaces* // Stud. Math. – 1995. – № 3. – P. 199–210.

Ростовский государственный университет

Поступила 23.10.1997