ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 517.43

Р.И. КАДИЕВ (МЛАДШИЙ)

О СПЕКТРЕ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C^k(a,b)$ — линейное пространство скалярных комплекснозначных функций на (a,b), k раз непрерывно дифференцируемых, $L_2(a,b)$ — линейное пространство скалярных комплекснозначных функций на (a,b), модули которых суммируемы с квадратом, $n,m \in \mathbb{N}$ и фиксированы, $x_0 = -\infty$, $x_{m+n+1} = +\infty$.

Рассмотрим формальное дифференциальное выражение

$$(A_{m,n}f)(x) = -f''(x) + q(x)f(x) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \delta(x-x_k) f(x) + \sum_{k=m+1}^{m+n} \beta_{k-m} \delta'(x-x_k) f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

В этой формуле α_k $(k = 1,2,\dots,m = \overline{1,m})$, β_k $(k = \overline{1,n})$, x_k $(k = \overline{1,m+n})$ — вещественные числа, $q(x)$ — скалярная вещественнозначная неотрицательная функция на $(-\infty,+\infty)$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2) q(x)\,dx < \infty.$$

Кроме того, $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{m+n+1} < x_{m+n}$.

Рассмотрим уравнение

$$(A_{m,n}y)(x) = \lambda y(x), \quad x \in (-\infty,+\infty), \tag{1}$$

где λ — комплексное число.

Условимся считать решением этого уравнения всякую функцию $y(x,\lambda)$ на $(-\infty,+\infty)$, для которой выполнены условия

1) $y \in C^2(x_k, x_{k+1})$ для $x \in (x_k, x_{k+1})$ при $k = \overline{0, m+n}$,
2) $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$ для $x \in (x_k, x_{k+1})$ при $k = \overline{0, m+n}$,
3) $y(x_k+0) = y(x_k-0) = y(x_k)$, $y'(x_k+0) - y'(x_k-0) = \alpha_k y(x_k)$ при $k = \overline{1,m}$,
4) $y'(x_k+0) = y'(x_k-0) \equiv y'(x_k)$, $y(x_k+0) - y(x_k-0) = \beta_{k-m} y'(x_k)$ при $k = \overline{m+1, m+n}$.

В связи с важными приложениями к задачам квантовой механики [1] представляет интерес исследование спектральных характеристик оператора $A_{m,n}$.

Известно [2], что уравнение

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (-\infty,+\infty) \tag{2}$$

имеет два линейно независимых решения $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$, и любое решение этого уравнения $y(x,\lambda)$ имеет представление

$$y(x,\lambda) = C_1\varphi_1(x,\lambda) + C_2\varphi_2(x,\lambda),$$

где C_1, C_2 — некоторые числа, причем при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ или $\lambda < 0$

$$\int_{-\infty}^{0} |\varphi_1(x,\lambda)|^2 dx = \int_{0}^{+\infty} |\varphi_2(x,\lambda)|^2 dx = \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{0} |\varphi_2(x,\lambda)|^2 dx < \infty, \quad \int_{0}^{+\infty} |\varphi_1(x,\lambda)|^2 dx < \infty.$$

Тогда любое решение (1) можно записать в виде

$$y(x,\lambda)=\begin{cases}C_0(x)\varphi_1(x,\lambda)+C_1\varphi_2(x,\lambda), & \text{если } x\in(-\infty,x_1),\\ C_{2k}(x)\varphi_1(x,\lambda)+C_{2k+1}(x)\varphi_2(x,\lambda), & \text{если } x\in(x_k,x_{k+1})\ (k=\overline{1,m+n-1}),\\ C_{2(m+n)}(x)\varphi_1(x,\lambda)+C_{2(m+n)+1}(x)\varphi_2(x,\lambda), & \text{если } x\in(x_{m+n},+\infty),\end{cases}$$

где C_k $(k=\overline{0,2(n+n)+1})$ — некоторые постоянные числа такие, что для $y(x,\lambda)$ выполнены условия 3) и 4).

Определим оператор $\widehat{H}(m,n,q)$, порожденный в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty,+\infty)$ дифференциальным выражением $(A_{m,n}f)$. Областью определения оператора $\widehat{H}(m,n,q)$ является множество всех функций, принадлежащих $L^2(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющих условиям 1)–4). Это множество обозначим через $D(\widehat{H}(m,n,q))$. Будем считать, что спектральные характеристики оператора $\widehat{H}(m,n,)$ и уравнения (1) совпадают.

Обозначим через $\widehat{H}(0,0,q)$ оператор $\widehat{H}(m,n,q)$ в случае, когда

$$\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_n=0.$$

Лемма. *Оператор $\widehat{H}(m,n,q)$ симметричен.*

Доказательство. Пусть $f,g\in D(\widehat{H}(m,n,q))$. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}(\widehat{H}(m,n,q)f,g)&=(f,\widehat{H}(m,n,q)g)+\sum_{k=1}^{m}g(x_k)(f'(x_k+0)-f'(x_k-0))-\\ &-\sum_{k=1}^{m}f(x_k)(g'(x_k+0)-g'(x_k-0))+\sum_{k=m+1}^{m+n}f'(x_k)(g(x_k+0)-g(x_k-0))-\\ &-\sum_{k=m+1}^{m+n}g'(x_k)(f(x_k+0)-f(x_k-0))=(f,\widehat{H}(m,n,q)g)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k g(x_k)f(x_k)-\\ &-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k g(x_k)f(x_k)+\sum_{k=m+1}^{m+n}\beta_k g'(x_k)f'(x_k)-\sum_{k=m+1}^{m+n}\beta_{k-m}g'(x_k)f'(x_k)=(f,\widehat{H}(m,n,q)g).\quad\square\end{aligned}$$

Пусть $R_\lambda^{\langle m,n\rangle}$ — резольвента оператора $\widehat{H}(m,n,q)$, а R_λ — резольвента оператора $\widehat{H}(0,0,q)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *оператор $\widehat{H}(m,n,q)$ в существенном самосопряжен*;
2. *пусть $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, тогда $R_\lambda^{\langle m,n\rangle}-R_\lambda$ есть конечномерный оператор, ранг которого не превосходит $m+n$.*

Доказательство. Если резольвента $R_\lambda^{\langle m,n\rangle}$ оператора $\widehat{H}(m,n,q)$ существует при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, то, принимая во внимание симметричность оператора $\widehat{H}(m,n,q)$, убеждаемся в справедливости утверждения 1 теоремы.

Для доказательства утверждения 2 построим резольвенту оператора $\widehat{H}(m,n,q)$ при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Для этого решаем в $L^2(-\infty,+\infty)$ задачу

$$\begin{cases}-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x)+f(x),\ x\neq x_i\ (i=\overline{1,m+n}),\\ y(x_i+0)=y(x_i-0)=y(x_i),\\ y'(x_i+0)-y'(x_i-0)=\alpha_i y(x_i)\ (i=\overline{1,m}),\\ y'(x_i+0)=y'(x_i-0),\\ y(x_i+0)-y(x_i-0)=\beta_{i-m}y'(x_i)\ (i=\overline{m+1,m+n}),\end{cases}\tag{3}$$

где $f(x)$ — произвольная функция, принадлежащая $L^2(-\infty,+\infty)$.

Будем искать решение уравнения

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) + f(x),\ x \neq x_j\ (j = \overline{1, m+n}) \tag{4}$$

в виде

$$y(x,\lambda) = \begin{cases} C_0(x)\varphi_1(x,\lambda) + C_1\varphi_2(x,\lambda), & \text{если } x \in (-\infty, x_1), \\ C_{2k}(x)\varphi_1(x,\lambda) + C_{2k+1}(x)\varphi_2(x,\lambda), & \text{если } x \in (x_k, x_{k+1})\ (k = \overline{1, m+n-1}), \\ C_{2(m+n)}(x)\varphi_1(x,\lambda) + C_{2(m+n)+1}(x)\varphi_2(x,\lambda), & \text{если } x \in (x_{m+n}, +\infty), \end{cases}$$

где $\varphi_1(x,\lambda)$ и $\varphi_2(x,\lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (2), а $C_j(x)$ $(j = \overline{0, 2(m+n)+1})$ — неизвестные функции. Функции $C_j(x)$, $j = \overline{0, 2(m+n)+1}$, можно найти методом Лагранжа. Для нахождения функций $C_{2k}(x)$, $C_{2k+1}(x)$, $x \in (x_k, x_{k+1})$ $(k = \overline{1, m+n})$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} C'_{2k}(x)\varphi_1(x,\lambda) + C'_{2k+1}(x)\varphi_2(x,\lambda) = 0, \\ C'_{2k}(x)\varphi'_1(x,\lambda) + C'_{2k+1}(x)\varphi'_2(x,\lambda) = -f(x) \end{cases}$$

для $k = \overline{0, m+n}$. Отсюда получим

$$C'_{2k}(x) = \frac{\varphi_2(x,\lambda)f(x)}{W[\varphi_1\varphi_2]}, \qquad C'_{2k+1} = -\frac{\varphi_1(x,\lambda)f(x)}{W[\varphi_1\varphi_2]}$$

для $k = \overline{0, m+n}$, где

$$W[\varphi_1\varphi_2] = \varphi_1(x,\lambda)\varphi'_2(x,\lambda) - \varphi'_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda) \neq 0,$$

т. к. $\varphi_1(x,\lambda)$ и $\varphi_2(x,\lambda)$ — линейно независимые решения. Следовательно,

$$C_{2k}(x) = \frac{1}{W[\varphi_1\varphi_2]}\left(\int_{x_k}^{x} \varphi_2(t,\lambda)f(t)dt + b_{2k}\right),$$
$$C_{2k+1}(x) = -\frac{1}{W[\varphi_1\varphi_2]}\left(\int_{x}^{x_{k+1}} \varphi_1(t,\lambda)f(t)dt + b_{2k+1}\right),$$

$x \in (x_k, x_{k+1})$, где b_{2k}, b_{2k+1} — произвольные числа при $k = \overline{0, m+n}$. Заметим, что $x_0 = -\infty$, $x_{m+n+1} = +\infty$. Следовательно, решение уравнения (4) имеет вид

$$y(x,\lambda) = -\frac{1}{W[\varphi_1\varphi_2]}\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi_2(t,\lambda)f(t)dt + \varphi_1(x,\lambda)\int_{x}^{x_1} \varphi_2(t,\lambda)f(t)dt + \\ \qquad +b_0\varphi_1(x,\lambda) + b_1\varphi_2(x,\lambda), \quad -\infty < x < x_1; \\ \varphi_2(x,\lambda)\displaystyle\int_{x_k}^{x} \varphi_1(t,\lambda)f(t)dt + \varphi_1(x,\lambda)\int_{x}^{x_{k+1}} \varphi(t,\lambda)f(t)dt + \\ \qquad +b_{2k}\varphi_1(x,\lambda) + b_{2k+1}\varphi_2(x,\lambda), \quad x_k < x < x_{k+1} \quad (k = \overline{1, m+n+1}); \\ \varphi_2(x,\lambda)\displaystyle\int_{x_{m+n}}^{x} \varphi_1(t,\lambda)f(t)dt + \varphi_2(x,\lambda)\int_{x}^{\infty} \varphi_1(t,\lambda)f(t)dt + \\ \qquad +b_{2(m+n)}\varphi_1(x,\lambda) + b_{2(m+n)+1}\varphi_2(x,\lambda), \quad x_{m+n} < x < +\infty. \end{cases}$$

В силу условия $y(\cdot,\lambda) \in L^2(-\infty,+\infty)$, $\varphi_2(x,\lambda) \in L^2(-\infty,0)$ и $\varphi_1(x,\lambda) \in L^2(0,+\infty)$ получим $b_0 = b_{2(m+n)+1} = 0$. Тогда решение уравнения (4) принимает вид

$$y(x,\lambda) = -\frac{1}{W[\varphi_1\varphi_2]}\int_{-\infty}^{\infty} J(x,t,\lambda)f(t)dt -$$
$$-\frac{1}{W[\varphi_1\varphi_2]}\begin{cases} b_1\varphi_2(x,\lambda), & -\infty < x < x_1; \\ b_{2k}\varphi_1(x,\lambda) + b_{2k+1}\varphi_2(x,\lambda), & x_k < x < x_{k+1}\ (k = 1, m+n-1); \\ b_{2(m+n)}\varphi_1(x,\lambda), & x_{m+n} < x < +\infty, \end{cases}$$

где $J(t,x,\lambda)=\begin{cases}\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda), & t\le x;\\ \varphi_1(t,\lambda)\varphi_2(x,\lambda), & x\le t,\end{cases}$ а b_j $(j=\overline{1,2(m+n)})$ — произвольные числа.

Обозначим через $\varphi_{j,k}=\varphi_j(x_k,\lambda)$, $\varphi'_{j,k}=\varphi'_{j,k}(x_k,\lambda)$

$$Q_k(f)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}J(x_k,t,\lambda)f(t)dt \quad (k=\overline{1,m});\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}J'(x_k,t,\lambda)f(t)dt \quad (k=\overline{m+1,m+n}),\end{cases} \tag{5}$$

$$Z_k=\begin{cases}\alpha_k & (k=\overline{1,m});\\ \beta_{k-m} & (k=\overline{m+1,m+n}),\end{cases}$$

$D(\lambda)=\det(M_{m+n}(\lambda))$, где

$$M_{m_n}(\lambda)=$$

$$=\left[\begin{array}{ccccc}
-\varphi_{2,1} & \varphi_{1,1} & \varphi_{2,1} & & \\
-\varphi'_{2,1}-z_1\varphi_{2,1} & \varphi'_{1,1} & \varphi'_{2,1} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\varphi_{1,m} & -\varphi_{2,m} & & \varphi_{1,m} & \varphi_{2,m} \\
-\varphi'_{1,m}-z_m\varphi_{1,m} & -\varphi'_{2,m}-z_m\varphi_{2,m} & & \varphi'_{1,m} & \varphi'_{2,m} \\
-\varphi'_{1,m+1} & -\varphi'_{2,m+1} & & \varphi'_{1,m+1} & \varphi'_{2,m+1} \\
-\varphi_{1,m+1}-z_{m+1}\varphi'_{1,m+1} & -\varphi_{2,m+1}-z_{m+1}\varphi'_{2,m+1} & & \varphi_{1,m+1} & \varphi_{2,m+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\varphi'_{1,m+n} & -\varphi'_{2,m+n} & & \varphi'_{1,m+n} & \\
-\varphi_{1,m+n}-z_{m+n}\varphi'_{1,m+n} & -\varphi_{2,m+n}-z_{m+n}\varphi'_{2,m+n} & & \varphi_{1,m+n} &
\end{array}\right].$$

Тогда в силу условий задачи (3) получим для определения числа b_j систему $M_{m+n}(\lambda)B=ZQ$, где $B=\mathrm{col}(b_1,b_2,\dots,b_{2(m+n)})$, $ZQ=\mathrm{col}(0,Z_1Q_1,0,Z_2Q_2,\dots,0,Z_{m+n}Q_{m+n})$.

Определим множество $\Gamma=\{\lambda:\operatorname{Im}\lambda\ne 0,\ D(\lambda)=0\}$. При $\lambda\notin\Gamma$ имеем

$$b_j=\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{m+n}Z_kM_{m+n}^{2k,j}Q_k,$$

где $M_{m+n}^{i,j}$ — алгебраическое дополнение элемента m_{ij} матрицы $M_{m+n}(\lambda)=(m_{ij})_{2(m+n)\times 2(m+n)}$.

Если ввести обозначение

$$Y_k(x,\lambda)=\begin{cases}Z_1M_{m+n}^{2k,1}(\lambda)\varphi_2(x,\lambda), & x\in(-\infty,x_1);\\ Z_j[M_{m+n}^{2k,2j-2}(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)+M_{m+n}^{2k,2j-1}(\lambda)\varphi_2(x,\lambda)], & x\in(x_j,x_{j+1})\ (j=\overline{1,m+n-1});\\ Z_{m+n}M_{m+n}^{2k,2(m+n)}(\lambda)\varphi_1(x,\lambda), & x\in(x_{m+n},+\infty)\end{cases}$$

для $k=\overline{1,m+n}$, то решение задачи (3) принимает вид

$$(R_\lambda^{\langle m,n\rangle}f)(x)\equiv y(x,\lambda)=-\frac{1}{W[\varphi_1\varphi_2]}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}J(x,t,\lambda)f(t)dt+\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{m+n}Y_k(x,\lambda)Q_k(f)\Big], \tag{6}$$

где $Y_k(\cdot,\lambda)\in L^2(-\infty,\infty)$ $(k=\overline{1,m+n})$, $\operatorname{Im}\lambda\ne 0$, $\lambda\notin\Gamma$ и $Q_k(f)$ определено формулой (5).

Из выражения (6) следует конечномерность оператора $R_\lambda^{\langle m,n\rangle}-R_\lambda$, причем его ранг не превосходит $m+n$. $\square$

Поскольку оператор $\widehat{H}(m,n,q)$ самосопряжен, следовательно, его спектр вещественный.

Теорема 2. *Спектр оператора $\widehat{H}(m,n,q)$ состоит из абсолютно непрерывной части $S=[0,+\infty)$ и не более чем $m+n$ отрицательных собственных чисел λ_j $(j=\overline{1,m+n})$, которые определяются как отрицательные корни уравнения $D(\lambda)=0$.*

Доказательство. В силу условий

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)q(x)dx<\infty \quad \text{и} \quad q(x)\geq 0$$

спектр оператора $\widehat{H}(0,0,q)$ абсолютно непрерывен и совпадает с множеством $S=[0,+\infty)$. Так как оператор $R_\lambda^{\langle m,n\rangle}-R_\lambda$ конечномерный, то согласно известным результатам [3], [4] абсолютно непрерывная часть спектра оператора $\widehat{H}(m,n,q)$ совпадает с абсолютно непрерывной частью спектра оператора $\widehat{H}(0,0,q)$, т. е. с $S=[0,+\infty)$. Согласно [5] спектр оператора $\widehat{H}(m,n,q)$ может отличаться от спектра оператора $\widehat{H}(0,0,q)$ разве что на конечное число отрицательных собственных значений. Кроме того, число этих собственных значений не превосходит ранга оператора $R_\lambda^{\langle m,n\rangle}-R_\lambda$, т. е. числа $m+n$. $\square$

Пусть $\lambda_0<0$ — нуль функции $D(\lambda)$. Тогда легко убедиться, что λ_0 — собственное значение оператора $\widehat{H}(m,n,q)$, и функция

$$y(x,\lambda_0)=\begin{cases} C_1\varphi_2(x,\lambda_0), & x\in(-\infty,x_1);\\ C_2\varphi_1(x,\lambda_0)+C_3\varphi_2(x,\lambda_0), & x\in(x_1,x_2);\\ C_{2k-2}\varphi_1(x,\lambda_0)+C_{2k-1}\varphi_2(x,\lambda_0), & x\in(x_k,x_{k+1})\ (k=\overline{1,m+n-1});\\ C_{2(m+n)}\varphi_1(x,\lambda_0), & x\in(x_{m+n},+\infty), \end{cases}$$

где $C=\mathrm{col}(C_1,C_2,\ldots,C_{2(m+n)}$ — ненулевое решение системы $M_{m+n}(\lambda_0)C=0$ с точностью до числового множителя, отличного от нуля, является собственной функцией оператора $\widehat{H}(m,n,q)$, соответствующей собственному значению λ_0.

Теорема 3. *Пусть $q(x)\equiv 0$, $m=1$, $n=1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если $\alpha>0$, $\beta>0$, то у оператора $\widehat{H}(1,1,0)$ нет собственных значений,*

б) *если $\alpha\beta<0$, то оператор $\widehat{H}(1,1,0)$ имеет ровно одно собственное значение,*

в) *если $\alpha<0$, $\beta<0$, то оператор $\widehat{H}(1,1,0)$ имеет ровно два собственных значения.*

Доказательство. При $q(x)\equiv 0$ и $m=1$, $n=1$ уравнение $D(\lambda)=0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} -e^{\mu x_1} & e^{-\mu x_1} & e^{\mu x_1} & 0\\ (-\mu-\alpha)e^{\mu x_1} & -\mu e^{-\mu x_1} & \mu e^{\mu x_1} & 0\\ 0 & \mu e^{-\mu x_2} & -\mu e^{\mu x_2} & -\mu e^{-\mu x_2}\\ 0 & -e^{\mu x_2} & -e^{\mu x_2} & (1+\beta\mu)e^{-\mu x_2} \end{vmatrix}=0,$$

где $\mu=\sqrt{|\lambda|}$ $(\lambda<0)$.

Раскладывая определитель $D(\lambda)$ по первым двум строкам, получим

$$-e^{\mu x_1}[\mu^2(1+\beta\mu)e^{-\mu x_1}+\mu^2e^{-\mu(2x_2-x_1)}-\mu^2(1+\beta\mu)e^{-\mu(2x_2-x_1)}+\mu^2e^{-\mu x_1}]+$$
$$+(-\mu-\alpha)e^{\mu x_1}[-\mu(1+\beta\mu)e^{-\mu x_2}+\mu e^{-\mu(2x_1-x_1)}-\mu(1+\beta\mu)e^{-\mu(2x_2-x_1)}-\mu e^{-\mu x_1}]=0.$$

Отсюда следует, что $\lambda<0$ — собственное значение оператора $\widehat{H}(1,1,q)$ тогда и только тогда, когда $\mu=\sqrt{|\lambda|}$ — решение уравнения

$$(-2\mu-\alpha)(2+\beta\mu)=\alpha\beta\mu e^{-2\mu(x_2-x_1)} \quad \text{при} \quad \mu>0. \tag{7}$$

Число решений уравнения (7) удобно определять графически, т. е. исследуя абсциссы точек пересечения графиков функций

$$r=r_1(\mu)=(-2\mu-\alpha)(2+\beta\mu),$$
$$r=r_2(\mu)=\alpha\beta\mu e^{-2\mu(x_2-x_1)} \quad \text{при} \quad \mu>0.$$

Несложный подсчет убеждает нас в справедливости теоремы 3. $\square$

Литература

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. *Решаемые модели в квантовой механике.* – М.: Мир, 1991. – 566 с.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
3. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – Л.: ЛГУ, 1980. – 536 с.
4. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. Князев П.Н. *Об использовании свойств минимакса в теории возмущений* // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 2. – С. 94–100.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 27.03.1995
окончательный вариант 12.02.1996