ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.988

М.Ю. КОКУРИН

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ АТТРАКТОРАМИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Постановка задачи

Рассматривается уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in X, \tag{1.1}$$

где $F : X \to X$ — нелинейный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Предполагается, что пространство X рефлексивно и обладает дифференцируемой по Гато нормой. Простейшими примерами таких пространств являются l_p, L_p при $1 < p < \infty$, а также гильбертовы пространства ([1], с. 35–37). Обозначим через x^* решение уравнения (1.1) и положим $\Omega_R(x) = \{z \in X : \|z - x\| < R\}$. Предполагается, что оператор F дифференцируем по Фреше, причем

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega_R(x^*). \tag{1.2}$$

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ используется для обозначения норм различных пространств. От производной $F'(x)$ не требуется ограниченная обратимость, поэтому исходная задача (1.1) является в общем случае некорректной, и устойчивая аппроксимация ее решения в условиях погрешностей в задании $F(x)$ требует привлечения методов регуляризации (см., напр., [2], с. 126–128; [3], с. 9–11; [4], с. 15–18). Будем предполагать, что вместо точного оператора F в (1.1) доступно лишь его приближение $\widetilde{F} : X \to X$, дифференцируемое по Фреше и удовлетворяющее неравенству (1.2) с той же константой L и условиям

$$\|\widetilde{F}(x^*)\| \le \delta; \quad \|\widetilde{F}'(x) - F'(x)\| \le \delta \quad \forall x \in \Omega_R(x^*). \tag{1.3}$$

Плодотворный и широко используемый в вычислительной практике подход [5] к построению методов аппроксимации решения x^* заключается в конструировании дискретной либо непрерывной динамической системы, для которой x^* является точкой притяжения. В непрерывном случае для реализации этой идеи требуется на фазовом пространстве X построить динамическую систему

$$\dot{x} = \Phi(x), \quad x = x(t), \quad t \ge 0 \quad (\Phi : X \to X), \tag{1.4}$$

для которой x^* была бы асимптотически устойчивой точкой покоя, т. е.

$$\Phi(x^*) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00282а.

по крайней мере для начальных значений $x(0) = x_0$ из фиксированной окрестности x^*. В регулярном случае, когда оператор $F'(x)$ либо $F'^*(x)F'(x)$ непрерывно обратим, в качестве (1.4) могут выступать, например, системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = -F'^*(x)F(x), \quad \dot{x} = -F'(x)^{-1}F(x), \\ \dot{x} = -(F'^*(x)F'(x))^{-1}F'^*(x)F(x), \end{gathered} \tag{1.5}$$

являющиеся непрерывными аналогами классического итерационного метода градиентного спуска, методов Ньютона–Канторовича и Гаусса–Ньютона. Вторая из этих систем определена в произвольном банаховом пространстве, две другие используются в гильбертовых пространствах и естественным образом обобщаются на уравнения (1.1) с оператором $F : X \to Y$, действующим в произвольных гильбертовых пространствах X, Y. В нерегулярной ситуации уравнения вида (1.5) не порождают траектории $x = x(t)$, аппроксимирующие x^*. Более того, процессы, подобные двум последним схемам в (1.5), в нерегулярном случае не являются даже формально реализуемыми, поскольку не гарантируется выполнение включений $F(x) \in R(F'(x))$, $F'^*(x)F(x) \in R(F'^*(x)F'(x))$. Здесь $R(A)$ есть образ оператора $A \in L(X)$, $L(X)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов $A : X \to X$. Дополнительным обстоятельством, осложняющим конструирование и исследование искомых динамических систем в банаховых пространствах, является отсутствие в таких пространствах прямых аналогов исчисления самосопряженных операторов гильбертова пространства. Уточним в этой связи требования к оператору F, определяющему уравнение (1.1).

Для фиксированных $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi)$ обозначим

$$\begin{gathered} S(r) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq r\}, \\ K(\varphi) = \{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| \leq \varphi\} \cup \{0\}, \quad K(r, \varphi) = K(\varphi) \cap S(r). \end{gathered}$$

Ниже пусть $\sigma(A)$ — спектр, $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ — резольвента оператора $A \in L(X)$, E — единичный оператор. Всюду в дальнейшем предполагаем, что оператор $F'(x^*)$ удовлетворяет следующему условию секториальности.

Условие A. Существует такое $\varphi_0 \in [0, \pi)$, что $\sigma(F'(x^*)) \subset K(\varphi_0)$ и с некоторой постоянной $C_0 > 0$ выполняется оценка

$$\|R(\lambda, F'(x^*))\| \leq \frac{C_0}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \setminus K(\varphi_0). \tag{1.6}$$

Об операторах $F'(x^*)$, удовлетворяющих условию A, см., например, в ([4], с. 12). Зафиксируем произвольно $R_0 > \|F'(x^*)\|$. Поскольку $\sigma(F'(x^*)) \subset K(R_0, \varphi_0)$, увеличивая при необходимости константу C_0, можем считать, что неравенство (1.6) выполняется также для всех $\lambda \in \mathbf{C} \setminus K(R_0, \varphi_0)$. Ниже предполагаем, что величина C_0 выбрана указанным образом. Здесь и далее $C_0, C_1, \ldots$ — положительные абсолютные константы.

Дискретной моделью динамических систем, пригодных для аппроксимации x^* в нерегулярном случае, могут служить исследованные в ([4], гл. 4) итерационные процессы

$$\begin{gathered} x_{n+1} = \xi - \Theta(\widetilde{F}'(x_n), \alpha_n)(\widetilde{F}(x_n) - \widetilde{F}'(x_n)(x_n - \xi)), \quad x_0 \in \Omega_R(x^*), \\ 0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \quad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\Theta(\lambda, \alpha)$ — порождающая функция, $\xi \in X$ — управляющий параметр, α_n — параметр регуляризации.

При изучении сходимости процессов (1.7) существенно использовалось

Условие B. Имеет место представление

$$x^* - \xi = F'(x^*)^p v + w; \quad v, w \in X, \tag{1.8}$$

где $p \geq 1$, $\|w\| \leq \Delta$.

Величина Δ в условии B имеет смысл погрешности классического истокообразного представления $x^* - \xi \in R(F'(x^*)^p)$. Как показано в ([4], гл. 4, § 3), в качестве аппроксимации решения x^*, адекватной погрешностям в задании $F(x)$ и в истокообразном представлении $x^* - \xi$, может быть взята итерационная точка x_n с подходящим номером $n = n(\delta, \Delta)$, указывающим момент останова итераций (1.7).

В данной работе изучается непрерывный аналог стационарного ($\alpha_n = \alpha > 0$, $n = 0, 1, \dots$) варианта процесса (1.7), определяемый операторным дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered} \dot{x} = \xi - \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)(\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}'(x)(x - \xi)) - x, \\ x(0) = x_0 \in \Omega_R(x^*). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь x_0 — начальное приближение к x^*. Под решением задачи Коши (1.9) понимается X-значная функция $x = x(t)$, определенная на некотором отрезке $[0, \widetilde{T}]$ ($\widetilde{T} > 0$), сильно непрерывно дифференцируемая на нем, обращающая дифференциальное уравнение (1.9) в тождество при $t \in [0, \widetilde{T}]$ и удовлетворяющая начальному условию из (1.9) ([6], с. 398). При замене процесса (1.7) задачей Коши (1.9) в качестве аппроксимации решения x^* естественно выбирать элемент $x(t)$ при $t \to +\infty$.

Целью работы является исследование асимптотических свойств траекторий динамической системы (1.9). Отметим, что x^* не является в общем случае точкой покоя для (1.9). Тем не менее при условии достаточной близости начального приближения x_0 к x^* устанавливается оценка

$$\limsup_{t \to \infty} \|x(t) - x^*\| < r_1(\delta, \Delta, \alpha) = C_1\left(\frac{\delta}{\alpha} + \|v\|\alpha^p + \|v\|\delta + \Delta\right). \tag{1.10}$$

Неравенство (1.10) означает, что шар с центром в x^* и радиусом $r_1(\delta, \Delta, \alpha)$ является притягивающим множеством для точек x_0 из некоторой окрестности x^*. При наложении на оператор $\widetilde{F}$ условия усиленной непрерывности устанавливается наличие у динамической системы (1.9) связного, компактного и инвариантного минимального аттрактора. Последний можно рассматривать в качестве множества, генерируемого процессом (1.9) в целях аппроксимации x^*.

Согласно (1.10) характер поведения приближений $x(t)$, $t \to +\infty$, определяемых (1.9), качественно иной, чем у ранее изучавшихся вариантов схемы (1.9) с переменным параметром регуляризации $\alpha = \alpha(t) \to 0$, $t \to +\infty$ (см., напр., [7]). В последнем случае аналогично дискретному процессу (1.7) сближение $x(t)$ с решением x^* имеет место лишь на некотором начальном интервале изменения t и, вообще говоря, $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t)\| = \infty$. Поэтому эффективность численной реализации подобных схем существенно определяется используемыми критериями останова процесса на подходящем значении $t = \widetilde{t}(\delta, \Delta)$. Ввиду свойства стабилизации (1.10) реализация схемы (1.9) свободна от проблемы выбора момента останова.

2. Вспомогательные утверждения

Согласно (1.2) для некоторой константы N выполняется

$$\|F'(x)\| \le N\|, \quad \widetilde{F}'(x)\| \le N \quad \forall x \in \Omega_R(x^*).$$

Введем обозначение: $K_\alpha(R_0, \varphi_0, d_0) = K(R_0, \varphi_0) \cup S(d_0\alpha)$, $d_0 \in (0, 1)$, и через γ_α обозначим границу множества $K_\alpha(R_0, \varphi_0, d_0)$.

Далее будем предполагать, что порождающая функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие C. При каждом $\alpha \in (0, \alpha_0]$, где $\alpha_0 > 0$ фиксировано, функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ аналитична по λ в открытой области $D_\alpha \supset K_\alpha(R_0, \varphi_0, d_0)$.

Условие D. Существует такое семейство замкнутых спрямляемых контуров $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0]}$, что при каждом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ выполняется $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$, контур Γ_α не содержит внутри точку $\lambda = -d_1\alpha$

с некоторым фиксированным $d_1 \in (d_0, 1)$, окружает множество $\operatorname{int} K_\alpha(R_0, \varphi_0, d_0)$ и с некоторым $p_0 \geq 1$ для всех $p \in [0, p_0]$ ($p \in [0, \infty)$ при $p_0 = \infty$) выполняется оценка

$$\int_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\, |\lambda|^{p-1} |d\lambda| \leq C_2 \alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]; \quad C_2 = C_2(p). \tag{2.1}$$

Кроме того, для указанного семейства $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0]}$ справедливо неравенство

$$\int_{\Gamma_\alpha} \frac{|\Theta(\lambda, \alpha)|}{|\lambda|} |d\lambda| \leq \frac{C_2}{\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2.2}$$

Пусть оператор $A \in L(X)$ удовлетворяет условию A с заменой $F'(x^*)$ на A и функция $\varphi(\lambda)$ аналитична в открытой окрестности спектра $\sigma(A)$. Напомним, что в соответствии с исчислением Рисса–Данфорда ([8], гл. XI) оператор $\varphi(A)$ определяется равенством

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda, \tag{2.3}$$

где Γ — положительно ориентированный замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $\varphi(\lambda)$ и окружающий $\sigma(A)$. В связи с представлением (1.8) напомним также определение дробной степени оператора A. Для $\mu \in (0, 1)$ полагаем ([9], с. 156)

$$A^\mu = \frac{\sin \pi\mu}{\pi} \int_0^\infty t^{\mu-1} (tE + A)^{-1} A\, dt. \tag{2.4}$$

Для произвольного $p > 0$ и натурального m такого, что $p \in [m, m+1)$, принимаем $A^p = A^m A^{p-m}$. Функцию оператора $\Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)$ в (1.9) будем определять согласно (2.3). Следующее предложение, полученное в ([4], сс. 117, 123), устанавливает условия, обеспечивающие применимость представления (2.3) к функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ и оператору $\widetilde{F}'(x)$.

Предложение 1. *Пусть выполняются соотношения* (1.2), (1.3), *условие A и для некоторого* $\nu_0 \in (0, 1)$ *справедливы неравенства*

$$\|x - x^*\| \leq \frac{d_0 \nu_0 \alpha}{2C_0 L}, \quad \delta < \frac{d_0 \nu_0 \alpha}{2C_0}; \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2.5}$$

Тогда имеет место включение $\sigma(\widetilde{F}'(x)) \subset \operatorname{int} K_\alpha(R_0, \varphi_0, d_0)$.

При выполнении условий (2.5) имеет место представление

$$\Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \Theta(\lambda, \alpha) R(\lambda, \widetilde{F}'(x)) d\lambda. \tag{2.6}$$

Здесь в силу условия C в качестве Γ_α может быть выбран, например, контур γ_α.

Обозначим

$$\widetilde{\Phi}(x) = \xi - \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)(\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}'(x)(x - \xi)) - x,$$

тогда задача Коши (1.9) принимает вид

$$\dot{x} = \widetilde{\Phi}(x), \quad x(0) = x_0 \in \Omega_R(x^*).$$

Используя (1.2), (1.3), представление (2.6) и условия A, C, D, без труда убеждаемся, что для любой точки z_0 из малой окрестности x_0 найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что с некоторыми константами M_1, M_2, зависящими, вообще говоря, от z_0, ε_0, выполняются неравенства

$$\|\widetilde{\Phi}(x)\| \leq M_1, \quad \|\widetilde{\Phi}(x_1) - \widetilde{\Phi}(x_2)\| \leq M_2 \|x_1 - x_2\| \quad \forall x, x_1, x_2 \in \Omega_{\varepsilon_0}(z_0). \tag{2.7}$$

Согласно ([6], с. 397) отсюда следует

Предложение 2. *Пусть выполняются соотношения* (1.2), (1.3), (2.5) *и условия A, C, D. Тогда найдется такое* $\widetilde{T} > 0$, *что решение* $x = x(t)$ *задачи Коши* (1.9) *существует и единственно при* $t \in [0, \widetilde{T}]$ *и, кроме того,* $x(t) \in \Omega_R(x^*)$ *для всех* $t \in [0, \widetilde{T}]$.

Поскольку по предположению функционал $x \to \|x\|$ дифференцируем по Гато при $x \neq 0$, функционал $g(x) = 1/2\|x\|^2$ также обладает производной Гато $U : X \to X^*$, причем ([1], с. 66)

$$U(x) \equiv \operatorname{grad} g(x) = \|x\| \operatorname{grad} \|x\|, \quad x \neq 0; \quad U(0) = 0. \tag{2.8}$$

Здесь X^* — сопряженное к X банахово пространство. Определяемый равенством (2.8) оператор U называется нормализованным дуальным отображением из X в X^* ([1], с. 312). Через $\langle f, z\rangle$ будем обозначать значение линейного функционала $f \in X^*$ на элементе $z \in X$, через $\|f\|_*$ — норму элемента f. Имеет место

Предложение 3 ([1], с. 311). *Для всех $x \in X$ справедливы соотношения*

$$\langle U(x), x\rangle = \|x\|^2, \quad \|U(x)\|_* = \|x\|. \tag{2.9}$$

Обратимся к исследованию свойств решения $x = x(t)$ задачи (1.9).

3. Промежуточные оценки

Согласно (2.8) для функции $x = x(t)$, $0 \le t \le \widetilde{T}$, определяемой задачей (1.9), выполняется

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x - x^*\|^2\right) = \langle U(x - x^*), \dot{x}\rangle =$$
$$= \langle U(x - x^*), \xi - x - \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}(x) + \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}'(x)(x - \xi)\rangle. \tag{3.1}$$

Преобразуем последнее выражение в (3.1) с использованием представления ([6], с. 376)

$$\widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(x^*) + \widetilde{F}'(x)(x - x^*) + \widetilde{G}(x), \quad \|\widetilde{G}(x)\| \le \frac{1}{2}L\|x - x^*\|^2, \tag{3.2}$$

справедливого в силу (1.2) для всех $x \in \Omega_R(x^*)$. Получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x - x^*\|^2\right) = -\langle U(x - x^*), x - x^*\rangle -$$
$$- \langle U(x - x^*), \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}(x^*) + \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{G}(x) + [E - \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}'(x)](x^* - \xi)\rangle.$$

В силу (2.9) и оценки $|\langle f, z\rangle| \le \|f\|_*\|z\|$ отсюда следует

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x - x^*\|^2\right) \le -\|x - x^*\|^2 + \Big(\|\Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}(x^*)\| + \|\Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{G}(x)\| +$$
$$+ \|[E - \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}'(x)](x^* - \xi)\|\Big)\|x - x^*\|, \quad 0 \le t \le \widetilde{T}. \tag{3.3}$$

Для отдельных слагаемых в правой части неравенства (3.3) с использованием (1.3), (1.6), (2.2), (2.6), (3.2) получаем следующие оценки (см. подробнее в [4], с. 44):

$$\|\Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}(x^*)\| \le \frac{C_3\delta}{\alpha}, \tag{3.4}$$

$$\|\Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{G}(x)\| \le \frac{C_3 L\|x - x^*\|^2}{\alpha}. \tag{3.5}$$

Для последней нормы в скобках в правой части (3.3) имеем оценку

$$\|[E - \Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}'(x)](x^* - \xi)\| \le \|[E - \Theta(F'(x^*), \alpha)F'(x^*)](x^* - \xi)\| +$$
$$+ \|[\Theta(\widetilde{F}'(x), \alpha)\widetilde{F}'(x) - \Theta(F'(x^*), \alpha)F'(x^*)](x^* - \xi)\|. \tag{3.6}$$

С учетом (1.6), (1.8), (2.1), как и в ([4], с. 120), получаем

$$\|[E - \Theta(F'(x^*), \alpha)F'(x^*)](x^* - \xi)\| \le \|[E - \Theta(F'(x^*), \alpha)F'(x^*)]F'(x^*)^p v\| +$$
$$+ \|[E - \Theta(F'(x^*), \alpha)F'(x^*)]w\| \le C_4(\|v\|\alpha^p + \Delta). \tag{3.7}$$

Для второго слагаемого в правой части (3.6) с использованием (2.4) аналогично ([4], с. 45–46) находим

$$\|[\Theta(\widetilde{F}'(x),\alpha)\widetilde{F}'(x)-\Theta(F'(x^*),\alpha)F'(x^*)](x^*-\xi)\| \le$$
$$\le \|[\Theta(\widetilde{F}'(x),\alpha)\widetilde{F}'(x)-\Theta(F'(x^*),\alpha)F'(x^*)]F'(x^*)^p v\| +$$
$$+\|[\Theta(\widetilde{F}'(x),\alpha)\widetilde{F}'(x)-\Theta(F'(x^*),\alpha)F'(x^*)]w\| \le$$
$$\le C_5\|v\|(\delta+L\|x-x^*\|)+C_6\Delta, \quad 0\le t\le \widetilde{T}. \quad (3.8)$$

Из (3.3)–(3.8) следует оценка

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x-x^*\|^2\right) \le -(1-C_5L\|v\|)\|x-x^*\|^2+\frac{C_3L\|x-x^*\|^3}{\alpha}+$$
$$+\left(\frac{C_3\delta}{\alpha}+C_4\|v\|\alpha^p+C_5\|v\|\delta+C_7\Delta\right)\|x-x^*\|, \quad 0\le t\le\widetilde{T}, \quad (3.9)$$

где $C_7=C_4+C_6$. С использованием неравенства

$$ab\le\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon>0,$$

далее получаем

$$\left(\frac{C_3\delta}{\alpha}+C_4\|v\|\alpha^p+C_5\|v\|\delta+C_7\Delta\right)\|x-x^*\| \le$$
$$\le\frac{1}{8}\|x-x^*\|^2+2\left(\frac{C_3\delta}{\alpha}+C_4\|v\|\alpha^p+C_5\|v\|\delta+C_7\Delta\right)^2, \quad (3.10)$$
$$\frac{C_3L\|x-x^*\|^3}{\alpha}=C_3L\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\|x-x^*\|\right)\|x-x^*\|^2\right\}\le$$
$$\le\frac{1}{8}\|x-x^*\|^2+\frac{2(C_3L)^2}{\alpha^2}\|x-x^*\|^4. \quad (3.11)$$

Здесь при выводе (3.10) выбиралось $\varepsilon=1/4$, при получении (3.11) было взято $\varepsilon=(4C_3L)^{-1}\alpha^2$. В дальнейшем будем предполагать выполненным условие

$$\|v\|\le\frac{1}{4C_5L}. \quad (3.12)$$

Соотношения (3.9)–(3.12) дают

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x-x^*\|^2\right)\le-\frac{1}{2}\|x-x^*\|^2+\frac{C_8}{4\alpha^2}\|x-x^*\|^4+$$
$$+C_9\left(\frac{\delta^2}{\alpha^2}+\|v\|^2\alpha^{2p}+(\|v\|\delta+\Delta)^2\right), \quad x=x(t), \quad 0\le t\le\widetilde{T}. \quad (3.13)$$

Определим функцию $u(t)=1/2\|x(t)-x^*\|^2$. Непосредственно из (3.13) вытекает следующий промежуточный результат.

Теорема 1. *Пусть выполняются соотношения* (1.2), (1.3), (2.5), (3.12) *и условия A–D. Тогда имеет место оценка*

$$\dot{u}(t)\le-u(t)+\frac{C_8}{\alpha^2}u^2(t)+C_9\left(\frac{\delta^2}{\alpha^2}+\|v\|^2\alpha^{2p}+(\|v\|\delta+\Delta)^2\right), \quad 0\le t\le\widetilde{T}, \quad (3.14)$$

где величина $\widetilde{T}$ определена в предложении 2.

4. Свойство притяжения

В этом параграфе проанализируем характер асимптотического поведения решений $x = x(t)$ задачи (1.9), начинающихся при $t = 0$ в точке x_0 из окрестности решения x^* уравнения (1.1). Прежде всего надлежит установить существование и единственность решения $x(t)$ при всех $t \geq 0$. С этой целью рассмотрим мажорирующее по отношению к неравенству (3.14) уравнение

$$\dot{y}(t) = -y(t) + \frac{C_8}{\alpha^2} y^2(t) + C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\|\delta + \Delta)^2 \right), \quad t \geq 0 \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$y(0) = u(0). \tag{4.2}$$

Согласно лемме о дифференциальных неравенствах ([10], с. 32),

$$u(t) \leq y(t), \quad 0 \leq t \leq \widetilde{T}. \tag{4.3}$$

Непосредственно проверяется, что при выполнении условия

$$\frac{\delta^2}{\alpha^4} + \|v\|^2 \alpha^{2p-2} + \frac{(\|v\|\delta + \Delta)^2}{\alpha^2} < \frac{1}{4C_8 C_9} \tag{4.4}$$

уравнение

$$-y + \frac{C_8}{\alpha^2} y^2 + C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\|\delta + \Delta)^2 \right) = 0$$

имеет корни $0 < y_1 < y_2$, причем

$$y_1 < 2C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\|\delta + \Delta)^2 \right), \tag{4.5}$$

$$y_2 > \frac{\alpha^2}{2C_8}. \tag{4.6}$$

Несложный анализ уравнения (4.1) показывает, что любое его решение $y = y(t)$ такое, что $y_1 < y(0) < y_2$, монотонно убывает при $t \geq 0$ и

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_1. \tag{4.7}$$

С другой стороны, решения, начинающиеся при $t = 0$ в точке $y(0)$, $0 \leq y(0) \leq y_1$, являются неубывающими и также удовлетворяют (4.7). Тем самым (4.7) имеет место для любого решения $y(t)$ с $0 \leq y(0) < y_2$. Из (4.2), (4.3), (4.6) теперь следует, что если выполняются условия

$$\|x_0 - x^*\| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{C_8}}, \quad \alpha < \sqrt{C_8} R, \tag{4.8}$$

то в случае $y_1 < u(0) = 1/2 \|x_0 - x^*\|^2$ имеем

$$\|x(t) - x^*\| = \sqrt{2u(t)} \leq \sqrt{2y(t)} \leq \sqrt{2y(0)} = \|x_0 - x^*\|, \quad 0 \leq t \leq \widetilde{T}.$$

Если же $0 \leq u(0) \leq y_1$, то вновь

$$\|x(t) - x^*\| \leq \sqrt{2y(t)}, \quad 0 \leq t \leq \widetilde{T}.$$

Поскольку в этом случае функция $y(t)$ неубывающая, выполняется

$$y(t) \leq \lim_{t \to +\infty} y(t) = y_1 < 2C_9 \left(\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \|v\|^2 \alpha^{2p} + (\|v\|\delta + \Delta)^2 \right) < \frac{\alpha^2}{2C_8},$$

$$\|x(t) - x^*\| < \frac{\alpha}{\sqrt{C_8}}, \quad 0 \leq t \leq \widetilde{T}.$$

Увеличивая при необходимости константу C_8, без ограничения общности можем считать, что $1/\sqrt{C_8} \le d_0\nu_0/(2C_0L)$; в этом случае первое неравенство в (2.5) имеет место для всех $x = x(t)$, $0 \le t \le \widetilde{T}$. Следовательно, решение задачи Коши (1.9), начинающееся в замкнутом шаре $\overline{\Omega}_{\alpha/\sqrt{C_8}}(x^*) \subset \Omega_R(x^*)$, не покидает этот шар при $0 \le t \le \widetilde{T}$. Обозначим через $T^* = T^*(x_0) \ge \widetilde{T}$ полное время существования решения задачи (1.9), так что решение $x = x(t)$ определено при $t \in [0, T^*)$ и не допускает однозначного продолжения вперед по времени через $t = T^*$. Будем считать выполненными условия (4.4), (4.8). Предположим, что $T^* < \infty$, тогда в силу сказанного выше $\sup\{\|x(t) - x^*\| : t \in [0, T^*)\} < R$, и из (1.9) с учетом (1.2), (2.1), (2.2) следует

$$\sup\{\|\dot{x}(t)\| : t \in [0, T^*)\} < \infty. \tag{4.9}$$

Пользуясь (4.9), представлением $x(t) = x_0 + \int\limits_0^t \dot{x}(\tau)d\tau$, $t \in [0, T^*)$, и критерием Коши, нетрудно показать, что существует предел $\lim\limits_{t \to T^*-0} \|x(t) - \widetilde{x}\| = 0$, $\widetilde{x} \in X$. Поскольку $\widetilde{x} \in \Omega_R(x^*)$, при $z_0 = \widetilde{x}$ и подходящем $\varepsilon_0 > 0$ справедливы соотношения (2.7), из которых следует возможность продолжить решение $x(t)$ вперед по времени за значение $t = T^*$. Последнее противоречит определению величины T^* и, значит, $T^* = \infty$. Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия A–D, соотношения* (1.2), (1.3), (3.12), (4.4), (4.8) *и*

$$\delta < \frac{d_0\nu_0\alpha}{2C_0}. \tag{4.10}$$

Тогда решение задачи Коши (1.9) *однозначно определено для всех* $t \ge 0$.

Проанализируем теперь характер поведения $x(t)$, когда $t \to +\infty$. При выполнении условий теоремы 2 неравенство (4.3) имеет место для всех $t \ge 0$. Поэтому

$$\|x(t) - x^*\| = \sqrt{2u(t)} \le \sqrt{2y(t)}, \quad t \ge 0. \tag{4.11}$$

Поскольку в условиях теоремы

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_1,$$

из (4.5), (4.11) следует

$$\limsup_{t \to +\infty} \|x(t) - x^*\| < C_{10}\left(\frac{\delta}{\alpha} + \|v\|\alpha^p + \|v\|\delta + \Delta\right), \quad C_{10} = 2\sqrt{C_9}. \tag{4.12}$$

Здесь при выводе использовалось элементарное неравенство

$$\sqrt{a_1 + \dots + a_m} \le \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_m}; \quad a_1, \dots, a_m \ge 0.$$

Кроме того, в силу сказанного выше

$$\|x(t) - x^*\| \le \frac{\alpha}{\sqrt{C_8}}, \quad t \ge 0. \tag{4.13}$$

Подытожим полученные результаты.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия A–D и соотношения* (1.2), (1.3), (3.12), (4.4), (4.8), (4.10). *Тогда для решения задачи Коши* (1.9) *справедливы неравенства* (4.12), (4.13).

Положим

$$r_1(\delta, \Delta, \alpha) = C_{10}\left(\frac{\delta}{\alpha} + \|v\|\alpha^p + \|v\|\delta + \Delta\right), \quad r_2(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{C_8}}. \tag{4.14}$$

Теорема 3 утверждает, что при выполнении условий (4.4), (4.8) шар $\Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*)$ является притягивающим множеством (см. определение в разделе 5) для любой точки шара $\overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$ по отношению к динамической системе (1.9). Отметим, что условия типа (4.8), определяющие

необходимую меру близости начального приближения к решению, характерны для теорем сходимости дискретных и непрерывных методов решения нелинейных уравнений общего вида как в регулярном, так и в нерегулярном случае. Сказанное относится в том числе и к схемам (1.5) и их дискретным аналогам.

Если при этом вместо (4.4) выполняется несколько более жесткое условие

$$\frac{\delta^2}{\alpha^4} + \|v\|^2\alpha^{2p-2} + \frac{(\|v\|\delta + \Delta)^2}{\alpha^2} < \frac{1}{12C_8C_9}, \tag{4.15}$$

то из (4.14) следует строгое включение $\overline{\Omega}_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*) \subset \overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$. Отметим, что в случае фиксированного $\alpha \in (0,1)$ и величины p, значительно превышающей единицу, а также малых по сравнению с α погрешностей δ, Δ, условие (4.15) выполняется, а радиус $r_1(\delta,\Delta,\alpha)$ намного меньше $r_2(\alpha)$. Из (4.12) следует, что для любой точки $x_0 \in \overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}$ найдется такой момент $\bar{t}(x_0)$, что $x(t) \in \Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}$ при $t \geq \bar{t}(x_0)$. Сказанное означает, что при этих условиях точка $x(t)$ при достаточно большом t может рассматриваться в качестве приближения к x^*, адекватного имеющимся погрешностям δ, Δ. Представляет интерес исследование поведения траектории $x(t)$ после попадания в шар $\Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}$ (при $t \to +\infty$) в зависимости от выбора начальной точки x_0. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

5. Существование минимального аттрактора

В этом параграфе предполагаются выполненными условия теоремы 3 с заменой (4.4) неравенством (4.15). Определим метрическое пространство $Z = \overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$ с метрикой нормы X и обозначим через $V_t : Z \to Z$, $t \geq 0$ нелинейную полугруппу, связанную с задачей (1.9): $V_t(x_0) = x(t)$, где $x = x(t)$ есть решение (1.9). Нетрудно видеть, что полугруппа V_t непрерывна, т. е. отображение $(t,y) \to V_t(y)$ непрерывно по $(t,y) \in \{t : t \geq 0\} \times Z$. Следуя [11], говорим, что множество $B_0 \subset Z$ притягивает множество $B \subset Z$, если по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой момент $t_1(\varepsilon, B)$, что множество $V_t(B) \equiv \{z \in Z : z = V_t(y),\, y \in B\}$ при всех $t \geq t_1(\varepsilon, B)$ лежит в $\bigcup\limits_{y \in B_0} \Omega_\varepsilon(y)$, т. е. в ε-окрестности B_0. Минимальным аттрактором $\mathfrak{M}$ полугруппы V_t на пространстве Z называется наименьшее по включению непустое замкнутое множество, которое притягивает любое $B \subset Z$. Произвольная полугруппа V_t называется точечно диссипативной, если существует множество $B_0 \subset Z$, притягивающее любую точку из Z. Из теоремы 3 следует, что полугруппа, порожденная задачей (1.9), является точечно диссипативной, причем в качестве множества B_0 может быть взят шар $\Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*)$.

Цель последующих рассуждений заключается в обосновании наличия у системы (1.9) и отвечающей ей полугруппы V_t минимального аттрактора в смысле вышеприведенного определения.

Ниже будет использоваться известный критерий наличия минимального аттрактора у полугрупп гиперболического типа ([11], теорема 3.1, предложение 3.6). Приведем соответствующий результат в виде, адаптированном к интересующему нас случаю непрерывной точечно диссипативной полугруппы V_t в метрическом пространстве Z, совпадающем с конечным шаром $\overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*) \subset X$.

Предложение 4. *Пусть полугруппа V_t представима в виде $V_t = W_t + U_t$, $t \geq 0$, где семейство операторов W_t обладает свойством*

$$\sup_{y \in Z} \|W_t(y)\| \leq \nu(t), \quad t \geq 0; \quad \lim_{t \to +\infty} \nu(t) = 0, \tag{5.1}$$

а операторы $U_t : Z \to X$, $t \geq 0$ отображают подмножества Z в компактные множества. Тогда полугруппа V_t имеет минимальный аттрактор $\mathfrak{M}$, который является связным, компактным и инвариантным относительно V_t подмножеством Z.

Инвариантность аттрактора $\mathfrak{M}$ означает, что $V_t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \quad \forall t \geq 0$. Убедимся, что при наложении на $\widetilde{F}$ некоторых дополнительных ограничений определяемая (1.9) полугруппа V_t удовлетворяет условиям предложения 4.

Дополнительно к сделанным выше допущениям будем предполагать выполненным

Условие E. Оператор $\widetilde{F}$ усиленно непрерывен ([1], с. 85) на некотором шаре $\Omega_\rho(x^*)$, $\rho > r_2(\alpha)$.

Заметим, что при выполнении условия E производная $\widetilde{F}'(x)$ как элемент $L(X)$ является линейным вполне непрерывным оператором при каждом $x \in \Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ ([1], с. 93). Кроме того, эта производная усиленно непрерывна как отображение из $\overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$ в $L(X)$ ([1], с. 91).

Лемма. *Предположим, что выполняется условие* E. *Тогда оператор* $\widetilde{\Psi}$, $\widetilde{\Psi}(x) = \widetilde{\Phi}(x) + x$, *является вполне непрерывным на* $\Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$.

Доказательство. В силу непрерывности $\widetilde{\Phi}$ достаточно установить, что всякая последовательность $\{x_n\} \subset \Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ имеет подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, вдоль которой $\{\widetilde{\Psi}(x_{n_k})\}$ сходится в норме X. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — слабо сходящаяся к $\widetilde{x}$ подпоследовательность $\{x_n\}$. Существование такой подпоследовательности гарантируется рефлексивностью пространства X. С учетом условия E и предшествующих лемме замечаний $\{\widetilde{F}(x_{n_k})\}$ сильно сходится к некоторому элементу $\widetilde{f} \in X$, а последовательность линейных вполне непрерывных операторов $\{\widetilde{F}'(x_{n_k})\}$ сходится в норме $L(X)$ к некоторому вполне непрерывному оператору $\widetilde{A}$. Отсюда следует, что последовательность $\{\widetilde{F}(x_{n_k}) - \widetilde{F}'(x_{n_k})(x_{n_k} - \xi)\}$ сходится в X к элементу $\widetilde{f} - \widetilde{A}(\widetilde{x} - \xi)$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что последовательность операторов $\{\Theta(\widetilde{F}'(x_{n_k}), \alpha)\}$ сходится в $L(X)$ к $\Theta(\widetilde{A}, \alpha)$. Это следует из представления (2.6) с учетом равномерной по $\lambda \in \Gamma_\alpha$ сходимости $R(\lambda, \widetilde{F}'(x_{n_k})) \to R(\lambda, \widetilde{A})$, $k \to \infty$ в $L(X)$. $\square$

Обратимся теперь к исследованию полугруппы V_t, порождаемой задачей (1.9), при выполнении условия E. Рассмотрим полугруппу линейных операторов W_t, $W_t(x) = \exp(-t)x$, $t \geq 0$, порождаемую уравнением $\dot{x} = -x$. В данном случае условие (5.1) выполняется, причем в качестве $\nu(t)$ можно взять $\nu(t) = (\|x^*\| + r_2(\alpha)) \exp(-t)$. Установленная в лемме 1 полная непрерывность оператора $\widetilde{\Psi}$ с учетом сказанного в ([12], с. 298–299) означает, что оператор $U_t = V_t - W_t$ является вполне непрерывным при каждом $t \geq 0$. Непосредственным следствием предложения 4 и леммы является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия A–E и соотношения* (1.2), (1.3), (3.12), (4.8), (4.10), (4.15). *Тогда динамическая система* (1.9) *имеет на шаре* $\Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ *минимальный аттрактор* $\mathfrak{M} \subset \Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*)$, *который является связным, компактным и инвариантным множеством.*

Аттрактор, существование которого гарантируется теоремой 4, можно рассматривать в качестве аппроксимирующего x^* множества, конструкция которого в отличие от индивидуальной траектории $x = x(t)$ не зависит от выбора начальной точки x_0.

Условие E из теоремы 4 выполняется, например, для оператора $[F(x)](t) = \int\limits_a^b K(t,s)x^2(s)ds - g(t)$, $t \in [a,b]$, действующего в пространстве $X = W_p^1(a,b)$, $p \in (1,\infty)$. Здесь $K \in C^1([a,b] \times [a,b])$, $g \in W_p^1(a,b)$. Условие B, входящее в теоремы 1–4, вместе с предположением о малости величины Δ из теорем 2–4 сводится к требованию близости элемента $x^* - \xi$ к эллипсоиду $\{F'(x^*)^p v : \|v\| \leq d\}$, где $d = (4C_5L)^{-1}$. В типичной для приложений ситуации вполне непрерывного оператора $F'(x^*)$ и функционального пространства X указанный эллипсоид образован функциями, обладающими повышенной гладкостью по сравнению с элементами X. Если решение x^* обладает указанной гладкостью, то выбор $\xi = 0$ часто обеспечивает выполнение условия B.

Всем вышеприведенным условиям на $\Theta(\lambda, \alpha)$ удовлетворяет функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \lambda^{-1}[1 - (1 - \mu_0\lambda)^{1/\alpha}], \quad \lambda \neq 0,$$

доопределенная по непрерывности значением $\alpha^{-1}\mu_0$ при $\lambda = 0$, если $\alpha^{-1} \in \{1, 2, \dots\}$ и величина $0 < \mu_0 < N^{-1}$. При этом в условии D можно положить $p_0 = \infty$. Оператор $\widetilde{\Phi}$ в данном случае имеет вид

$$\widetilde{\Phi}(x) = x^{(n)},$$

где $n = \alpha^{-1}$, $x^{(0)} = \xi$ и

$$x^{(k+1)} = (E - \mu_0 \widetilde{F}'(x))x^{(k)} + \mu_0(\widetilde{F}'(x)x - \widetilde{F}(x)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Дальнейшие примеры функций $\Theta(\lambda, \alpha)$, удовлетворяющих введенным выше условиям, см. в ([4], с. 26–28).

Литература

1. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. *Нелинейные некорректные задачи.* – М.: Наука, 1995. – 312 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
4. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами.* – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 192 с.
5. Гавурин М.К. *Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов* // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 5. – С. 18–31.
6. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.
7. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. *Непрерывные методы устойчивой аппроксимации решений нелинейных уравнений в банаховом пространстве на основе регуляризованной схемы Ньютона–Канторовича* // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2004. – Т. 7.– № 1. – С. 1–12.
8. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: Мир, 1979. – 587 с.
9. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
10. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука, 1961. – 704 с.
11. Ладыженская О.А. *О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье–Стокса и других уравнений с частными производными* // УМН. – 1987. – Т. 42. – № 6. – С. 25–60.
12. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1966. – 332 с.

Марийский государственный университет

Поступила 15.01.2005