ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 12 (475)

УДК 517.977

В.А. СРОЧКО, Н.В. МАМОНОВА

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КВАЗИГРАДИЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

В задачах оптимального управления градиентные методы (процедуры слабого варьирования) по-прежнему сохраняют свою актуальность и остаются надежным средством численного решения [1]-[7]. Тем не менее возможности их улучшения и модификаций в рамках определенных классов задач еще далеко не исчерпаны.

В данной работе предлагается ряд модификаций стандартных градиентных процедур (градиентный метод с постоянным шагом, метод проекции градиента) на основе более качественных аппроксимаций целевого функционала. Сохраняя в целом типовую структуру указанных методов, новые процедуры являются предпочтительными в силу следующих характеристик:

— в задачах без ограничений на управление используется специальная функция варьирования (вместо константы), что приводит к обоснованной динамической коррекции направления антиградиента;

— в билинейных и квадратичных задачах обеспечивается нелокальное улучшение управлений, т. е. на каждой итерации не требуется решать задачу поиска приемлемого значения параметра варьирования;

— в невыпуклых задачах появляется незаурядная возможность улучшения стационарных управлений вследствие разрывного характера процедуры варьирования, что открывает новые перспективы на пути отыскания глобальных решений;

— в выпуклых квадратичных задачах метод проектирования реализует минимизирующую последовательность управлений для любого значения параметра варьирования.

Проводится обоснование построенных процедур в части проверки свойств улучшения и доказательства сходимости для определенных классов задач.

1. Постановка задачи. Аппроксимации функционала

Определим основную задачу оптимального управления соотношениями

$$\text{Задача (P):}\quad \Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x,u,t)dt \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \tag{3}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$ — независимая переменная, $u(t) \in R^r$ — управление, $x(t) \in R^n$ — фазовое состояние. Предположим, что в задаче (P)

1) функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на R^n, интегрант $F(x,u,t)$ и вектор-функция $f(x,u,t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов на $R^n \times U \times T$ вместе с производными по переменной x до второго порядка включительно;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 99-01-00400, № 00-01-81130) и программы “Университеты России — фундаментальные исследования” (проект № 990345).

2) существуют непрерывные производные $F_u(x,u,t)$, $f_u(x,u,t)$ на множестве $R^n \times U \times T$.

Класс допустимых управлений V введем как множество измеримых и ограниченных на T вектор-функций $u(t)$ с ограничением (3), где $U \subset R^r$ — выпуклое, замкнутое множество.

Выделим из общей постановки (1)–(3) типовые классы задач, линейных по управлению и линейно-квадратичных по фазовому состоянию. Для линейной по (x,u) управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + c(t), \quad x(t_0) = x^0,$$

определим простейшую задачу

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_T (\langle a(t), x\rangle + \langle b(t), u\rangle)\; dt \to \min, \quad u \in V.$$

С билинейной системой

$$\dot{x} = A(u,t)x + B(t)u + c(t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{4}$$

$$A(u,t) = A_0(t) + \sum_{j=1}^{r} A_j(t)u_j$$

свяжем два типа функционалов:

1) для билинейной задачи

$$\Phi_1(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_T (\langle a(u,t), x\rangle + \langle b(t), u\rangle) dt, \tag{5}$$

$$a(u,t) = a^0(t) + \sum_{j=1}^{r} a^j(t)u_j;$$

2) для билинейно-квадратичной задачи

$$\Phi_2(u) = \Phi_1(u) + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\int_T \langle x, Q(u,t)x\rangle dt, \tag{6}$$

$$Q(u,t) = Q_0(t) + \sum_{j=1}^{r} Q_j(t)u_j.$$

Определим необходимые конструкции и сформулируем некоторые утверждения для задачи (P).

Введем сопряженную переменную $\psi \in R^n$ и образуем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - F(x,u,t).$$

Определим сопряженную задачу

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) \tag{7}$$

и сформулируем необходимые условия оптимальности в задаче (P).

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — некоторое допустимое управление, $x(t,u)$ — соответствующая ему фазовая траектория, $\psi(t,u)$ — решение сопряженной системы (7) при $u = u(t)$, $x = x(t,u)$.

Будем использовать обозначения $H_u[t,u] = H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t)$, $t \in T$; $\mathbf{P_U}(\cdot)$ — оператор проектирования на множество U в евклидовой метрике.

Дифференциальный принцип максимума: для оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$, в задаче (P) необходимо, чтобы

$$u(t) = \mathbf{P_U}(u(t) + \alpha H_u[t,u]), \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

Условие стационарности: для оптимальности управления $u(t) \in \operatorname{int} U$, $t \in T$, в задаче (P) необходимо, чтобы

$$H_u[t,u] = 0, \quad t \in T. \tag{9}$$

Отметим, что вектор-функция $H_u[t,u]$ есть антиградиент функционала Φ на управлении $u(t)$. Укажем классическую аппроксимацию функционала Φ, на основе которой получаются приведенные условия оптимальности.

Пусть $u(t)$, $w(t)=u(t)+\Delta u(t)$, $t\in T$, — допустимые управления с фазовыми траекториями $x(t,u)$, $x(t,w)=x(t,u)+\Delta x(t)$.

Определим функционал (слабая вариация функционала Φ на паре u, w) $\delta_0\Phi(u,w) = -\int\limits_T \langle H_u[t,u],\Delta u(t)\rangle dt$. Тогда справедливо представление

$$\Delta_w\Phi(u)=\delta_0\Phi(u,w)+\eta_0 \tag{10}$$

с остаточным членом

$$\eta_0=-\int_T o_H(\|\Delta u(t)\|)dt-\int_T\langle\Delta_{w(t)}H_x[t,u],\Delta x(t)\rangle dt-\int_T o_H(\|\Delta x(t)\|)\ dt+o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|). \tag{11}$$

Здесь использованы обозначения

$$\Delta_w\Phi(u)=\Phi(w)-\Phi(u),$$
$$\Delta_{w(t)}H_x[t,u]=H_x(\psi(t,u),x(t,u),w(t),t)-H_x(\psi(t,u),x(t,u),u(t),t),$$

o_H, o_φ — остаточные члены (после линеаризации) приращений функций H, φ соответственно, $\|\cdot\|$ — евклидова норма конечномерного пространства.

С точки зрения качества аппроксимации отметим, что недостатком формулы (10) является присутствие линейного по Δx выражения в структуре остаточного члена η_0. Таким образом, слабая вариация $\delta_0\Phi$ имеет первый порядок точности относительно фазового приращения $\eta_0\sim\|\Delta x\|$. Аппроксимация (10) является точной ($\eta_0=0$) лишь для простейшей задачи оптимального управления.

Приведем нестандартные аппроксимации целевого функционала ([7], сс. 99, 102), имеющие более высокий порядок точности и служащие основой для последующих модификаций процедуры градиентного улучшения.

Определим функционал

$$\delta_1\Phi(u,w)=-\int_T\langle H_u(\psi(t,u),x(t,w),u(t),t),w(t)-u(t)\rangle dt. \tag{12}$$

Имеет место представление

$$\Delta_w\Phi(u)=\delta_1\Phi(u,w)+\eta_1 \tag{13}$$

с остаточным членом

$$\eta_1=o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|)-\int_T o_H(\|\Delta x(t)\|)dt-\int_T o_H^{(1)}(\|\Delta u(t)\|)dt.$$

Аппроксимацию $\delta_1\Phi(u,w)$ назовем первой квазивариацией функционала Φ на паре управлений u, w. В отличие от классической вариации $\delta_0\Phi(u,w)$ здесь производная H_u под знаком интеграла подсчитана вдоль возмущенной траектории $x(t,w)$. В результате аппроксимация (13) в полной мере обеспечивает линеаризацию функционала Φ по Δx: остаточный член η_1 имеет порядок $o(\|\Delta x\|)$. Это значит, что в билинейной задаче (4), (5) формула (13) является точной: $\eta_1=0$.

Введем в рассмотрение матричную сопряженную систему относительно $(n\times n)$ симметричной матричной функции $\Psi(t)$

$$\dot\Psi=-f_x[t,u]^T\Psi-\Psi f_x[t,u]-H_{xx}[t,u],\quad \Psi(t_1)=-\varphi_{xx}(x(t_1,u)). \tag{14}$$

Определим вспомогательную вектор-функцию

$$p(t,u,x)=\psi(t,u)+\Psi(t,u)(x-x(t,u)),$$

где $\Psi(t,u)$ — решение задачи Коши (14).

Квадратичная аппроксимация функционала Φ определяется соотношениями

$$\Delta_w \Phi(u) = \delta_2 \Phi(u,w) + \eta_2, \tag{15}$$

$$\delta_2 \Phi(u,w) = -\int_T \langle H_u(p(t,u,x(t,w)), x(t,w), u(t), t), w(t) - u(t)\rangle dt, \tag{16}$$

$$\eta_2 = o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \int_T o_H(\|\Delta x(t)\|^2) dt -$$
$$- \int_T \langle \Delta x(t), \Psi(t) o_f(\|\Delta x(t)\|)\rangle dt - \int_T o_H^{(2)}(\|\Delta u(t)\|) dt.$$

Аппроксимацию $\delta_2\Phi(u,w)$ назовем второй квазивариацией функционала Φ на паре управлений u, w. Здесь производная H_u рассматривается вдоль возмущенной пары траекторий $p(t,u,x(t,w))$, $x(t,w)$. Формула (15) определяет фазовую квадратичную аппроксимацию функционала Φ: остаточный член η_2 имеет порядок $o(\|\Delta x\|^2)$. Это значит, что в билинейно-квадратичной задаче (4), (6) аппроксимация (15) является точной: $\eta_2 = 0$.

В заключение установим связь (оценку) между вариацией управления $\Delta u(t)$ и фазовым приращением $\Delta x(t)$, $t \in T$.

Пусть $U_0 \subset U$, $X_0 \subset R^n$ – выпуклые компактные множества, содержащие управления $u(t)$, $w(t)$ и траектории $x(t,u)$, $x(t,w)$, $t \in T$, соответственно:

$$u(t),\ w(t) \in U_0, \quad x(t,u),\ x(t,w) \in X_0, \quad t \in T.$$

Тогда вектор-функция $f(x,u,t)$ (правая часть фазовой системы (2)) в силу предположений 1), 2) удовлетворяет условию Липшица вида

$$\|f(x(t,w), w(t), t) - f(x(t,u), u(t), t)\| \le L(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|), \quad t \in T,$$

для любой пары допустимых процессов $(u(t), x(t,u)) \in U_0 \times X_0$, $(w(t), x(t,w)) \in U_0 \times X_0$ с константой L, зависящей от множеств U_0, X_0.

На этом основании с помощью стандартной техники получаем оценку фазового приращения

$$\|\Delta x(t)\| \le C \int_T \|\Delta u(t)\|\, dt, \quad t \in T, \tag{17}$$

для любой пары допустимых процессов из $U_0 \times X_0$. При этом постоянная C не зависит от $\Delta u(t)$, но связана с множествами U_0, X_0. Если множество U ограничено, то полагаем $U_0 = U$.

2. Процедуры улучшения в задаче без ограничений

Рассмотрим задачу (P), когда $U = R^r$. В этом случае признаком оптимальности управления $u(t)$, $t \in T$, является условие стационарности (9). Построим процедуры улучшения управления $u(t)$ по функционалу $\Phi(u)$ на основе аппроксимаций (вариаций) $\delta_i \Phi(u,w)$, $i = 0,1,2$, определенных ранее.

Рассмотрим слабую вариацию $\delta_0\Phi(u,w)$, в рамках которой с помощью измеримой функции $\chi(t)$, $t \in T$, определим процедуру варьирования в виде

$$u_\chi(t) = u(t) + \chi(t) H_u[t,u], \quad \chi(t) \ge 0, \quad t \in T. \tag{18}$$

При этом

$$\delta_0 \Phi(u, u_\chi) = -\int_T \chi(t) g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \langle H_u[t,u], H_u[t,u]\rangle = \|H_u[t,u]\|^2.$$

Проведем параметризацию процедуры (18). С этой целью введем параметр $\alpha > 0$ и будем использовать две нормировки для функции варьирования

$$1)\quad 0 \le \chi(t) \le \alpha \quad (L_\infty(T));$$
$$2)\quad \chi(t) \ge 0, \quad \int_T \chi^2(t)dt = \alpha^2 \quad (L_2(T)).$$

Для заданного $\alpha > 0$ определим задачу поиска функции $\chi(t)$ условием минимума слабой вариации функционала: $\delta_0\Phi(u, u_\chi) \to \min$ при ограничениях 1) или 2).

Первая задача формулируется в виде

$$\int_T \chi(t)g(t)dt \to \max, \quad \chi(t) \in [0, \alpha],$$

и имеет очевидное решение $\chi_\alpha(t) \equiv \alpha$, $t \in T$, которое определяет стандартную процедуру слабого варьирования

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha H_u[t, u], \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \tag{19}$$

Вторая нормировка приводит к задаче ляпуновского типа

$$\int_T \chi(t)g(t)dt \to \max, \quad \chi(t) \ge 0, \quad \int_T \chi^2(t)dt = \alpha^2,$$

которая легко решается с помощью принципа максимума

$$\chi g(t) - \lambda\chi^2 \to \max, \quad \chi \ge 0 \quad \Rightarrow \lambda > 0,$$
$$\chi(t, \lambda) = \frac{1}{2\lambda} g(t), \quad \int_T \chi^2(t, \lambda)dt = \alpha^2.$$

В результате

$$\chi_\alpha(t) = \alpha \frac{g(t)}{\|g(\cdot)\|_{L_2}}, \quad t \in T,$$

и процедура варьирования приобретает вид

$$v_\alpha(t) = u(t) + \alpha \frac{g(t)}{\|g(\cdot)\|_{L_2}} H_u[t, u], \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \tag{20}$$

Отметим, что в отличие от стандартной процедуры (19) в модифицированном варианте (20) множителем при $H_u[t, u]$ фигурирует корректирующая функция $\frac{g(t)}{\|g(\cdot)\|_{L_2}}$ единичной L_2-нормы.

Коротко обсудим вопрос об улучшении. Поскольку в обоих случаях (19), (20) $\|\Delta_\alpha u(t)\| \le C_1\alpha$, $t \in T$, то $\|\Delta_\alpha x(t)\| \le C_2\alpha$, $t \in T$, в силу оценки (17). Следовательно, в аппроксимации

$$\Delta_w\Phi(u) = \delta_0\Phi(u, w) + \eta_0, \quad w = u_\alpha \vee v_\alpha,$$

остаточный член η_0 согласно представлению (11) имеет порядок $o(\alpha)$. Отсюда приходим к заключению: процедуры (19), (20) обеспечивают локальное (для малых $\alpha > 0$) улучшение любого нестационарного управления $u(t)$ в задаче (P) без ограничений

$$\delta_0(u) = \int_T g(t)dt > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(w) < \Phi(u), \quad w = u_\alpha \vee v_\alpha, \quad \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Улучшение приобретает нелокальный характер (для любых $\alpha > 0$) в рамках простейшей задачи оптимального управления.

Перейдем к рассмотрению квазивариаций $\delta_i\Phi(u, w)$, $i = 1, 2$, с позиций улучшения управления $u(t)$, $t \in T$. В соответствующих формулах (12), (16) производная H_u зависит от фазовой траектории $x(t, w)$, подлежащей отысканию в результате варьирования. В этой ситуации вместо неизвестной вектор-функции $x(t,w)$ введем фазовый параметр $x \in R^n$ и организуем варьирование с постоянным шагом $\alpha > 0$ по правилу:

$$\begin{aligned}
&1) \quad u_\alpha^{(1)}(t,x) = u(t) + \alpha H_u(\psi(t,u), x, u(t), t), \quad t \in T, \ \text{ для } \delta_1\Phi(u,w);\\
&2) \quad u_\alpha^{(2)}(t,x) = u(t) + \alpha H_u(p(t,u,x), x, u(t), t), \quad t \in T, \ \text{ для } \delta_2\Phi(u,w),\\
&\qquad p(t,u,x) = \psi(t,u) + \Psi(t,u)(x - x(t,u)).
\end{aligned}$$

Далее, найдем соответствующие траектории $x_\alpha^{(i)}(t)$, $t \in T$, $i = 1,2$, как решения задач Коши для фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u_\alpha^{(i)}(t,x), t), \quad x(t_0) = x^0. \tag{21}$$

Положим $v_\alpha^{(i)}(t) = u_\alpha^{(i)}(t, x_\alpha^{(i)}(t))$, $t \in T$. Это семейство управлений варьирования на выходе процедуры улучшения, причем согласно построению $x_\alpha^{(i)}(t) = x_\alpha^{(i)}(t, v_\alpha^{(i)})$ — соответствующие фазовые траектории. При этом квазивариации имеют порядок α и отрицательны

$$\begin{aligned}
\delta_1\Phi(u, v_\alpha^{(1)}) &= -\alpha \int_T \|H_u(\psi(t,u), x_\alpha^{(1)}(t), u(t), t)\|^2 dt = -\alpha \delta_\alpha^{(1)}(u),\\
\delta_2\Phi(u, v_\alpha^{(2)}) &= -\alpha \int_T \|H_u(p(t,u,x_\alpha^{(2)}(t)), x_\alpha^{(2)}(t), u(t), t)\|^2 dt = -\alpha \delta_\alpha^{(2)}(u).
\end{aligned}$$

Проведем обоснование свойств улучшения.

Предположим, что семейство допустимых процессов $(v_\alpha^{(i)}(t),\ x_\alpha^{(i)}(t))$ ограничено при $\alpha \in (0, \alpha_0]$ (для малых $\alpha > 0$). Тогда вариации $\Delta_\alpha^{(i)} u(t) = v_\alpha^{(i)}(t) - u(t)$, $i = 1,2$, вместе с фазовыми приращениями $\Delta_\alpha^{(i)} x(t) = x_\alpha^{(i)}(t) - x(t,u)$ (оценка (17)) имеют порядок α

$$\|\Delta_\alpha^{(i)} u(t)\| \le C_1 \alpha, \quad \|\Delta_\alpha^{(i)} x(t)\| \le C_2 \alpha, \quad t \in T. \tag{22}$$

Это значит, что в аппроксимациях

$$\Delta_w \Phi(u) = \delta_i \Phi(u,w) + \eta_i, \quad i = 1,2, \quad w = v_\alpha^{(1)} \vee v_\alpha^{(2)}, \tag{23}$$

остатки η_i — величины порядка $o(\alpha)$.

Пусть базовое управление $u(t)$, $t \in T$, не является стационарным, т. е. $\delta_0(u) > 0$. Установим асимптотическую связь между величинами $\delta_\alpha^{(i)}(u)$, $i = 1,2$, и невязкой стационарности $\delta_0(u)$.

На основании непрерывности производной $H_u(\psi, x, u, t)$ по x с учетом оценки (22) получаем представления

$$\begin{aligned}
H_u(\psi(t,u), x_\alpha^{(1)}(t), u(t), t) &= H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t) + O_1(\alpha),\\
H_u(p(t,u,x_\alpha^{(2)}(t)), x_\alpha^{(2)}(t), u(t), t) &= H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t) + O_2(\alpha),
\end{aligned}$$

где $O_i(\alpha)$, $i = 1,2$, — величины порядка α.

Следовательно, имеет место соотношение

$$\delta_\alpha^{(i)}(u) = \delta_0(u) + O^{(i)}(\alpha), \quad i = 1,2, \tag{24}$$

в силу которого

$$\delta_i \Phi(u,w) = -\alpha \delta_0(u) + o_i(\alpha), \quad w = v_\alpha^{(1)} \vee v_\alpha^{(2)}. \tag{25}$$

В совокупности с (23) заключаем, что управления $v_\alpha^{(i)}(t)$, $t \in T$, обеспечивают локальное улучшение нестационарного управления $u(t)$ по функционалу Φ.

Выясним возможности нелокального улучшения в рамках предлагаемых процедур.

Рассмотрим билинейную задачу (4), (5). В этом случае квазивариация $\delta_1\Phi(u,w)$ дает точную аппроксимацию функционала Φ, т. е.

$$\Delta_w \Phi(u) = \delta_1 \Phi(u,w) = -\alpha \delta_\alpha^{(1)}(u) \le 0, \quad w = v_\alpha^{(1)}, \quad \alpha > 0.$$

Аналогичным свойством для билинейно-квадратичной задачи (4), (6) обладает квазивариация $\delta_2\Phi(u,w)$, т. е.

$$\Delta_w\Phi(u) = \delta_2\Phi(u,w) = -\alpha\delta_\alpha^{(2)}(u) \le 0, \quad w = v_\alpha^{(2)}, \quad \alpha > 0.$$

Таким образом, для указанных классов задач представленные процедуры обеспечивают нелокальное улучшение ($\Delta_w\Phi(u) \le 0$, $w = v_\alpha^{(1)} \vee v_\alpha^{(2)}$, $\alpha > 0$) любого нестационарного управления. Процедуры, связанные с классической вариацией $\delta_0\Phi(u,w)$, таким свойством не обладают.

Коротко обсудим ситуацию, когда $u(t)$, $t \in T$, — стационарное управление. Тогда в процедурах варьирования 1), 2) при $x = x(t,u)$ имеем $u_\alpha^{(i)}(t, x(t,u)) = u(t)$, $i = 1,2$. Это значит, что траектория $x(t,u)$ является решением фазовой системы (21), и других решений система, вообще говоря, не имеет в силу дифференцируемости по x правой части. Это значит, что управление $u(t)$ является выходным для указанных процедур, т. е. эффект улучшения в данном случае отсутствует.

Таким образом, модифицированные процедуры 1), 2) теряют свойство улучшения, когда $u(t)$ — стационарное управление. Это связано с гладким характером варьирования: управления $u_\alpha^{(i)}(x,t)$ дифференцируемы по x.

3. Разрывные процедуры улучшения в задаче без ограничений

Для расширения возможностей улучшения построим разрывные по фазовому состоянию процедуры варьирования управлений на основе квазивариаций $\delta_i\Phi(u,w)$, $i = 1,2$. Объединяя оба случая, рассмотрим интегральный функционал

$$S(\Delta u) = \int_T \langle s(t), \Delta u(t)\rangle dt \tag{26}$$

с измеримой, ограниченной вектор-функцией $s(t)$, $t \in T$.

Здесь $\Delta u(t) = w(t) - u(t)$ — вариация допустимого управления $u(t)$. Функционал $S(\Delta u)$ отражает структуру квазивариаций $\delta_i\Phi(u,w)$, когда вместо $x(t,w)$ фигурирует произвольная фазовая траектория $x(t)$.

Для заданного $\alpha > 0$ сформулируем задачу поиска вариации $\Delta u(t)$ в некоторой норме пространства R^r

$$S(\Delta u) \to \max, \quad \|\Delta u(t)\| = \alpha. \tag{27}$$

Вместо стандартной евклидовой нормы будем использовать чебышевскую норму

$$\|\Delta u(t)\| = \max_{1\le j\le r} |\Delta u_j(t)|. \tag{28}$$

Поскольку

$$S(\Delta u) = \sum_{j=1}^{r} \int_T s_j(t)\Delta u_j(t) dt,$$

то задача (27) перейдет в серию покомпонентных задач с модульным ограничением

$$\int_T s_j(t)\Delta u_j(t)dt \to \max, \quad |\Delta u_j(t)| \le \alpha.$$

Решение очевидно и имеет вид $\Delta_\alpha u_j(t) = \alpha \operatorname{sign} s_j(t)$, $t \in T$, $j = \overline{1,r}$, причем в случае $s_j(t) = 0$ вариация $\Delta_\alpha u_j(t)$ принимает любое значение из отрезка $[-\alpha, \alpha]$.

Таким образом, решение задачи (27) при нормировке (28) представляется в виде $\Delta_\alpha u(t) = \alpha \operatorname{sign} s(t)$, $t \in T$, с указанной расшифровкой на случай нуля. При этом

$$S(\Delta_\alpha u) = \alpha \int_T \sum_{j=1}^{r} |s_j(t)| dt = \alpha \int_T \|s(t)\|_1 dt.$$

Проведем конкретизацию полученных соотношений в рамках квазивариаций $\delta_i\Phi(u,w)$, $i = 1,2$. Заменяя в формулах (12), (16) траекторию $x(t,w)$ произвольной абсолютно непрерывной вектор-функцией $x(t)$, приходим к функционалам типа (26)

$$S_1(\Delta u) = \int_T \langle H_u(\psi(t,u), x(t), u(t), t), \Delta u(t)\rangle dt,$$
$$S_2(\Delta u) = \int_T \langle H_u(p(t,u,x(t)), x(t), u(t), t), \Delta u(t)\rangle dt.$$

Согласно предыдущему максимизирующие вариации имеют вид

$$\Delta_\alpha^{(1)} u(t, x(t)) = \alpha \operatorname{sign} H_u(\psi(t,u), x(t), u(t), t),$$
$$\Delta_\alpha^{(2)} u(t, x(t)) = \alpha \operatorname{sign} H_u(p(t,u,x(t)), x(t), u(t), t),$$

что приводит к следующим процедурам варьирования:

$$u_\alpha^{(1)}(t,x) = u(t) + \alpha \operatorname{sign} H_u(\psi(t,u), x, u(t), t), \quad (29)$$
$$u_\alpha^{(2)}(t,x) = u(t) + \alpha \operatorname{sign} H_u(p(t,u,x), x, u(t), t). \quad (30)$$

Далее действуем по схеме предыдущего раздела — находим решения $x_\alpha^{(i)}(t)$ фазовой системы (21) и формируем порождающие управления

$$v_\alpha^{(i)}(t) = u_\alpha^{(i)}(t, x_\alpha^{(i)}(t)), \quad t \in T, \quad i = 1,2.$$

Соответствующие значения квазивариаций —

$$\delta_1\Phi(u, v_\alpha^{(1)}) = -\alpha \int_T \|H_u(\psi(t,u), x_\alpha^{(1)}(t), u(t), t)\|_1 \, dt = -\alpha\delta_\alpha^{(1)}(u),$$
$$\delta_2\Phi(u, v_\alpha^{(2)}) = -\alpha \int_T \|H_u(p(t,u,x_\alpha^{(2)}(t)), x_\alpha^{(2)}(t), u(t), t)\|_1 \, dt = -\alpha\delta_\alpha^{(2)}(u).$$

Свойства улучшения в нестационарном случае обосновываются вполне аналогично предыдущему. При этом необходимо использовать модульную невязку условия стационарности

$$\delta_0(u) = \int_T \|H_u[t,u]\|_1 \, dt.$$

Тогда справедливы соотношения (24), (25), которые обеспечивают локальное улучшение управления $u(t)$ с помощью семейства $v_\alpha^{(i)}(t)$.

В данной ситуации (фазовая система (21) разрывна по x) необходимо прокомментировать особый случай, когда функция переключения H_u обращается в нуль (траектория системы (21) находится на поверхности разрыва правой части).

Предположим, что управление u является скалярным ($r = 1$), возьмем за основу процедуру (29) и введем обозначение для функции переключения $g(t,x) = H_u(\psi(t,u), x, u(t), t)$.

Решение $x_\alpha(t)$, $t \in T$, системы (21) назовем особым на промежутке $T_0 \subset T$, если $g(t, x_\alpha(t)) = 0$, $t \in T_0$.

При этом порождающее управление $v_\alpha(t)$, $t \in T_0$, находится в результате дифференцирования этого тождества по времени t в силу фазовой системы. Таким образом, с учетом (29) на особом участке имеет место соотношение

$$\alpha \operatorname{sign} 0 = v_\alpha(t) - u(t), \quad t \in T_0,$$

которое конкретизирует процедуру (29) и правую часть системы (21) в особом случае.

Отметим, что стационарная фазовая траектория $x(t,u)$, $t \in T$, является особым решением системы (21) всюду на T, ибо $g(t, x(t,u)) = 0$, $t \in T$, причем $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Основной эффект построенных процедур варьирования связан с возможностью улучшения стационарных управлений. Такое незаурядное свойство обусловлено разрывным характером варьирования, что приводит, в свою очередь, к разрывной по состоянию x фазовой системе

(21). В результате появляется возможность не единственного решения. Стационарная фазовая траектория $x(t,u)$ является особым решением системы (21) для любого $\alpha > 0$ ($\delta_0(u) = 0$), однако при наличии других решений $x_\alpha^{(i)}(t)$ с условием $\delta_\alpha^{(i)}(u) \neq 0$, $i = 1,2$, вообще говоря, происходит улучшение (по крайней мере, локальное) стационарного режима $(u(t), x(t,u))$.

4. Проективные методы улучшения в задаче с ограничениями

Рассмотрим задачу (P) в исходной постановке (U — выпуклое, замкнутое множество) и проведем обобщение построенных ранее процедур варьирования с обоснованием свойства улучшения и доказательством сходимости соответствующего метода. В рамках данной задачи естественно использовать операцию проектирования на множество U ($\mathbf{P_U}$ — оператор проектирования в евклидовой метрике). При этом базовым условием оптимальности является дифференциальный принцип максимума (ДПМ) в проективной форме (8).

Пусть $(u(t), x(t,u))$, $t \in T$, — допустимая пара в задаче (P), $\psi(t,u)$, $\Psi(t,u)$ — решения векторной и матричной сопряженных систем, $p(t,u,x) = \psi(t,u) + \Psi(t,u)(x - x(t,u))$, $x \in R^n$, — вспомогательная вектор-функция.

Для $\alpha > 0$ определим процедуры варьирования

$$u_\alpha^{(1)}(t,x) = \mathbf{P_U}(u(t) + \alpha H_u(\psi(t,u), x, u(t), t)), \tag{31}$$

$$u_\alpha^{(2)}(t,x) = \mathbf{P_U}(u(t) + \alpha H_u(p(t,u,x), x, u(t), t)). \tag{32}$$

Отметим, что вектор-функции $u_\alpha^{(i)}(t,x)$, $i = 1,2$, непрерывны по $x \in R^n$ (оператор $\mathbf{P_U}$ сохраняет свойство непрерывности).

Далее, найдем решение $x_\alpha^{(i)}(t)$, $t \in T$, фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u_\alpha^{(i)}(t,x), t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{33}$$

вместе с управлением $v_\alpha^{(i)}(t) = u_\alpha^{(i)}(t, x_\alpha^{(i)}(t))$, $t \in T$, $i = 1,2$.

Определим задачу поиска параметра α условием улучшения функционала

$$\Phi(v_\alpha^{(i)}) \leq \Phi(u), \quad \alpha > 0.$$

Проведем обоснование свойства улучшения для общего случая с $i = 2$ (вторая процедура). Предположим, что в рамках задачи Коши (33) семейство допустимых пар $(v_\alpha^{(2)}(t), x_\alpha^{(2)}(t))$, $t \in T$, ограничено для $\alpha \in (0, \alpha_0]$

$$v_\alpha^{(2)}(t) \in U_0, \quad x_\alpha^{(2)}(t) \in X_0, \quad t \in T, \quad \alpha \in (0, \alpha_0],$$

где $U_0 \subset U$, $X_0 \subset R^n$ — выпуклые компактные множества.

Отсюда следует ограниченность семейства вспомогательных вектор-функций $p_\alpha(t) = p(t, u, x_\alpha^{(2)}(t))$, $t \in T$, для $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

Согласно построению вспомогательное управление $v_\alpha^{(2)}(t)$ определяется условием

$$v_\alpha^{(2)}(t) = \mathbf{P_U}(u(t) + \alpha H_u(p_\alpha(t), x_\alpha^{(2)}(t), u(t), t)), \quad t \in T. \tag{34}$$

Используя известное свойство оператора $\mathbf{P_U}$ (условие Липшица), имеем

$$\|v_\alpha^{(2)}(t) - u(t)\| = \|\mathbf{P_U}(u(t) + \alpha H_u(p_\alpha(t), x_\alpha^{(2)}(t), u(t), t)) - \mathbf{P_U}(u(t))\| \leq$$
$$\leq \alpha \|H_u(p_\alpha(t), x_\alpha^{(2)}(t), u(t), t)\| \leq C\alpha, \quad t \in T, \quad \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Из общей оценки (17) для приращений $\Delta u(t) = v_\alpha^{(2)}(t) - u(t)$, $\Delta x(t) = x_\alpha^{(2)}(t) - x(t,u)$ следует, что величина $\|\Delta x(t)\|$ имеет порядок α.

Следовательно, справедливо представление

$$\Phi(v_\alpha^{(2)}) - \Phi(u) = \delta_2 \Phi(u, v_\alpha^{(2)}) + o(\alpha), \tag{35}$$

причем квазивариация $\delta_2 \Phi(u, v_\alpha^{(2)})$ есть величина порядка α.

Как известно, проективное соотношение (34) эквивалентно неравенству

$$\langle v_\alpha^{(2)}(t) - u(t) - \alpha H_u(p_\alpha(t), x_\alpha^{(2)}(t), u(t), t),\ v_\alpha^{(2)}(t) - v(t)\rangle \le 0, \quad v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Положим $v(t) = u(t)$ и проинтегрируем неравенство по $t \in T$. В результате получим оценку уменьшения второй квазивариации функционала

$$\delta_2\Phi(u, v_\alpha^{(2)}) \le -\delta_\alpha^{(2)}(u), \tag{36}$$

$$\delta_\alpha^{(2)}(u) = \frac{1}{\alpha}\int_T \|v_\alpha^{(2)}(t) - u(t)\|^2 dt.$$

Выясним смысл величины $\delta_\alpha^{(2)}(u)$. Если $\delta_\alpha^{(2)}(u) = 0$ для некоторого $\alpha > 0$, то

$$v_\alpha^{(2)}(t) = u(t), \quad x_\alpha^{(2)}(t) = x(t,u), \quad p_\alpha(t) = \psi(t,u), \quad t \in T.$$

Соотношение (34) принимает вид

$$u(t) = \mathbf{P}_\mathbf{U}(u(t) + \alpha H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t)), \quad t \in T.$$

Это ДПМ для управления $u(t)$ в задаче (P), поэтому величина $\delta_\alpha^{(2)}(u)$ является невязкой ДПМ для управления $u(t)$. Отметим, что $\delta_\alpha^{(2)}(u) \sim \alpha$.

Сформулируем основное утверждение о локальном уменьшении целевого функционала: *если управление $u \in V$ не удовлетворяет ДПМ в задаче* (P)*, то вторая процедура обеспечивает локальное улучшение $\Phi(v_\alpha^{(2)}) < \Phi(u)$ для малых $\alpha > 0$.*

Действительно, согласно аппроксимации (35) с учетом оценки (36) получаем

$$\Phi(v_\alpha^{(2)}) - \Phi(u) \le -\delta_\alpha^{(2)}(u) + o(\alpha).$$

По условию $\delta_\alpha^{(2)}(u) > 0$ для $\alpha > 0$, причем $\delta_\alpha^{(2)}(u) \le C\alpha$. Следовательно, имеет место утверждение об улучшении.

При второй процедуре улучшения в рамках билинейно-квадратичной задачи (4), (6) аппроксимация (35) является точной, поэтому

$$\Phi(v_\alpha^{(2)}) - \Phi(u) \le -\delta_\alpha^{(2)}(u), \quad \alpha > 0.$$

Это означает нелокальное улучшение для любого управления $u \in V$, не удовлетворяющего ДПМ: $\Phi(v_\alpha^{(2)}) < \Phi(u)$ для любого $\alpha > 0$.

Аналогичным образом проводится обоснование первой процедуры ($i = 1$) с нелокальным улучшением для билинейной задачи.

Замечание. Стандартная процедура проектирования (метод проекции градиента) получается из (31), (32) при $x = x(t,u)$

$$u_\alpha(t) = \mathbf{P}_\mathbf{U}(u(t) + \alpha H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t)), \quad t \in T.$$

При этом теряется свойство нелокального улучшения для билинейных и квадратичных задач, т. е. на каждой итерации необходимо проводить α-параметрический поиск с целью уменьшения функционала.

Представим вторую процедуру улучшения в итерационной форме и исследуем вопрос о сходимости соответствующего метода.

Рассмотрим билинейно-квадратичную задачу (4), (6).

Зафиксируем параметр $\alpha > 0$. Пусть $k = 1, 2, \ldots$ — номер итерации, $u^k(t)$ — соответствующее управление. Построим управление $u^{k+1}(t)$ согласно второй процедуре улучшения (зависимость от α не подчеркивается). Оценка уменьшения по функционалу имеет вид

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \le -\delta_\alpha(u^k),$$

$$\delta_\alpha(u^k) = \frac{1}{\alpha}\int_T \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 dt.$$

Пусть функционал $\Phi(u)$ в данной задаче ограничен снизу на множестве V допустимых управлений. Тогда $\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \to 0$, $k \to \infty$, в силу монотонности метода. С учетом предыдущей оценки получаем свойство сходимости по невязке ДПМ, т. е. $\delta_\alpha(u^k) \to 0$, $k \to \infty$.

Перейдем к выпукло-квадратичной задаче, которая описывается соотношениями

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \int_T \Big(\langle a(t), x\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Q(t)x\rangle\Big)dt,$$
$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + c(t), \quad x(t_0) = x^0,$$
$$u(t) \in U, \quad t \in T,$$

с условием неотрицательной определенности квадратичных форм $D \geq 0$, $Q(t) \geq 0$, $t \in T$.

В этом случае производная H_u не зависит от (u, x) и имеет вид $H_u(\psi, t) = B(t)^T\psi$. Матричная сопряженная система также не зависит от (u, x)

$$\dot{\Psi} = -A(t)^T\Psi - \Psi A(t) + Q(t), \quad \Psi(t_1) = -D. \tag{37}$$

Пусть $\Psi(t)$, $t \in T$, — ее решение. Тогда формула приращения функционала Φ принимает вид

$$\Delta_w\Phi(u) = -\int_T \langle \psi(t,u) + \Psi(t)(x(t,w) - x(t,u)), B(t)(w(t) - u(t))\rangle dt. \tag{38}$$

Для выпуклой задачи справедлива оценка

$$\Delta_w\Phi(u) \geq -\int_T \langle \psi(t,u), B(t)(w(t) - u(t))\rangle dt.$$

Сравнивая с (38), получаем вспомогательное неравенство

$$\int_T \langle \Psi(t)(x(t,w) - x(t,u)), B(t)(w(t) - u(t))\rangle dt \leq 0. \tag{39}$$

Сформулируем итерационный метод на основе второй процедуры улучшения.

Зафиксируем некоторое значение параметра $\alpha > 0$ (напр., $\alpha = 1$) и найдем решение $\Psi(t)$, $t \in T$, матричной сопряженной системы (37).

Пусть на k-й итерации имеется допустимая пара $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$. Вычислим решение $\psi^k(t)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A(t)^T\psi + Q(t)x^k(t), \quad \psi(t_1) = -(c + Dx^k(t_1)).$$

Сформируем вектор-функцию $p^k(t,x) = \psi^k(t) + \Psi(t)(x - x^k(t))$ и управление $v^k(t,x) = \mathbf{P_U}(u^k(t) + \alpha H_u(p^k(t,x), t))$.

Найдем решение $x^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v^k(t,x) + c(t), \quad x(t_0) = x^0$$

вместе с управлением $u^{k+1}(t) = v^k(t, x^{k+1}(t))$, $t \in T$.

В результате получим допустимую пару $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$, что и завершает итерацию метода.

Отметим вычислительные затраты на итерацию — две задачи Коши (для сопряженной и фазовой систем). При этом предполагается, что операция проектирования реализуется аналитически: управление $v^k(t,x)$ находится по явной формуле.

Обозначим $p^k(t) = \psi^k(t) + \Psi(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t))$ и представим итерационную формулу рассматриваемого метода

$$u^{k+1}(t) = \mathbf{P_U}(u^k(t) + \alpha H_u(p^k(t), t)), \quad t \in T.$$

В эквивалентной записи это соотношение имеет вид

$$\langle u^{k+1}(t) - u^k(t) - \alpha H_u(p^k(t), t), u^{k+1}(t) - v(t)\rangle \leq 0, \quad v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Отсюда получим оценку

$$\langle H_u(p^k(t),t), v(t)-u^{k+1}(t)\rangle \le \frac{1}{\alpha}\langle u^{k+1}(t)-u^k(t), v(t)-u^{k+1}(t)\rangle. \tag{40}$$

Теорема. *Пусть в выпукло-квадратичной задаче множество U ограничено. Тогда метод проектирования порождает минимизирующую последовательность: $\Phi(u^k)\to\Phi(u^*)$, $k\to\infty$, где u^* — оптимальное управление.*

Доказательство. Согласно (38) при $u=u^k$, $w=u^*$ имеем

$$0\le \Phi(u^k)-\Phi(u^*)=\int_T \langle \psi^k(t)+\Psi(t)(x^*(t)-x^k(t)), B(t)(u^*(t)-u^k(t))\rangle dt.$$

Здесь $x^*(t)=x(t,u^*)$ — оптимальная фазовая траектория.

Используем представление

$$x^*(t)-x^k(t)=(x^*(t)-x^{k+1}(t))+(x^{k+1}(t)-x^k(t)).$$

Тогда

$$\Phi(u^k)-\Phi(u^*)=\int_T\langle\Psi(t)(x^*(t)-x^{k+1}(t)), B(t)(u^*(t)-u^k(t))\rangle dt+\int_T\langle p^k(t), B(t)(u^*(t)-u^k(t))\rangle dt.$$

Аналогичным образом

$$u^*(t)-u^k(t)=(u^*(t)-u^{k+1}(t))+(u^{k+1}(t)-u^k(t)).$$

Поэтому

$$\Phi(u^k)-\Phi(u^*)=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{41}$$

где

$$I_1=\int_T\langle\Psi(t)(x^*(t)-x^{k+1}(t)), B(t)(u^*(t)-u^{k+1}(t))\rangle dt,$$
$$I_2=\int_T\langle\Psi(t)(x^*(t)-x^{k+1}(t)), B(t)(u^{k+1}(t)-u^k(t))\rangle dt,$$
$$I_3=\int_T\langle p^k(t), B(t)(u^*(t)-u^{k+1}(t))\rangle dt,$$
$$I_4=\int_T\langle p^k(t), B(t)(u^{k+1}(t)-u^k(t))\rangle dt.$$

В силу неравенства (39) $I_1\le 0$. Согласно оценке (40) при $v(t)=u^*(t)$ получаем

$$I_3\le\frac{1}{\alpha}\int_T\langle u^{k+1}(t)-u^k(t), u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt.$$

С учетом формулы приращения (38) $I_4=\Phi(u^k)-\Phi(u^{k+1})$. В результате из (41) найдем

$$\Phi(u^{k+1})-\Phi(u^*)\le I_2+\frac{1}{\alpha}\int_T\langle u^{k+1}(t)-u^k(t), u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt.$$

В силу ограниченности множества U имеем $\|u^*(t)-u^{k+1}(t)\|\le C_1$, $t\in T$. При этом семейство фазовых траекторий $(x(t,u),\ u\in V)$ также ограничено (линейная фазовая система), поэтому $\|x^*(t)-x^{k+1}(t)\|\le C_2$, $t\in T$. Наконец, по непрерывности $\|\Psi(t)\|\le C_3$, $\|B(t)\|\le C_4$, $t\in T$. Следовательно,

$$I_2\le C\int_T\|u^{k+1}(t)-u^k(t)\|dt,\quad C=C_2C_3C_4,$$
$$\int_T\langle u^{k+1}(t)-u^k(t), u^*(t)-u^{k+1}(t)\rangle dt\le C_1\int_T\|u^{k+1}(t)-u^k(t)\|dt.$$

В результате получаем требуемую оценку для приращения функционала

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leq (C + C_1/\alpha)\delta_k, \tag{42}$$

$$\delta_k = \int_T \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\| dt.$$

В условиях теоремы функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на V, поэтому имеет место сходимость по невязке $\delta_\alpha(u^k)$, т. е.

$$\int_T \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 dt \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поскольку в силу неравенства Гёльдера

$$\delta_k^2 \leq (t_1 - t_0) \int_T \|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|^2 dt,$$

то $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$. С учетом оценки (42) приходим к утверждению теоремы.

Литература

1. Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 487 с.
2. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
3. Тятюшкин А.И. *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 193 с.
4. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.* – Новосибирск: Наука, 1997. – 175 с.
5. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. *Методы оптимизации в задачах и упражнениях.* – М.: Физматлит, 1999. – 208 с.
6. Pytlak R. *Numerical methods for optimal control problems with state constraints* // Lect. Notes Math. – 1999. – № 1707. – 215 p.
7. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

Иркутский государственный университет

Поступила 24.08.2001