И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.977

С.Н. ПОПОВА

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ И ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Наряду с исходной линейной однородной дифференциальной системой $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, с ограниченным кусочно-непрерывным операторным коэффициентом $A : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) =: \mathrm{M}_n$ и матрицей Коши $X(t,s)$ рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где оператор-функция $B : \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) =: \mathrm{M}_{n,m}$ также ограничена и кусочно-непрерывна. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$. Норму в $\mathbb{R}^n$ предполагаем евклидовой, а в $\mathrm{M}_{k,l}$ — операторной, индуцируемой евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^l$ и $\mathbb{R}^k$. Всюду далее E — единичная матрица, $\mathrm{B}_\delta(P) := \{H \in \mathrm{M}_{k,l} : \|H - P\| \le \delta\}$, $\mathrm{KC}_{k,l}(I)$ — пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U(\cdot)$, определенных на промежутке I числовой оси и действующих в $\mathrm{M}_{k,l}$, с равномерной нормой $\|U\|_C = \sup\limits_{t \in I} \|U(t)\|$. Для любого набора векторов $\xi_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, l$, запись $[\xi_1, \dots, \xi_l]$ будет обозначать матрицу из $\mathrm{M}_{k,l}$, имеющую своими столбцами векторы ξ_i. Пусть также $a := \sup\limits_t \|A(t)\|$, $b := \sup\limits_t \|B(t)\|$; $Q(t,s) := X(t,s)B(s)$.

Напомним [1], что система (1) называется *σ-равномерно вполне управляемой*, если существует такое положительное число α, что *матрица управляемости* (*матрица Калмана*) $W(t_0, t_0 + \sigma) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0, s) Q^\top(t_0, s)\, ds$ при всяких $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет неравенству $\xi^\top W(t_0, t_0 + \sigma)\xi \ge \alpha \|\xi\|^2$ ($^\top$ означает транспонирование).

Пусть управление $u(\cdot)$ в системе (1) задано по принципу линейной обратной связи

$$u(t) = U(t)x, \tag{2}$$

где $U \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$. Тогда (1) принимает вид линейной однородной системы $\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x$, для которой определена матрица Коши $X_U(t,s)$.

Определение. Будем говорить, что система (1) *σ-равномерно локально достижима*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, позволяющее для всякой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E)$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найти управляющую матрицу $U(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0 + \sigma])$, $\|U\|_C \le \varepsilon$, которая обеспечивает равенство

$$X_U(t_0 + \sigma, t_0) = X(t_0 + \sigma, t_0)H. \tag{3}$$

Отметим, что в [2], [3] было введено понятие равномерной локальной достижимости системы (1) относительно множества $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{m,n}$. По определению система (1) называется σ-равномерно локально достижимой (относительно $\mathbb{U}$), если существует $\delta > 0$ такое, что для любой $H \in \mathrm{B}_\delta(E)$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется кусочно-непрерывное ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{U}$,

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-01-00454) и Конкурсным центром Министерства образования России (грант № Е00-1.0-5).

гарантирующее выполнение равенства (3). Очевидно, свойство σ-равномерной локальной достижимости системы (1) равносильно свойству σ-равномерной локальной достижимости этой системы относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{B}_\varepsilon(0)$ при каждом $\varepsilon > 0$.

Свойство равномерной локальной достижимости позволяет применять к линейным управляемым системам метод поворотов В.М. Миллионщикова [4] (см. также [5]), с помощью которого в ряде случаев удается доказать утверждения о локальной управляемости асимптотических инвариантов системы (1) под действием управлений вида (2) (подробный обзор результатов содержится в [3]).

В [6] было показано, что из σ-равномерной полной управляемости системы (1) следует ее σ-равномерная локальная достижимость. В этой статье доказана эквивалентность свойств равномерной локальной достижимости и равномерной полной управляемости системы (1).

Лемма 1. *Система* (1) *σ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существует такое число $\gamma > 0$, что для произвольных $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u \in \mathrm{KC}_{m,1}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|u\|_C \leq \gamma\|\eta\|$, гарантирующее выполнение равенства* $\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)u(s)ds{=}\eta$.

Доказательство. Воспользуемся критерием равномерной полной управляемости, который был получен в [7]: система (1) σ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда при некотором $\gamma > 0$ для произвольных $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,1}([t_0, t_0{+}\sigma])$, удовлетворяющее условию $\|u\|_C \leq \gamma\|x_0\|$ и такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (1) с управлением $u = u(\cdot)$ и начальным условием $x(t_0) = x_0$ в момент времени $t_0{+}\sigma$ попадает в начало координат. Единственным решением этой задачи Коши является функция

$$x(t) = X(t,t_0)\Big(x_0 + \int_{t_0}^{t} Q(t_0,s)u(s)ds\Big).$$

Для выполнения условия $x(t_0{+}\sigma) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)u(s)\,ds = -x_0$. Полагая $\eta = -x_0$, получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть система* (1) *σ-равномерно локально достижима. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого вектора $\xi \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$ и каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется управление $v(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,1}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|v\|_C \leq \alpha$, гарантирующее выполнение равенства*

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)v(s)ds = \xi. \tag{4}$$

Доказательство. Зафиксируем какое-либо $\varepsilon_0 > 0$ и обозначим $l = \exp((a+b\varepsilon_0)\sigma)$, $\alpha_0 = \varepsilon_0 l$. Возьмем любое $\alpha \in]0, \alpha_0]$, положим $\varepsilon = \alpha/l \in]0, \varepsilon_0]$ и по величине ε в соответствии со свойством равномерной локальной достижимости найдем $\delta > 0$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathrm{B}_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$ произвольны. Поскольку матрица $H := E + [\xi, 0, \ldots, 0]$ удовлетворяет соотношению $\|H - E\| = \|(H-E)e_1\| = \|\xi\| \leq \delta$, найдется управление $U(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|U\|_C \leq \varepsilon$, обеспечивающее равенство (3) с выбранной H. Обозначим $Z(t) = X_U(t,t_0)$, $V(t) = U(t)Z(t)$. Тогда $V(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|V\|_C \leq \|U\|_C\|Z\|_C \leq \varepsilon\exp((a+b\varepsilon)\sigma) \leq \varepsilon\exp((a+b\varepsilon_0)\sigma) = \varepsilon l = \alpha$, а матричная функция $Z(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $\dot{Z} = (A(t)+B(t)U(t))Z = A(t)Z + B(t)V(t)$ и начальному условию $Z(t_0) = X_U(t_0,t_0) = E$. Из формулы Коши следует, что имеет место равенство $Z(t_0+\sigma) = X_U(t_0+\sigma, t_0) = X(t_0+\sigma, t_0)(E + \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)V(s)\,ds)$, которое вместе с (3) дает соотношение $E + \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)V(s)\,ds = H$, т. е. $\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)V(s)\,ds = H - E$. Возьмем $v(t) = V(t)e_1$.

Тогда $\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)v(s)\,ds = \Big(\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)V(s)ds\Big)e_1 = (H-E)e_1 = \xi$, т. е. равенство (4) выполнено. Для $\|v\|_C$ имеем требуемую оценку $\|v\|_C = \|Ve_1\|_C \leq \|V\|_C \leq \alpha$.

При $\alpha > \alpha_0$ берем $\delta = \delta(\varepsilon_0)$. $\square$

Теорема 1. *Система* (1) *σ-равномерно локально достижима в том и только том случае, когда* (1) *σ-равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Необходимость. Пользуясь леммой 1, докажем равномерную полную управляемость системы (1). Возьмем величину $\alpha = \alpha_0/2$ (α_0 — из доказательства леммы 2) и по ней найдем соответствующее $\delta > 0$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор, $\xi \in \mathbb{R}^n$ — сонаправленный ему вектор длины $\delta/2$. Тогда имеем представление $\eta = \beta\xi$, где $\beta = 2\|\eta\|/\delta$. Так как $\xi \in \mathrm{B}_{\delta/2}(0) \subset \mathrm{B}_\delta(0)$, то в силу леммы 2 найдется управление $v(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,1}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|v\|_C \leq \alpha = \alpha_0/2$, обеспечивающее выполнение равенства (4) с выбранным вектором ξ. Полагая $u(t) = \beta v(t)$, будем иметь соотношения $\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)u(s)ds = \beta \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)v(s)ds = \beta\xi = \eta$, а для $\|u\|_C$ — оценки $\|u\|_C = \beta\|v\|_C = 2\|\eta\|\,\|v\|_C/\delta \leq \|\eta\|\alpha_0/\delta =: \gamma\|\eta\|$. Если $\eta = 0$, то выбираем $u(t) \equiv 0$. Таким образом, для произвольного вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$ существует управление $u(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,1}([t_0, t_0+\sigma])$, удовлетворяющее оценке $\|u\|_C \leq \gamma\|\eta\|$ с не зависящей от η и от t_0 величиной γ и обеспечивающее выполнение равенства

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)u(s)ds = \eta.$$

Из леммы 1 следует, что (1) σ-равномерно вполне управляема.

Достаточность следует непосредственно из результатов работы [6]. $\square$

Теорема 2. *Для σ-равномерной локальной достижимости системы* (1) *необходимо и достаточно существования таких $\gamma > 0$ и $\delta_0 > 0$, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_{\delta_0}(E)$ найдется управление $U \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0+\sigma])$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C \leq \gamma\|H-E\|$ и обеспечивающее для матрицы Коши системы* (1) *равенство* (3).

Доказательство. Необходимость. Если система (1) σ-равномерно локально достижима, то в силу теоремы 1 она является σ-равномерно вполне управляемой, а из теоремы работы [8] вытекает требуемое свойство.

Достаточность. Положим $\varepsilon_0 = \gamma\delta_0$. Возьмем любое $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ и поставим ему в соответствие величину $\delta := \varepsilon/\gamma$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_\delta(E)$ произвольны. Так как $\mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{B}_{\delta_0}(E)$, то для выбранной H найдется управление $U(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0+\sigma])$, гарантирующее выполнение равенства (3), причем $\|U\|_C \leq \gamma\|H-E\| \leq \gamma\delta = \varepsilon$. Из определения вытекает, что система (1) σ-равномерно локально достижима. $\square$

Таким образом, равномерная локальная достижимость (и равномерная полная управляемость) системы (1) эквивалентна существованию управления $U(\cdot)$, обеспечивающего равенство (3) и имеющего липшицеву оценку $\|U\|_C$ в зависимости от $\|H-E\|$.

Литература

1. Kalman R.E. *Contributions to the theory of optimal control* // Bol. Soc. mathem. mexic. – 1960. – V. 5. – № 1. – P. 102–119.
2. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. *Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 45–56.
3. Tonkov E.L. *Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control systems* // Proc. of the Steklov Inst. Math. – Suppl. 1. – 2000. – P. 228–253.

4. Миллионщиков В.М. *Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10. – № 1. – С. 99–104.
5. Изобов Н.А. *Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
6. Попова С.Н. *К вопросу об управлении показателями Ляпунова* // Вестн. Удмуртск. ун-та. – Ижевск, 1992. – Вып. 1. – С. 23–39.
7. Тонков Е.Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 10. – С. 1804–1813.
8. Макаров Е.К., Попова С.Н. *К методу поворотов для линейных управляемых систем* // Докл. АН Беларуси. – 1998. – Т. 42. – № 6. – С. 13–16.

Удмуртский государственный университет

Поступила
01.10.2001