ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 519.85

И.В. КОННОВ

О СИСТЕМАХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Введение

Пусть U — выпуклое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $G: U \to 2^{R^n}$ — точечно-множественное отображение (т. м. о.). Тогда можно определить вариационное неравенство как задачу нахождения точки $u^* \in U$ такой, что

$$\exists g^* \in G(u^*), \quad \langle g^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

Вариационные неравенства широко используются для моделирования и исследования различных задач математической физики, а также равновесных задач экономики и исследования операций (см., напр., [1]–[3]). При этом наряду с обычными вариационными неравенствами предлагаются и столь же интенсивно исследуются их различные обобщения (см., напр., [3]–[5] и ссылки в данных работах). В настоящей работе рассматривается еще одно обобщение, а именно, системы вариационных неравенств (с. в. н.). Показывается, что с. в. н. является полезным инструментом при исследовании и решении задач векторной оптимизации, а также предлагается итеративный метод для решения с. в. н. при достаточно общих предположениях.

В дальнейшем нам потребуются обозначения некоторых отношений упорядочения между векторами. Пусть $M \triangleq \{1, \dots, m\}$. Для точек $a, b \in R^m$ запись $a \preccurlyeq b$ ($a \succcurlyeq b$) означает, что a не лучше (не хуже) b в смысле Парето, т.е. либо $a = b$, либо $a_i < b_i$ ($a_i > b_i$) для некоторого $i \in M$. Также запись $a \preccurlyeq_L b$ ($a \succcurlyeq_L b$) означает, что a не лучше (не хуже) лексикографически, чем b, т.е. либо $a = b$, либо $a_k < b_k$ ($a_k > b_k$) для $k = \min\{i \in M \mid a_i \neq b_i\}$. Для любого элемента $a \in R^m$ и любого индекса $k \in M$ обозначим $a^{(k)}$ — вектор из R^k такой, что $a_i^{(k)} = a_i$, $i = \overline{1,k}$. Кроме того, обозначим

$$R^n_> = \{x \in R^n \mid x_i > 0,\ i = \overline{1,n}\},$$
$$S(z, \rho) = \{x \in R^n \mid \|x - z\| = \rho\},$$
$$N(X, x) = \{q \in R^n \mid \langle q, z - x \rangle \leq 0\ \forall z \in X\}$$

— нормальный конус к множеству X в точке x. Проекция точки x на множество X далее обозначается $\mathrm{pr}(x, X)$, множество обобщенных градиентов (по Кларку) функции F в точке x — $\partial F(x)$ (см. [6], с.18).

2. Постановка задачи и некоторые приложения

Всюду далее в статье предполагается, что U — непустое выпуклое множество в R^n. Пусть даны т. м. о. $G_s: U \to 2^{R^n}$, $s \in M$, тогда решение системы вариационных неравенств состоит в нахождении точки множества $U^*(G) = \bigcap\limits_{s \in M} U_s^*(G)$, где

$$U_s^*(G) = \{\bar{u} \in U \mid \exists \bar{g}^s \in G_s(\bar{u}),\ \langle \bar{g}^s, u - \bar{u} \rangle \geq 0\ \forall u \in U\}.$$

Очевидно, что с. в. н. совпадает с обычным вариационным неравенством при $m = 1$.

Замечание 2.1. Хотя вариационные неравенства можно определить и в бесконечномерном пространстве (напр., [1], [2]), и аналогичное обобщение легко проводится для с. в. н., здесь и в дальнейшем ради упрощения изложения рассматривается исключительно конечномерный случай.

Следует отметить, что данное понятие с. в. н. отличается от подобного понятия, введенного в [7] (см. также [8]), поскольку с. в. н. из [7], [8] представляет собой одно вариационное неравенство специального вида, а именно, в случае, когда допустимое множество U является прямым произведением некоторых множеств, заданных в соответствующих подпространствах. Вариационные неравенства подобного типа возникают при исследовании бескоалиционных игр, а также некоторых задач транспортного и ценового равновесия (см. [3], [7], [8]). В данном случае все вариационные неравенства имеют одно допустимое множество, поэтому такая с. в. н., вообще говоря, непосредственно не сводится к одному вариационному неравенству.

Заметим, что в случае $U = R^n$ с. в. н. эквивалентна системе задач о стационарной точке (с. с. т.), поскольку тогда $U^*(G) = \{\bar{u} \in U \mid 0 \in G_s(\bar{u}\}$. Однако при дополнительных предположениях с. в. н. может быть непосредственно преобразована к с. с. т., которая может рассматриваться как условие оптимальности для с. в. н.

Пусть $\rho > 0$, $u \in R^n$. Определим множество

$$T_\rho(u) = \mathrm{conv}\{N(U, u) \cap S(0, \rho)\},$$

а также

$$P_s(u) = \begin{cases} G_s(u), & \text{если } u \in \mathrm{int}\, U; \\ \mathrm{conv}\{G_s(u) \cup T_\rho(u)\}, & \text{если } u \in U \setminus \mathrm{int}\, U; \\ T_\rho(u), & \text{если } u \notin U, \end{cases} \tag{1}$$

для $s \in M$. Заметим, что подобные множества широко используются для получения условий оптимальности в негладкой оптимизации (напр., [9]).

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathrm{int}\, U \neq \emptyset$. *Точка* u^* *является решением с. в. н. тогда и только тогда, когда* $0 \in P_s(u^*)$ $\forall s \in M$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [10], где это утверждение было получено в случае вариационного неравенства, т.е. когда $m = 1$.

Рассмотрим теперь несколько задач, которые могут быть сформулированы в виде с. в. н. Пусть $D_s : U \to 2^U$, $s \in M$, — некоторые т. м. о., тогда

$$X^0(D) = \{u^* \in U \mid u^* \in D_s(u^*)\ \forall s \in M\}$$

обозначает множество их общих неподвижных точек. Задача нахождения точки из $X^0(d)$ является одной из основных в нелинейном анализе и интенсивно исследуется (напр., [11], [12] и ссылки в этих работах). Однако если положить $G_s(u) = u - D_s(u)$, тогда, очевидно, $X^0(D) = U^*(G)$, а если т. м. о. D_s нерастягивающее, то т. м. о. G_s будет монотонным на U.

Далее, многие задачи математической физики часто формулируются в виде операторных уравнений или включений с дополнительными условиями на решение (напр., [13]). Иначе говоря, задача состоит в нахождении точки u^* такой, что $0 \in G_1(u^*)$ и $u^* \in V$, где $G_1 : U \to 2^{E'}$, V — выпуклое замкнутое подмножество E, E — некоторое банахово пространство, E' — сопряженное пространство к E. Однако множество V всегда может быть задано с помощью выпуклой функции $h : E \to R$, т.е. $V = \{v \in E \mid h(v) \leq 0\}$. Если теперь положить $G_2(u) = \partial\tilde{h}(u)$, где $\tilde{h}(u) = \max\{h(u), 0\}$, то исходная задача сводится к с. с. т. при $m = 2$, т.е. является частным случаем с. в. н. (в бесконечномерном пространстве). Другие приложения с. в. н. будут описаны в § 4.

3. Системы вариационных неравенств и другие обобщения вариационных неравенств

Рассмотрим взаимосвязи между различными векторными задачами оптимизации и обобщениями вариационных неравенств, включающими с. в. н. Важность исследования задач векторной оптимизации и их обширная область приложений, в особенности в теории принятия решений, хорошо известны. Вначале рассмотрим несколько видов задач векторной оптимизации, которые подробно изучались, например, в [14]–[17] (см. также ссылки в этих работах). Пусть $F : U \to R^m$ — непрерывное отображение. Определим следующие множества:

a) $V^e(F) = \{\bar{u} \in U \mid F(\bar{u}) \preccurlyeq F(u) \; \forall u \in U\}$;

b) $V^c(F) = \Big\{\bar{u} \in U \mid \exists \bar{y} \in R^m_{>},\ \sum\limits_{s \in M} \bar{y}_s (F_s(\bar{u}) - F_s(u)) \le 0 \; \forall u \in U\Big\}$;

c) $V^l(F) = V^l_m(F)$, где $V^l_s(F) = \{\bar{u} \in V^l_{s-1}(F) \mid F_s(\bar{u}) \le F_s(u) \; \forall u \in V^l_{s-1}(F)\}$, $s \in M$; $V^l_0(F) = U$;

d) $V^*(F) = \bigcap\limits_{s \in M} V^*_s(F)$, где $V^*_s(F) = \{\bar{u} \in U \mid F_s(\bar{u}) \le F_s(u) \; \forall u \in U\}$, $s \in M$.

Из этих определений, в частности, следует, что $V^e(F)$ — множество Парето-оптимальных (эффективных) точек; $V^c(F)$ — множество решений соответствующей скаляризованной задачи (см., напр., [15]); $V^l(F)$ — множество решений задачи лексикографической оптимизации (л. о.) ([14]); $V^*(F)$ — множество идеальных решений (и. р.), поскольку содержит совместные решения всех частных задач скалярной оптимизации. Заметим, что задача нахождения элемента из $V^*(F)$ рассматривалась в нескольких работах ([17]–[20]). В следующей лемме приводятся известные соотношения между определенными выше множествами (напр., [14]–[16]).

Лемма 3.1. a) $V^*(F) \subseteq V^c(F) \subseteq V^e(F)$; b) $V^*(F) \subseteq V^l(F) \subseteq V^e(F)$.

Таким образом, $V^*(F)$ соответствует наиболее сильному понятию решения задачи векторной оптимизации. Однако это понятие имеет и серьезный недостаток, поскольку для непустоты множества $V^*(F)$ приходится вводить дополнительные предположения, в то время как другие множества решений остаются непустыми при стандартных предположениях.

Хорошо известно, что вариационные неравенства можно использовать для формулировки условий оптимальности в задачах скалярной оптимизации. Это свойство (в несколько измененной форме) приводится в следующей лемме.

Лемма 3.2. *Если $G_1 = \partial F_1$, то $V^*_1(F) \subseteq U^*_1(G)$. Если дополнительно функция F_1 выпуклая, то $V^*_1(F) = U^*_1(G)$.*

Доказательство основано на следствии 2.4.3 в [6] и теореме 6.1 в ([9], гл. 1).

Очевидно, что подобные свойства можно получить и в векторном случае. С этой целью определим несколько обобщений вариационного неравенства. Пусть т. м. о. G_s, $s \in M$, определены так же, как и в § 2. Векторное вариационное неравенство (в. в. н.) определяется как задача нахождения точки $\bar{u} \in U$ такой, что

$$\exists \bar{g}^s \in G_s(\bar{u}), \quad \langle \bar{g}^s, u - \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall s \in M$$

или

$$\exists i \in M,\ \bar{g}^i \in G_i(\bar{u}), \quad \langle \bar{g}^i, u - \bar{u} \rangle > 0 \quad \forall u \in U.$$

Обозначим множество решений в. в. н. через $U^e(G)$. В случае, когда отображения G_s однозначны, в. в. н. сводится к задаче (30) из [20]. Далее, определим коническое вариационное неравенство (к. в. н.) как задачу нахождения точки $\bar{u} \in U$ такой, что

$$\exists \bar{g}^s \in G_s(\bar{u}),\ \exists \bar{y} \in R^m_{>}, \quad \sum_{s \in M} \bar{y}_s \langle \bar{g}^s, u - \bar{u} \rangle \ge 0 \quad \forall u \in U.$$

Множество решений к. в. н. обозначим $U^c(G)$. Заметим, что к. в. н. может рассматриваться как некоторая скаляризация в. в. н. Кроме того, определим лексикографическое (или многоуровневое) вариационное неравенство (л. в. н.) как задачу нахождения точки множества

$$U^l(G) = U^l_m(G),$$

где

$$U^l_s(G) = \{\bar{u} \in U^l_{s-1}(G) \mid \exists \bar{g}^s \in G_s(\bar{u}),\ \langle \bar{g}^s, u - \bar{u}\rangle \geq 0\ \forall u \in U^l_{s-1}(G)\}, \quad s \in M, \quad U^l_0(G) = U.$$

В случае, когда $m = 2$, а G_s однозначны, эта задача изучалась во многих работах (напр., [21]). В следующей лемме, аналогично лемме 3.1, приводятся такие соотношения множеств решений определенных выше задач, которые получаются непосредственно из определений.

Лемма 3.3. a) $U^*(G) \subseteq U^c(G) \subseteq U^e(G)$; b) $U^*(G) \subseteq U^l(G)$.

Объединяя леммы 3.2 и 3.3, запишем условия оптимальности для задач векторной оптимизации.

Лемма 3.4. *Если* $G_s = \partial F_s$, $s \in M$, *то* $U^*(G) \supseteq V^*(F)$, $U^c(G) \supseteq V^c(F)$. *Если дополнительно функции* F_s, $s \in M$, *выпуклы, то*

$$U^*(G) = V^*(F), \quad U^e(G) \subseteq V^e(F), \quad U^c(G) = V^c(F), \quad U^l(G) = V^l(F).$$

Таким образом, с. в. н. тесно связаны с задачей и. р. Здесь также с. в. н. соответствует наиболее сильному понятию решения и необходимы дополнительные условия, которые гарантируют непустоту множества $U^*(G)$. Две подобные задачи приведены в § 2. Еще одно приложение с. в. н. будет рассматриваться в следующем параграфе.

4. Приложение к задаче лексикографической оптимизации

Каждая из рассмотренных в § 3 задач векторной оптимизации опирается на соответствующее отношение предпочтения в пространстве оценок. При этом, в отличие от упорядочения по Парето, лексикографическое упорядочение представляет строго иерархическую структуру. Разнообразные задачи л. о. и их приложения подробно рассмотрены в [14], [22]. Например, в задачах принятия решений упорядочение по Парето зачастую приводит к слишком широкому множеству решений, и одним из возможных подходов к сужению этого множества является применение лексикографического упорядочения. При этом в задаче л. о. множество решений остается непустым при стандартных предположениях, например, когда множество U ограничено. В этом параграфе рассматриваются взаимосвязи л. о. с другими задачами векторной оптимизации, а также с с. в. н. На этой основе предлагается новый подход к решению задачи л. о.

Пусть $f : U \to R^m$ — непрерывное отображение такое, что $f_i : U \to R$ — выпуклая функция для любого $i \in M$. Рассмотрим задачу нахождения элемента множества $V^l(f)$.

Лемма 4.1 ([14], с.16). $V^l(f) = \{\bar{u} \in U \mid f(\bar{u}) \preccurlyeq_L f(u)\ \forall u \in U\}$.

Лемма 4.2 ([23], лемма 5.1). *Для любых* $a, b \in R^m$ *соотношение* $a \preccurlyeq_L b$ *эквивалентно системе* $a^{(k)} \preccurlyeq b^{(k)}\ \ \forall k \in M$.

Заметим, что утверждение леммы 4.2 отличается от подобных результатов из [14], [24], поскольку не включает параметров, зависящих от данных элементов a и b. На основе лемм 4.1 и 4.2 установим связь л. о. с эффективными и идеальными решениями. Пусть

$$W^e(f) = \bigcap_{s \in M} V^e(f^{(s)}), \quad W^c(f) = \bigcap_{s \in M} W^c_s(f^{(s)}),$$

где

$$W^c_s(f^{(s)}) = \left\{\bar{u} \in U \mid \exists \bar{y} \in R^s_>,\ \sum_{i=1}^m \bar{y}_i (f_i(\bar{u}) - f_i(u)) \leq 0\ \forall u \in U\right\}, \quad s \in M.$$

Теорема 4.1. a)

$$W^c(f) \subseteq W^e(f) = V^l(f). \tag{2}$$

b) *Если*

$$W^c_s(f^{(s)}) = V^e(f^{(s)}) \quad \forall s \in M, \tag{3}$$

то

$$W^c(f) = W^e(f) = V^l(f). \tag{4}$$

Доказательство. Из лемм 4.1 и 4.2 следует $W^e(f) = V^l(f)$. Далее, применяя лемму 3.1 с $F = f^{(s)}$, получаем $W^c_s(f^{(s)}) \subseteq V^e(f^{(s)})$, следовательно, $W^c(f) \subseteq W^e(f)$ и утверждение a) справедливо. Утверждение b) следует из a). $\square$

Из теоремы 4.1, в частности, следует, что любая задача л. о. эквивалентна системе задач оптимизации по Парето и при дополнительных предположениях — системе скалярных задач оптимизации, т.е. задаче и. р. или с. в. н.

Следствие 4.1. Пусть отображение $F : U \to R^m$ определено по формуле

$$F_s(u) = \sum_{i=1}^{s} y^s_i f_i(u) \quad \forall u \in U,\ s \in M, \tag{5}$$

где $y^s \in R^s_>$, $s \in M$. Тогда

a) $V^*(F) \subseteq V^l(f)$;
b) если дополнительно выполняется (3) и $V^l(f) \neq \emptyset$, то существуют элементы $y^s \in R^s_>$, $s \in M$, такие, что $V^*(F) \neq \emptyset$.

Доказательство. Вначале заметим, что $V^*_s(F) \subseteq V^e(f^{(s)})$, $s \in M$ [25]. Из определения и соотношения (2) следует, что утверждение a) справедливо. В случае b) из (4) следует $W^c(f) \neq \emptyset$. Поэтому утверждение b) также справедливо. $\square$

Следствие 4.2. Пусть $G_s = \partial F_s$, $s \in M$, где функции F_s определены в (5) и $y^s \in R^s_>$, $s \in M$. Тогда

a) $U^*(G) \subseteq V^l(f)$;
b) если дополнительно выполняется (3) и $V^l(f) \neq \emptyset$, то существуют элементы $y^s \in R^x_>$, $s \in M$, такие, что $U^*(G) \neq \emptyset$.

Доказательство основано на следствии 4.1, лемме 3.4 и выпуклости функций F_s.

Заметим, что условие (3), гарантирующее непустоту множества $V^*(F)$ (или $U^*(G)$) выполняется, если $V^l(f^{(s)})$ содержит только собственно эффективные точки ([25] и [15], с.108). Это условие выполняется, если, например, функции f_i линейны или кусочно-линейны ([15], § 2.2). Таким образом, задача л. о. может быть преобразована к задаче и. р. или с. в. н. Аналогичный подход может быть применен для преобразования л. в. н. к с. в. н. Однако, чтобы найти решение задачи л. о. путем решения соответствующей задачи и. р. (с. в. н.), необходимо находить параметры $y^s \in R^s_>$, обеспечивающие непустоту множества $V^*(F)$ (или $U^*(G)$). Рассмотрим один из возможных конструктивных подходов к разрешению этой проблемы. Для простоты ограничимся случаем $m = 2$. Тогда без потери общности можно определить

$$y^1 = 1; \quad y^2_1 = 1, \quad y^2_2 = \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Теорема 4.2. *Пусть $m = 2$ и отображение $F : U \to R^2$ определено в* (5), (6). *Если существует число $\varepsilon' > 0$ такое, что*

$$V^*(F) \neq \emptyset \tag{7}$$

при $\varepsilon = \varepsilon'$, то (7) *выполняется для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$.*

Доказательство. Пусть $u^* \in V^*(F)$, где $F_2 = f_1 + \varepsilon' f_2$. Покажем, что $u^* \in V^*(F)$ для $F_2 = f_1 + \varepsilon f_2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Предположим противное, т.е. существуют $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$, $\bar{u} \in U$ такие, что

$$f_1(\bar{u}) + \varepsilon f_2(\bar{u}) < f_1(u^*) + \varepsilon f_2(u^*). \tag{8}$$

По определению $u^* \in V_1(f)$, поэтому $f_1(u^*) \leq f_1(\bar{u})$, и, применяя это соотношение в (8), имеем

$$f_2(\bar{u}) < f_2(u^*). \tag{9}$$

С другой стороны, используя (8) и определение u^*, имеем

$$f_1(\bar{u}) + \varepsilon f_2(\bar{u}) < f_1(u^*) + \varepsilon f_2(u^*) = f_1(u^*) + \varepsilon' f_2(u^*) + (\varepsilon - \varepsilon') f_2(u^*) \leq f_1(\bar{u}) + \varepsilon' f_2(\bar{u}) + (\varepsilon - \varepsilon') f_2(u^*).$$

Отсюда следует $(\varepsilon - \varepsilon') f_2(\bar{u}) < (\varepsilon - \varepsilon') f_2(u^*)$, но $\varepsilon < \varepsilon'$, поэтому получаем $f_2(\bar{u}) > f_2(u^*)$, что противоречит (9). $\square$

На основе теоремы 4.2 и следствия 4.1 для решения задачи л. о. можно построить

Алгоритм 4.1. Выберем $\varepsilon > 0$ и определим y^1, y^2 согласно (6). Если $V^*(F) \neq \emptyset$, найдем $u^* \in V^*(F)$, останов. Иначе полагаем $\varepsilon = \varepsilon/2$ и снова пробуем найти элемент из $V^*(F)$ и т.д.

Заметим, что $u^* \in V^l(f)$ согласно следствию 4.1 a). Кроме того, в условиях следствия 4.1 b) этот алгоритм конечен из-за теоремы 4.2. Также из следствия 4.2 можно заключить, что все утверждения останутся справедливыми, если заменить $V^*(F)$ на $U^*(G)$. Отметим, что описанный алгоритм является близким к алгоритму штрафов ([21], [26]), однако в отличие от него имеет конструктивный критерий идентификации решения. В отличие от других общих методов л. о. ([14]) он не требует знания решений частных задач, т.е. множеств $V_s^l(f)$ или их аппроксимаций.

К этому следует добавить, что подобное преобразование задач лексикографического равновесия (седловой точки) к системе скалярных равновесных задач рассматривалось в [23]. Записывая вместо каждой равновесной задачи условие оптимальности стандартным образом в виде вариационного неравенства (напр., [27], с.239), также приходим к с. в. н.

5. Метод решения систем вариационных неравенств

В настоящем параграфе описывается итерационный метод решения с. в. н., который основан на идеях методов [28], [23], [10], т.е. является комбинированным релаксационным. Как известно, в случае обычного вариационного неравенства ($m = 1$) подобные методы сходятся при более слабых предположениях, чем методы градиентного типа, а также методы регуляризации, усреднения и т.п. (напр., [27], гл. 5), но в то же время достигают линейной скорости сходимости [28]. В случае с. в. н., т.е. когда $m > 1$, дополнительная проблема заключается в том, что решения отдельных вариационных неравенств могут содержать несовпадающие точки и поэтому, даже решив все эти подзадачи, нет гарантии, что будет получена точка из $U^*(G)$. Очевидно, получение всех множеств частных решений, т.е. всех элементов $U_s^*(G)$, $s \in M$, вряд ли возможно. В то же время комбинированный релаксационный метод позволяет построить последовательность, сходящуюся именно к элементу из $U^*(G)$.

При нахождении решения итерационным методом функциональные и простые (в смысле осуществимости операции проектирования) ограничения удобнее разделить. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что

$$U = W_1 \bigcap W_2,$$

где W_1 и W_2 — выпуклые замкнутые множества в R^n, причем $W_1 = \{u \in R^n \mid h_i(u) \le 0,\ i \in T\}$, где $T = \{1, \dots, t\}$. Таким образом, множество W_1 определяется функциональными ограничениями, а W_2 — простыми, например, W_2 может быть многогранником или неотрицательным ортантом. В дальнейшем также предполагаем, что $\operatorname{int} U \ne \emptyset$, $U^*(G) \ne \emptyset$, а т. м. о. $G_s : U \to 2^{R^n}$, $s \in M$, полунепрерывны сверху и для любого $u \in U$ множества $G_s(u)$, $s \in M$, непусты, выпуклы и компактны. Кроме того, предполагается, что для любой точки $u \in U$ и любого $\bar{g}^s \in G_s(u)$

$$\langle \bar{g}^s, u - u^* \rangle \ge 0 \quad \forall u^* \in U_s^*(G), \quad s \in M. \tag{10}$$

Заметим, что условие (10) выполняется, если т. м. о. G_s являются монотонными или псевдомонотонными, но обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо.

Вначале опишем вспомогательную процедуру выбора параметров в методе, которая является модификацией процедуры из [28], [10] с учетом специфики решаемой задачи. Для каждого $s \in M$ определим т. м. о. $Q_s : R^n \to 2^{R^n}$ по формуле

$$Q_s(u) = \begin{cases} G_s(u), & \text{если } u \in U; \\ N(W_1, u) \cap S(0, \rho), & \text{если } u \in W_2 \setminus W_1; \\ N(W_2, u) \cap S(0, \rho), & \text{если } u \notin W_2. \end{cases}$$

Зафиксируем целые числа $k \ge 0$, $l \ge 0$, $s \in M$.

Процедура $D_{k,l}^s$. Вход: точка $u^k \in W_2$.
Выход: элементы g^k, v^k, число $\bar{\sigma}_{k,s}$.
Параметры: числа $\theta \in (0, 1)$, $\alpha_l > 0$, $\eta_l > 0$.

Шаг 1. Выбирается $q^0 \in Q_s(u^k)$, полагается $i = 0$, $p^i = q^i$, $w^i = u^k$.
Шаг 2. Если $\|p^i\| \ge \eta_l$, переход к шагу 3. Иначе полагается $g^k = 0$, $v^k = u^k$, $\bar{\sigma}_{k,s} = 0$, останов.
Шаг 3. Полагается $w^{i+1} = w^0 - \alpha_l p^i / \|p^i\|$, выбирается q^{i+1} из $Q_s(w^{i+1})$. Если

$$\langle q^{i+1}, p^i \rangle > \theta \|p^i\|^2, \tag{11}$$

то полагается $g^k = q^{i+1}$, $v^k = w^{i+1}$, $\bar{\sigma}_{k,s} = \langle g^k, u^k - v^k \rangle / \|g^k\|^2$; останов.
Шаг 4. Полагается $p^{i+1} = \operatorname{pr}(0, \operatorname{conv}\{p^i, q^{i+1}\})$, $i = i + 1$. Переход к шагу 2.

В дальнейшем изменение индекса i будем называть внутренним шагом. Дадим полное описание метода.

Метод 5.1. Выбирается точка $u^0 \in W_2$, число $\theta \in (0, 1)$, последовательности $\{\alpha_l\}$, $\{\eta_l\}$, $\{\gamma_j\}$ такие, что

$$\{\alpha_l\} \downarrow 0, \quad \{\eta_l\} \downarrow 0; \quad \gamma_j \in [0, 2],\ j = 0, 1, \dots\ ; \quad \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j (2 - \gamma_j) = \infty.$$

Полагается $y^0 = u^0$, $k = 0$, $j(k) = 0$, $\lambda(k) = 1$.

На k-й итерации, $k = 0, 1, \dots$, имеется точка $u^k \in W_2$ и числа $j(k)$, $\lambda(k)$. Полагается $s = 1$, $l = \lambda(k)$.

Шаг 1. Применяется процедура $D_{k,l}^s$. Если $\bar{\sigma}_{k,s} > 0$, то переход к шагу 3.
Шаг 2. Если $s < m$, полагается $s = s + 1$, переход к шагу 1. Иначе полагается $y^l = u^{k+1} = u^k$, $\sigma_k = \bar{\sigma}_{k,m}$, $\lambda(k+1) = l + 1$, $j(k+1) = j(k)$; итерация завершена.
Шаг 3. Полагается $\sigma_k = \bar{\sigma}_{k,s}$, $j(k+1) = j(k) + 1$, $\lambda(k+1) = l$,

$$u^{k+1} = \operatorname{pr}(u^k - \gamma_{j(k)} \sigma_k g_k, W_2); \tag{12}$$

итерация завершена.

Согласно описанию при завершении итерации на шаге 2 происходит нулевой шаг. Поэтому $j(k)$ (соответственно, $\lambda(k)$) — счетчик числа ненулевых (соответственно, нулевых) шагов. Установим основное свойство последовательности $\{u^k\}$, построенной методом 5.1.

Лемма 5.1. *Если u^* — произвольная точка из $U^*(G)$, то*

$$\|u^{k+1} - u^*\|^2 \leq \|u^k - u^*\|^2 - \gamma_{j(k)}(2 - \gamma_{j(k)})(\sigma_k\|g^k\|)^2 \tag{13}$$

для $k = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Ясно, что соотношение (13) выполняется в случае $\lambda(k+1) > \lambda(k)$. Пусть теперь на k-й итерации происходит ненулевой шаг, т.е. $\lambda(k+1) = \lambda(k)$. Покажем, что тогда выполняются соотношения

$$\sigma_k > 0, \quad v^k \in W_2, \quad \langle g^k, u^k - u^* \rangle \geq \sigma_k\|g^k\|^2 \quad \forall u^* \in U^*(G). \tag{14}$$

Первое соотношение в (14) следует из определения σ_k. Далее, если $v^k \notin W_2$, то $g^k = q^{i+1} \in N(W_2, w^{i+1})$ и поэтому

$$0 \geq \langle q^{i+1}, u^k - w^{i+1} \rangle = \alpha_l \langle q^{i+1}, p^i \rangle / \|p^i\|,$$

что противоречит (11). Пусть теперь $v^k \in U$. Тогда $g^k \in G_s(v^k)$ для некоторого $s \in M$ и согласно (10) и определению $U^*(G)$ имеем

$$\langle g^k, v^k - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u^* \in U^*(G). \tag{15}$$

Если же $v^k \notin U$, то $v^k \in W_2 \backslash W_1$, $g^k \in N(W_1, v^k)$ и (15) выполняется по определению нормального конуса. Используя (15), получаем

$$\langle g^k, u^k - u^* \rangle = \langle g^k, u^k - v^k \rangle + \langle g^k, v^k - u^* \rangle \geq \sigma_k\|g^k\|^2$$

для любого $u^* \in U^*(G)$, т.е. все соотношения в (14) выполняются. Используя (12), (14) и свойства проекции, для любого $u^* \in U^*(G)$ имеем

$$\begin{aligned}\|u^{k+1} - u^*\| \leq \|u^k - \gamma_{j(k)}\sigma_k g^k - u^*\|^2 = \|u^k - u^*\|^2 + (\gamma_{j(k)}\sigma_k\|g^k\|)^2 - 2\gamma_{j(k)}\sigma_k\langle g^k, u^k - u^* \rangle \leq \\ \leq \|u^k - u^*\|^2 + (\gamma_{j(k)}^2 - 2\gamma_{j(k)})(\sigma_k\|g^k\|)^2,\end{aligned}$$

т.е. соотношение (13) справедливо. □

Теорема 5.1. *Пусть последовательность $\{u^k\}$ построена методом 5.1. Тогда*
a) *количество внутренних шагов на любой итерации метода конечно*;
b) $\lim\limits_{k\to\infty} u^k = u^* \in U^*(G)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что утверждение a) следует из конечности процедуры $D^s_{k,l}$ для любого $s \in M$, которая доказывается так же, как часть a) теоремы 1 в [10]. Далее, последовательность $\{y^l\}$ при сделанных предположениях бесконечна, что доказывается так же, как часть b) теоремы 1 в [10]. Согласно (13) последовательность $\{y^l\}$ должна быть ограниченной, поэтому она имеет предельную точку $u^* \in W_2$. Не ограничивая общности, считаем, что $\lim\limits_{l\to\infty} y^l = u^*$. Далее, поскольку в случае $\lambda(k+1) > \lambda(k)$ останов процедур $D^s_{k,l}$ для всех $s \in M$ происходит на шаге 2, то аналогично доказательству части b) теоремы 1 в [10] показывается, что $0 \in P_s(u^*)$ $\forall s \in M$. Из теоремы 2.1 теперь следует, что $u^* \in U^*(G)$. Но согласно (13) отсюда $\lim\limits_{k\to\infty} u^k = u^*$, т.е. утверждение b) теоремы также справедливо. □

Следует заметить, что в [29] были предложены комбинированные релаксационные методы для решения вариационных неравенств с однозначным отображением. Используя подход, предложенный в настоящей работе, методы из [29] также могут быть приспособлены для решения с. в. н. в том случае, когда $W_1 = R^n$, а т. м. о. G_s однозначны.

Литература

1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введение в вариационные неравенства и их приложения.* – М.: Мир, 1983. – 256 с.
2. Панагиотопулос П. *Неравенства в механике и их приложения.* – М.: Мир, 1989. – 494 с.
3. Harker P.T., Pang J.-S. *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications* // Math. Programming. – 1990. – V. 48. – № 2. – P. 161–220.
4. Chen G.Y., Craven B.D. *Vector variational inequality and vector optimization* // Zeitschrift für Oper. Res. – 1990. – V. 3. – № 1. – P. 1–12.
5. Yao J.-C. *The generalized quasi-variational inequality problems with applications* // J. Math. Anal. and Appl. – 1991. – V. 158. – № 1. – P. 139–160.
6. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.
7. Бакушинский А.Б. *Некоторые методы решения систем монотонных вариационных неравенств* // Числен. методы оптимизации. – Иркутск: СЭИ АН СССР, 1978. – С. 13–26.
8. Бакушинский А.Б. *Вычислительные методы композиционного планирования* // Проблемы композиционного планирования. – М.: ВНИИСИ, 1980. — Вып. 5. – С. 5–21.
9. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 384 с.
10. Коннов И.В. *Один общий подход к нахождению стационарных точек и решению смежных задач* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 5. – С. 41–50.
11. Борисович Ю.Г. и др. *О новых результатах в теории многозначных отображений.* I // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1987. – Т. 26. – С. 121–195.
12. Khan M.S. *Common fixed point theorems for multivalued mappings* // Pacif. J. Math. – 1981. – V. 95. – № 2. – P. 337–347.
13. Васин В.В., Агеев А.А. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 263 с.
14. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. *Оптимизация по последовательно применяемым критериям.* – М.: Сов. радио, 1976.
15. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* – М.: Наука, 1982. – 254 с.
16. Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. *Theory of multiobjective optimization.* – New York: Academic Press, 1985.
17. Юдин Д.Б. *Вычислительные методы теории принятия решений.* – М.: Наука, 1989. – 320 с.
18. Ritter K. *Optimization theory in linear spaces.* III: *Mathematical programming in partially ordered Banach spaces* // Math. Ann. – 1970. – Bd. 184. – № 2. – S. 133–154.
19. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. *Субдифференциалы. Теория и приложения.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 270 с.
20. Giannessi F. *Theory of alternative, quadratic programs and complementarity problems* // Variational inequalities and complementarity problems / Ed. by R.W. Cottle, F. Giannessi and J.-L. Lions. – New York: John Wiley and Sons, 1980. – P. 151–186.
21. Калашников В.В., Калашникова Н.И. *Решение двухуровневого вариационного неравенства* // Кибернетика и сист. анализ. – 1994. – № 4. – С. 178–180.
22. Fishburn P.C. *Lexicographic order, utilities and decision rules: a survey* // Manag. Sci. – 1974. – V. 20. – № 11. – P. 1442–1471.
23. Коннов И.В. *Комбинированный релаксационный метод для поиска векторного равновесия* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 12. – С. 54–62.
24. Martinez-Legaz J.E. *Lexicographical order, inequality systems and optimization* // Systems Modelling and Optimization / Ed. by P. Thoft-Christensen. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – P. 203–212.

25. Geoffrion A.M. *Proper efficiency and the theory of vector optimization* // J. Math. Anal. and Appl. – 1968. – V. 22. – № 3. – P. 618–630.
26. Федоров В.В. *Численные методы максимина.* – М.: Наука, 1979. – 280 с.
27. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
28. Коннов И.В. *О скорости сходимости комбинированных релаксационных методов* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С. 89–92.
29. Коннов И.В. *Комбинированные релаксационные методы для поиска точек равновесия и решения смежных задач* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 2. – С. 46–53.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 04.04.1996
окончательный вариант 27.02.1997