ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.764

А.В. АМИНОВА, С.В. ЗУЕВ, Д.А. КАЛИНИН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ДВУХ МЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ С ОБЩЕЙ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ (КВАТЕРНИОННОЙ) СТРУКТУРОЙ НА МНОГООБРАЗИИ

Рассмотрим почти эрмитово многообразие M_{2n} с метрикой g и почти комплексной структурой (ПКС) $J: TM_{2n} \to TM_{2n}$,

$$J^2 = -\operatorname{id}, \tag{1}$$

удовлетворяющей следующим *алгебраическим условиям согласования с метрикой* g:

$$g(JX,Y) = -g(X,JY), \quad g(JX,JY) = g(X,Y),$$

где $X, Y \in TM_{2n}$. Билинейная форма Ω, заданная равенством $\Omega(X,Y) = g(X,JY)$, $X,Y \in TM_{2n}$, называется *фундаментальной формой* многообразия M_{2n}. Из (1) следует $\Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X)$.

Пусть $n = 2m$ и на (M_{4m}, g) помимо ПКС $J \equiv \underset{1}{J}$ задана ПКС $\underset{2}{J}$, антикоммутирующая с $\underset{1}{J}$ и удовлетворяющая алгебраическим условиям согласования с метрикой g. Положим $\underset{3}{J} \equiv \underset{1}{J}\underset{2}{J}$. Для $L, N = 1,2,3$, $L \neq N$ и $X, Y \in TM_{4m}$ выполняются соотношения

$$\underset{L}{J}^2 = -\operatorname{id}, \quad \underset{L}{J}\underset{N}{J} = -\underset{N}{J}\underset{L}{J}, \quad \underset{1}{J}\underset{2}{J} = \underset{3}{J}, \tag{2}$$

$$g(\underset{L}{J}X, Y) = -g(X, \underset{L}{J}Y), \quad g(\underset{L}{J}X, \underset{L}{J}Y) = g(X,Y). \tag{3}$$

В силу (2) тройка $\{\underset{1}{J}, \underset{2}{J}, \underset{3}{J}\}$ задает *кватернионную структуру* на почти эрмитовом многообразии (M_{4m}, g). Равенства (3) будем называть *алгебраическими условиями согласования метрики* g *с кватернионной структурой* $\{\underset{1}{J}, \underset{2}{J}, \underset{3}{J}\}$.

Пусть $(M_{2n}, g, \underset{L}{J})$ и $(M_{2n}, g', \underset{L}{J})$ — почти эрмитовы многообразия с общей ПКС $\underset{L}{J}$, где $L = 1,2,3$ фиксировано. Пусть в области $V \subseteq M_{2n}$ метрика g' имеет постоянную характеристику Сегре $\chi = [(\overset{1}{m}_1 \dots \overset{1}{m}_{s_1}) \dots (\overset{k}{m}_1 \dots \overset{k}{m}_{s_k})]$ и k различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $r_1, \dots, r_k$. Если G и G' — матрицы метрических форм g, g' в каком-либо базисе, то χ есть характеристика Сегре λ-матрицы $(G' - \lambda G)$, определяемая системой ее элементарных делителей. С помощью невырожденных линейных преобразований матрицы G и G' могут быть одновременно приведены в каждой точке V к каноническому виду [1]

$$G \equiv (\overline{g}_{pq}) = \operatorname{diag}(G_1, \dots, G_k), \quad G' \equiv (\overline{g}'_{pq}) = \operatorname{diag}(G'_1, \dots, G'_k), \tag{4}$$

где G_α и G'_α — r_α-мерные блочно-диагональные матрицы, состоящие из s_α $\overset{\alpha}{m}_s$-мерных квадратных блоков

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & \overset{\alpha}{e}_s \\ & \cdot & \\ \overset{\alpha}{e}_s & & 0 \end{pmatrix}, \quad G'_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & \overset{\alpha}{e}_s\lambda_\alpha \\ & & \cdot & \overset{\alpha}{e}_s \\ & \cdot & \cdot & \\ \overset{\alpha}{e}_s\lambda_\alpha & \overset{\alpha}{e}_s & & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

соответственно ($\alpha = 1,\dots,k$, $s = 1,\dots,s_\alpha$, $\overset{\alpha}{e}_s = \pm 1$, $p,q = 1,\dots,2n$).

Рассмотрим в V канонический косорепер (Y_p), $p = 1,\dots,2n$, определенный формулами (см. [2], [3]) $I = \bigcup\limits_{s=1}^{\tau} \overset{\alpha}{I}_s$, $\overset{\alpha}{I}_s = \{h \mid \overset{\alpha}{n}_s + 1 \le h \le \overset{\alpha}{n}_s + \overset{\alpha}{m}_s\}$, $\overset{\alpha}{n}_1 = 0$, $\overset{\alpha}{n}_s = \overset{\alpha}{m}_1 + \dots + \overset{\alpha}{m}_{s-1}$, $e_h = \overset{\alpha}{e}_s$ при $h \in \overset{\alpha}{I}_s$ ($\overset{\alpha}{m}_0 \equiv 0$), $\sim : I \to I : h \to \widetilde{h} = 2\overset{\alpha}{n}_s + \overset{\alpha}{m}_s + 1 - h$ ($\sim \circ \sim = \mathrm{id}$),

$$g(Y_p, Y_q) = \overline{g}_{pq}, \quad g'(Y_p, Y_q) = \overline{g}'_{pq}, \tag{6}$$

где $\overline{g}_{pq}$, $\overline{g}'_{pq}$ заданы соотношениями (4), (5).

Если $(\underset{L}{\overline{J}}_{pq})$ есть матрица фундаментальной формы в каноническом косорепере, то матрица оператора $\underset{L}{J}$ в этом репере имеет вид

$$\underset{L}{\overline{J}}{}^q_p = \overline{g}^{\,ph} \underset{L}{\overline{J}}_{qh} = \sum_p e_p \delta_{p\widetilde{h}} \underset{L}{\overline{J}}_{qh} = e_p \underset{L}{\overline{J}}_{q\widetilde{p}}.$$

Для матрицы $(\underset{L}{\overline{J}}{}'_{pq})$ фундаментальной формы $\Omega'(X,Y) = g'(X, \underset{L}{J}Y)$ почти эрмитова многообразия $(M_{2n}, g', \underset{L}{J})$ в каноническом косорепере (Y_l) имеем

$$\underset{L}{\overline{J}}{}'_{pq} = \overline{g}'_{ph} \underset{L}{\overline{J}}{}^h_q = \lambda \underset{L}{\overline{J}}_{pq} + \Delta_{ph} \underset{L}{\overline{J}}{}^h_q,$$

где

$$\Delta_{pq} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\overset{\alpha}{m}_s - 1) e_p \delta_{p\widetilde{q-1}} & \text{при } \ q \in \overset{\alpha}{I}_s \setminus \{\overset{\alpha}{n}_s + 1\}; \\ 0 & \text{при } \ p \in \overset{\alpha}{I}_s, \ \ q \in \overset{\beta}{I}_t, \ \ (\alpha, s) \ne (\beta, t), \end{cases}$$

$\alpha, \beta = 1,\dots,k$; $s = 1,\dots,s_\alpha$; $t = 1,\dots,t_\beta$, $p,q = 1,\dots,4m$. Из условий алгебраического согласования ПКС $\underset{L}{J}$ с метрикой g' выводим

$$g'(\underset{L}{J}X, Y) = -g'(X, \underset{L}{J}Y), \quad g'(\underset{L}{J}X, \underset{L}{J}Y) = g'(X,Y),$$

отсюда $(\lambda_q - \lambda_p) \underset{L}{\overline{J}}_{pq} + \Delta_{qh} \underset{L}{\overline{J}}{}^h_p + \Delta_{ph} \underset{L}{\overline{J}}{}^h_q = 0$. Рассматривая это равенство при различных значениях индексов p, q, получим следующий результат.

Лемма. *Справедливы соотношения*

а) $\underset{L}{\overline{J}}_{pq} = 0$, *если* $p \in \overset{\alpha}{I}_s$, $q \in \overset{\beta}{I}_t$ *и* $\alpha \ne \beta$;

б) $\underset{L}{\overline{J}}_{pq} = 0$, *если* $p \in \overset{\alpha}{I}_s$, $q \in \overset{\alpha}{I}_t$ *и* $p + q < \min(\overset{\alpha}{n}_s + \overset{\alpha}{n}_t + \overset{\alpha}{m}_s + 1, \overset{\alpha}{n}_s + \overset{\alpha}{n}_t + \overset{\alpha}{m}_t + 1)$;

в) $\underset{L}{\overline{J}}_{pq} = 0$, *если* $p, q \in \overset{\alpha}{I}_s$.

Следующая теорема устанавливает структуру матрицы фундаментальной формы эрмитова многообразия (см. также [4], где изучается структура такой матрицы в случае базиса, адаптированного к комплексной структуре).

Теорема 1. *Пусть* (M_{2n}, g) *и* (M_{2n}, g') — *почти эрмитовы многообразия с общей ПКС* $\underset{L}{J}$. *Пусть* G *и* G' — *матричные функции на* M_{2n}, *значения которых в некоторой окрестности* V *каждой точки* $p \in M_{2n}$ *совпадают с матрицами форм* g *и* g' *в каком-либо базисе. Если* λ*-матрица* $(G' - \lambda G)$ *имеет в* V *характеристику Сегре*

$$\chi = [(\overset{1}{m}_1 \dots \overset{1}{m}_{s_1}) \dots (\overset{k}{m}_1 \dots \overset{k}{m}_{s_k})] \tag{7}$$

и различные собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ кратностей $r_1,\dots,r_k$, то в окрестности V существует канонический косорепер (Y_l), определенный формулами (6), в котором матрица фундаментальной формы многообразия (M_{2n},g) имеет блочно-диагональный вид

$$\underset{L}{\Theta} \equiv (\underset{L}{\overline{J}}_{pq}) = \operatorname{diag}\left(\underset{L}{\overset{1}{\theta}},\dots,\underset{L}{\overset{k}{\theta}}\right), \tag{8}$$

где

$$\underset{\substack{L\\ \alpha}}{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & \underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{12} & \dots & \underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{1\,s_\alpha-1} & \underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{1\,s_\alpha} \\ -\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{12} & 0 & \dots & \underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{2\,s_\alpha-1} & \underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{2\,s_\alpha} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ -\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{1\,s_\alpha-1} & -\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{2\,s_\alpha-1} & \dots & 0 & \underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{s_\alpha-1\,s_\alpha} \\ -\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{1\,s_\alpha} & -\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{2\,s_\alpha} & \dots & -\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}_{s_\alpha-1\,s_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

— квадратные кососимметричные $r_\alpha\times r_\alpha$-матрицы, составленные из $\overset{\alpha}{m}_s\times\overset{\alpha}{m}_t$-матриц вида

$$\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}{}_{st} = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_1 & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_1 & \dots & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_{m-2} & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_1 & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_2 & \dots & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_{m-1} & \underset{L}{\overset{\alpha}{b}}{}^{st}_m \end{array}\right) \quad (s,t=1,\dots,s_\alpha) \tag{10}$$

или матриц, транспонированных данным, где $m\equiv\overset{\alpha}{m}_{st}=\min(\overset{\alpha}{m}_s,\overset{\alpha}{m}_t)$.

Следствие 1. Матрица оператора ПКС $\underset{L}{J}$ в каноническом косорепере (Y_l) имеет блочно-диагональный вид

$$(\underset{L}{\overline{J}}{}^p_q) = \operatorname{diag}\left(\underset{L}{\overset{1}{J}},\dots,\underset{L}{\overset{k}{J}}\right), \tag{11}$$

где в соответствии с (4) и (8) $\underset{L}{\overset{\alpha}{J}} = -G_\alpha\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}$. Здесь $\alpha=1,\dots,k$ и матрицы $\underset{L}{\theta}{}^{\alpha}$ определены формулой (9).

Следствие 2. Все собственные значения оператора ПКС $\underset{L}{J}$ из теоремы 1 кратные. Каждая цифра в наборе $(\overset{\alpha}{m}_1\dots\overset{\alpha}{m}_{s_\alpha})$ встречается по меньшей мере дважды.

Пусть ${}^{\mu}\underset{L}{\overset{\alpha}{J}}$ — матрица, составленная из тех элементов $\underset{L}{\overline{J}}{}^p_q$ матрицы оператора ПКС в косорепере (Y_l), для которых индексы p, q соответствуют одинаковым цифрам $\overset{\alpha}{m}_s=\overset{\alpha}{m}_t\equiv\mu$ в характеристике Сегре (7). Обозначим через ρ_μ число одинаковых цифр μ, относящихся к собственному значению λ_α. Матрица ${}^{\mu}\underset{L}{\overset{\alpha}{J}}$ состоит из μ-мерных блоков ${}^{\mu}\underset{L}{\overset{\alpha}{J}}_{ab}$, $a,b=1,\dots\rho_\mu$, ${}^{\mu}\underset{L}{\overset{\alpha}{J}}_{aa}\equiv 0$ вида

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_{\mu-1} & d_\mu \\ 0 & d_1 & \dots & d_{\mu-2} & d_{\mu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad d_1,\dots,d_\mu\in\mathbf{C}. \tag{12}$$

Из (1), (10) и (11) следует $({}^{\mu}\underset{L}{\overset{\alpha}{J}})^2=-E_{\mu\cdot\rho_\mu}$, где $E_{\mu\cdot\rho_\mu}$ — единичная матрица порядка $\mu\cdot\rho_\mu$. Вычисляя определители от обеих частей этого равенства (это можно сделать обычным образом, пользуясь коммутативностью матриц вида (12)) и возводя в квадрат обе части полученного уравнения, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть в окрестности V каждой точки выполнены условия теоремы* 1 *и* λ-*матрица* $(G'-\lambda G)$ *имеет характеристику Сегре* $\chi = [(\overset{1}{m}_1 \dots \overset{1}{m}_{s_1}) \dots (\overset{k}{m}_1 \dots \overset{k}{m}_{s_k})]$. *Тогда любому вещественному собственному значению* λ_α *соответствует набор* $(\overset{\alpha}{m}_1 \dots \overset{\alpha}{m}_{s_\alpha})$, *состоящий из поднаборов, включающих четное количество одинаковых цифр*: $(\overset{\alpha}{m}_1 \dots \overset{\alpha}{m}_{s_\alpha}) = (\underbrace{\mu \dots \mu}_{\rho=2\nu} \dots \underbrace{\xi ... \xi}_{\rho=2\eta})$.

С помощью следствия 2 теоремы 1 доказывается

Теорема 3. *Пусть* (M_{4m}, g) *и* (M_{4m}, g') — *почти эрмитовы многообразия с общей кватернионной структурой* $\{\underset{1}{J}, \underset{2}{J}, \underset{3}{J}\}$. *Пусть* G *и* G' — *матричные функции* M_{4m}, *значения которых в каждой точке* $p \in M_{4m}$ *совпадают с матрицами форм* g *и* g' *в каком-либо базисе* T_pM_{4m}. *Тогда* λ-*матрица* $(G' - \lambda G)$ *имеет в окрестности* V *любой точки* $p \in M_{4m}$ *характеристику Сегре* $\chi = [(\overset{1}{m}_1 \dots \overset{1}{m}_{s_1}) \dots (\overset{k}{m}_1 \dots \overset{k}{m}_{s_k})]$, *где любому вещественному собственному значению* λ_α *соответствует набор* $(\overset{\alpha}{m}_1 \dots \overset{\alpha}{m}_{s_\alpha})$, *состоящий из поднаборов кратного четырем числа одинаковых цифр, а любому комплексному собственному значению* λ_β $(\operatorname{Im} \lambda_\beta \neq 0)$ *соответствует набор* $(\overset{\beta}{m}_1 \dots \overset{\beta}{m}_{s_\beta})$, *состоящий из поднаборов четного числа одинаковых цифр. Такой же набор соответствует комплексно сопряженному собственному значению* $\overline{\lambda}_\beta$.

Литература

1. Петров А.З. *К теореме о главных осях тензора* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. А. – 1949. – Т. 14. – № 3. – С. 37–51.
2. Aminova A.V. *On skew-orthonormal frame and parallel symmetric bilinear form on Riemannian manifold* // Tensor. – 1987. – V. 45. – P. 1–13.
3. Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН – 1993. – Т. 290. – № 2. – С. 107–164.
4. Калинин Д.А. *Приведение к каноническому виду пары эрмитовых форм* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 10. – С. 46–52.

Казанский государственный университет

Поступили
полный текст 18.01.1996
краткое сообщение 15.04.1999