Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, № 7, с. 57–66 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0073*

Ю.А. ФАРКОВ, С.А. СТРОГАНОВ

О ДИСКРЕТНЫХ ДИАДИЧЕСКИХ ВЕЙВЛЕТАХ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Аннотация. В настоящей работе для пространств комплексных периодических последовательностей с помощью дискретного преобразования Уолша построены аналоги ортогональных и биртогональных вейвлетов, изучавшихся ранее для группы Кантора. Проведенные вычислительные эксперименты демонстрируют эффективность методов обработки изображений, основанных на построенных дискретных вейвлетах.

Ключевые слова: диадические вейвлеты, пространства периодических последовательностей, функции Уолша, дискретное преобразование Уолша, обработка изображений.

УДК: 519.677

Abstract. In this paper, using the discrete Walsh transform, we construct orthogonal and biorthogonal wavelets for complex periodic sequences similar to those studied earlier for the Cantor group. Results of numerical experiments demonstrate the effectiveness of image processing methods based on the constructed discrete wavelets.

Keywords: dyadic wavelets, spaces of periodic sequences, Walsh functions, discrete Walsh transform, image processing.

1. Диадические вейвлеты в $\mathbb{C}_N$

Пусть $N = 2^n$ и $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, где n — натуральное число. Множество $\mathbb{Z}_N$ является абелевой группой с операцией поразрядного сложения по модулю 2, определяемой по формуле

$$k \oplus j := \sum_{\nu=0}^{n-1} |k_\nu - j_\nu|\, 2^\nu, \quad k_\nu, j_\nu \in \{0, 1\},$$

где $k = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} k_\nu 2^\nu$, $j = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} j_\nu 2^\nu$. Пространство $\mathbb{C}_N$ состоит из комплексных последовательностей

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots),$$

таких, что $x(j+N) = x(j)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Произвольная последовательность x из $\mathbb{C}_N$ задана, если указаны значения $x(j)$ для $j \in \mathbb{Z}_N$, поэтому иногда будем отождествлять x с вектором $(x(0), x(1), \dots, x(N-1))$. Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}_N$ вводятся по формулам

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}, \quad \|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Поступила 23.03.2010

В этом разделе для пространства $\mathbb{C}_N$ с помощью дискретного преобразования Уолша построены аналоги ортогональных и биртогональных вейвлетов, изучавшихся в [1]–[5] для группы Кантора и на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$. Специфика конечномерного случая проявляется не только в упрощении доказательств, но и в большей свободе выбора значений параметров при построении вейвлет-базисов.

Обозначим через $\mathbb{Z}_+$ множество целых неотрицательных чисел. Система функций Уолша $\{w_l \mid l \in \mathbb{Z}_+\}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ определяется равенствами

$$w_0(t) \equiv 1, \quad w_l(t) = \prod_{j=0}^{\mu}(w_1(2^j t))^{l_j}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где μ и l_j берутся из двоичного разложения

$$l = \sum_{j=0}^{\mu} l_j 2^j, \quad l_j \in \{0,1\}, \quad l_\mu = 1,$$

а w_1 — функция, заданная на $[0,1)$ формулой

$$w_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0,1/2); \\ -1, & \text{если } t \in [1/2,1) \end{cases}$$

и продолженная периодически на $\mathbb{R}$ с периодом 1. Отметим, что $w_k(l/N) = w_l(k/N)$ для всех $k,l \in \mathbb{Z}_N$.

Дискретное преобразование Уолша сопоставляет каждой последовательности x из $\mathbb{C}_N$ последовательность $\widehat{x}$ с компонентами

$$\widehat{x}(l) := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)w_j(l/N), \quad l \in \mathbb{Z}_N.$$

Формула обращения этого преобразования (см., например, [6]–[8]) имеет вид

$$x(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \widehat{x}(l)w_l(j/N), \quad j \in \mathbb{Z}_N. \tag{1}$$

Для каждого $l \in \mathbb{Z}_N$ определим вектор $w_l^{(N)} \in \mathbb{C}_N$:

$$w_l^{(N)}(j) := w_l(j/N), \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Система $\{w_l^{(N)} \mid l \in \mathbb{Z}_N\}$ является ортогональным базисом в $\mathbb{C}_N$, причем разложение произвольного вектора $x \in \mathbb{C}_N$ по этому базису может быть записано в виде (1).

Двоичная свертка векторов x и y из $\mathbb{C}_N$ определяется по формуле

$$(x * y)(k) := \sum_{j=0}^{N-1} x(k \oplus j)y(j), \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Известно, что $\widehat{x * y} = N\widehat{x}\,\widehat{y}$ и $\langle x, y\rangle = N\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle$ для любых $x, y \in \mathbb{C}_N$.

Единичным N-периодическим импульсом называется вектор δ_N из $\mathbb{C}_N$, определяемый равенством

$$\delta_N(j) := \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ делится на } N; \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } N. \end{cases}$$

Система сдвигов $\{\delta_N(\cdot \oplus k) \mid k \in \mathbb{Z}_N\}$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$ и

$$x(j) = (x * \delta_N)(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_N(j \oplus k), \quad j \in \mathbb{Z}_N,$$

для всех $x \in \mathbb{C}_N$. Легко видеть, что

$$\widehat{\delta}_N = \frac{1}{N}(1, 1, \ldots, 1) \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{N-1} w_l^{(N)} = N\delta_N.$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор сдвига $T_k : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ определяется по формуле $(T_k x)(j) := x(j \oplus k)$, $j \in \mathbb{Z}_N$, $x \in \mathbb{C}_N$. Отметим, что

$$\widehat{(T_k x)}(l) = w_k(l/N)\widehat{x}(l) \quad \text{и} \quad \langle y, T_k x\rangle = y * \widetilde{x}(k) \quad \text{для} \quad k, l \in \mathbb{Z}_N, \quad x, y \in \mathbb{C}_N,$$

где $\widetilde{x}(k) := \overline{x(k)}$. Для $\nu = 0, 1, \ldots, n$ положим $N_\nu = N/2^\nu$.

При построении ортогональных вейвлет-базисов в $\mathbb{C}_N$ мы в основном следуем подходу, изложенному в [9] и [10], заменив экспоненциальный базис системой функций Уолша и, соответственно, дискретное преобразование Фурье дискретным преобразованием Уолша. При обобщении этой конструкции на биортогональный случай применяем дискретные аналоги некоторых методов из ([11], § 8.3; [12], гл. 2; см. также [5]). Аналоги теоремы 1 и других сформулированных в этом разделе результатов можно получить для $N = p^n$, где p целое, $p \geq 2$. В этом случае вместо дискретного преобразования Уолша следует применять дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона (ср. с [3], [5], [13]). Отметим, что дискретные преобразования Уолша и Виленкина–Крестенсона являются дискретными мультипликативными преобразованиями и имеют ряд преимуществ по сравнению с дискретным преобразованием Фурье в задачах кодирования информации и в некоторых других областях (см., например, [7], гл. 11; [8]).

Определение 1. Пусть $u, v \in \mathbb{C}_N$. Если система $B(u, v) := \{T_{2k}u\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{2k}v\}_{k=0}^{N_1-1}$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$, то $B(u, v)$ называется *диадическим вейвлет-базисом первого этапа в $\mathbb{C}_N$, порожденным парой u, v.*

Следующая теорема характеризует все пары, порождающие диадические вейвлет-базисы первого этапа в $\mathbb{C}_N$.

Теорема 1. *Пара векторов $u, v \in \mathbb{C}_N$ порождает диадический вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда матрица*

$$\frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{u}(l) & \widehat{v}(l) \\ \widehat{u}(l + N_1) & \widehat{v}(l + N_1) \end{pmatrix}$$

является унитарной для $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$.

Для построения диадических вейвлет-базисов первого этапа полезны следующие два предложения.

Предложение 1. *Пусть $u \in \mathbb{C}_N$. Система $\{T_{2k}u\}_{k=0}^{N_1-1}$ ортонормирована в $\mathbb{C}_N$ в том и только том случае, когда*

$$|\widehat{u}(l)|^2 + |\widehat{u}(l + N_1)|^2 = 2/N^2 \quad \text{для} \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1. \tag{2}$$

Предложение 2. *Пусть $u \in \mathbb{C}_N$. Предположим, что система $\{T_{2k}u\}_{k=0}^{N_1-1}$ ортонормирована в $\mathbb{C}_N$, а вектор v определен равенством*

$$v(j) = (-1)^j \overline{u(1 \oplus j)}, \quad j \in \mathbb{Z}_N. \tag{3}$$

Тогда система $B(u,v) = \{T_{2k}u\}_{k=0}^{N_1} \cup \{T_{2k}v\}_{k=0}^{N_1}$ *является диадическим вейвлет-базисом первого этапа в* $\mathbb{C}_N$.

Аналоги предложений 1 и 2 для пространства $L^2(\mathbb{R})$ хорошо известны (см., например, [11], теорема 5.1.1; [12], теорема 1.3.1). Отметим, что для нахождения вектора $u \in \mathbb{C}_N$, удовлетворяющего условию (2), достаточно для произвольного $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ выбрать комплексные числа b_l, $0 \le l \le 2^q - 1$, такие, что

$$|b_l|^2 + |b_{l+2^{q-1}}|^2 = 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{q-1} - 1,$$

а затем положить

$$u(j) = \frac{\sqrt{2}}{2^q} \sum_{l=0}^{2^q-1} b_l w_l(j/2^q) \quad \text{для} \quad j = 0, 1, \dots, 2^q - 1$$

и $u(j) = 0$ для $j = 2^q, 2^q + 1, \dots, 2^n - 1$.

Пример 1. Полагая $q = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, получим, что для векторов

$$u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0, \dots, 0), \quad v = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0, \dots, 0)$$

система $B(u,v)$ является *базисом Хаара первого этапа* в $\mathbb{C}_N$.

Для случая, когда в определении вейвлет-базиса первого этапа вместо оператора T_k используется обычный оператор сдвига $x(j) \to x(j+k)$, $x \in \mathbb{C}_N$, $k \in \mathbb{Z}_N$, аналог примера 1 имеется в ([9], гл. 3). Следующий пример получен модификацией вейвлетов, построенных В. Ленгом [1], и соответствует случаю $q = 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = a$, $b_2 = 0$, $b_3 = b$.

Пример 2. Пусть a и b — комплексные числа такие, что $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Предположим, что $N \ge 4$ и векторы $u, v \in \mathbb{C}_N$ заданы равенствами

$$u(0) = \frac{1+a+b}{2\sqrt{2}}, \quad u(1) = \frac{1+a-b}{2\sqrt{2}}, \quad u(2) = \frac{1-a-b}{2\sqrt{2}}, \quad u(3) = \frac{1-a+b}{2\sqrt{2}},$$
$$v(0) = \frac{1+a-b}{2\sqrt{2}}, \quad v(1) = -\frac{1+a+b}{2\sqrt{2}}, \quad v(2) = \frac{1-a+b}{2\sqrt{2}}, \quad v(3) = -\frac{1-a-b}{2\sqrt{2}}$$

при условии, что $u(j) = v(j) = 0$ для $4 \le j \le N-1$. Тогда векторы u, v порождают диадический вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. При $a = 1$, $b = 0$ полученный вейвлет-базис $B(u,v)$ совпадает с вейвлет-базисом Хаара. Отметим также, что пара $a = 0$, $b = 1$ приводит к вейвлет-базису пространства $\mathbb{C}_N$, а в оригинальном примере В. Ленга [1] этой паре соответствует линейно зависимая система.

Операторы $D : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_{N_1}$ и $U : \mathbb{C}_{N_1} \to \mathbb{C}_N$, определенные по формулам $(Dx)(j) := x(2j)$, $j = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, и

$$(Uy)(j) := \begin{cases} y(j/2), & \text{если } j \text{ четно;} \\ 0, & \text{если } j \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{C}_N$, $y \in \mathbb{C}_{N_1}$, называются *оператором сгущающей выборки* и *оператором разрежающей выборки* соответственно. Отметим, что $D(Uy) = y$ для всех $y \in \mathbb{C}_{N_1}$.

Далее, пусть $D^1 = D$, $U^1 = U$ и для $\nu = 2, \dots, n$ операторы $D^\nu : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_{N_\nu}$, $U^\nu : \mathbb{C}_{N_\nu} \to \mathbb{C}_N$ определены по формулам

$$(D^\nu x)(j) := x(2^\nu j), \quad (U^\nu y)(j) := \begin{cases} y(j/2^\nu), & \text{если } j \text{ делится на } 2^\nu; \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } 2^\nu, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{C}_N$, $y \in \mathbb{C}_{N_\nu}$. Легко видеть, что $U^\nu(x * y) = U^\nu(x) * U^\nu(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}_{N_\nu}$.

Определение 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \le n$. *Последовательностью ортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа* называется последовательность векторов

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_m, v_m$$

таких, что $u_\nu, v_\nu \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$ и матрицы

$$A_\nu(l) := \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_\nu(l) & \widehat{v}_\nu(l) \\ \widehat{u}_\nu(l+N_\nu) & \widehat{v}_\nu(l+N_\nu) \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad l = 0, 1, \dots, N_\nu - 1,$$

унитарны.

С помощью предложений 1 и 2 обосновывается следующая *процедура построения последовательностей ортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа.*

1. Выбрать вектор $u \in \mathbb{C}_N$, удовлетворяющий условию (2).
2. Определить $v \in \mathbb{C}_N$ по формуле (3).
3. Принять $u_1 = u$, $v_1 = v$ и определить u_ν, v_ν для $\nu = 2, \dots, m$ равенствами

$$u_\nu(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} u_1(j + kN_{\nu-1}), \quad v_\nu(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} v_1(j + kN_{\nu-1}), \quad j \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}.$$

Здесь использовано обозначение $\Delta_\nu := 2^{\nu-1}$. Согласно следующей теореме для каждого $1 \le m \le n$ по любой последовательности ортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа можно построить ортонормированный вейвлет-базис в $\mathbb{C}_N$.

Теорема 2. *Пусть $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_m, v_m$ — последовательность ортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа. Положим $\varphi_1 = u_1$, $\psi_1 = v_1$, и для $\nu = 2, \dots, m$ определим*

$$\varphi_\nu = \varphi_{\nu-1} * U^{\nu-1} u_\nu, \quad \psi_\nu = \varphi_{\nu-1} * U^{\nu-1} v_\nu.$$

Далее, положим

$$\varphi_{-\nu,k} = T_{2^\nu k} \varphi_\nu, \quad \psi_{-\nu,k} = T_{2^\nu k} \psi_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, N_\nu - 1,$$

и определим подпространства

$$V_{-\nu} = \operatorname{span}\{\varphi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_\nu - 1}, \quad W_{-\nu} = \operatorname{span}\{\psi_{-\nu,k}\}_{k=0}^{N_\nu - 1}, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\mathbb{C}_N = W_{-1} \oplus V_{-1} = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus V_{-2} = \ldots = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \ldots \oplus W_{-m} \oplus V_{-m}$$

и система

$$\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^{N_2-1} \cup \ldots \cup \{\psi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_m-1} \cup \{\varphi_{-m,k}\}_{k=0}^{N_m-1}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}_N$.

Эта теорема аналогична теореме 3.27 из [9]. Отсюда при $n = 3$ получаются три ортонормированных вейвлет-базиса в $\mathbb{C}_8$:

$$\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^{3} \cup \{\varphi_{-1,k}\}_{k=0}^{3} \quad (m = 1),$$
$$\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^{3} \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^{1} \cup \{\varphi_{-2,k}\}_{k=0}^{1} \quad (m = 2),$$
$$\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^{3} \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^{1} \cup \{\psi_{-3,0}\} \cup \{\varphi_{-3,0}\} \quad (m = 3).$$

Ортогональные проекторы $P_{-\nu} : \mathbb{C}_N \to V_{-\nu}$ и $Q_{-\nu} : \mathbb{C}_N \to W_{-\nu}$ действуют по формулам

$$P_{-\nu} x = \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} \langle x, \varphi_{-\nu,k} \rangle \varphi_{-\nu,k}, \quad Q_{-\nu} x = \sum_{k=0}^{N_\nu - 1} \langle x, \psi_{-\nu,k} \rangle \psi_{-\nu,k}, \quad x \in \mathbb{C}_N.$$

Пусть I — тождественный оператор на $\mathbb{C}_N$. Полагая $P_0 = I$, из теоремы 2 получаем

$$x = P_{-\nu}x + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} Q_{-\varkappa}x, \quad P_{-\nu+1}x = P_{-\nu}x + Q_{-\nu}x, \quad \langle P_{-\nu}x, Q_{-\nu}x\rangle = 0$$

для всех $x \in \mathbb{C}_N$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. В частности, при $\nu = 1$ имеем

$$x = \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \varphi_{-1,k}\rangle \varphi_{-1,k} + \sum_{k=0}^{N_1-1} \langle x, \psi_{-1,k}\rangle \psi_{-1,k}.$$

В соответствии с приведенной выше процедурой можем принять $u_1 = u$, $v_1 = v$ и тогда

$$\varphi_{-1,k} = T_{2k}u, \quad \psi_{-1,k} = T_{2k}v, \quad \langle x, \varphi_{-1,k}\rangle = (D(x * \widetilde{u}))(k), \quad \langle x, \psi_{-1,k}\rangle = (D(x * \widetilde{v}))(k).$$

Отсюда получается *формула фазы анализа первого этапа*:

$$x = \sum_{k=0}^{N_1-1} (D(x * \widetilde{u}))(k) T_{2k}u + \sum_{k=0}^{N_1-1} (D(x * \widetilde{v}))(k) T_{2k}v.$$

Формула для обратного преобразования выводится из следующего утверждения.

Предложение 3. *Пусть $u, v, f, g \in \mathbb{C}_N$. Для того чтобы равенство*

$$\widetilde{f} * U(D(x * \widetilde{u})) + \widetilde{g} * U(D(x * \widetilde{v})) = x \tag{4}$$

выполнялось для любого $x \in \mathbb{C}_N$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}(l) & \widehat{v}(l) \\ \widehat{u}(l+N_1) & \widehat{v}(l+N_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{f}(l) \\ \widehat{g}(l) \end{pmatrix} = \frac{2}{N^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для всех $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$.

Полагая $f = \widetilde{u}$ и $g = \widetilde{v}$, из (4) получаем следующую *формулу фазы синтеза первого этапа*:

$$u * U(D(x * \widetilde{u})) + v * U(D(x * \widetilde{v})) = x.$$

Пусть дана последовательность ортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m$. Для произвольного $x \in \mathbb{C}_N$ определим векторы

$$x_1 = D(x * \widetilde{v}_1) \in \mathbb{C}_{N_1}, \qquad y_1 = D(x * \widetilde{u}_1) \in \mathbb{C}_{N_1},$$

а затем положим

$$x_l = D(x_{l-1} * \widetilde{v}_l) \in \mathbb{C}_{N_l}, \quad y_l = D(y_{l-1} * \widetilde{u}_l) \in \mathbb{C}_{N_l}, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

На выходе фазы анализа m-го этапа получается вектор $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_m\}$. Этим завершается *прямое дискретное вейвлет-преобразование*, соответствующее данной последовательности вейвлет-фильтров m-го этапа. *Обратное дискретное вейвлет-преобразование* составляет фазу синтеза и переводит вектор $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_m\}$ в исходный "сигнал" x по формулам

$$y_{l-1} = u_l * U(y_l) + v_l * U(x_l), \quad l = m, \quad m-1, \ldots, 2, \quad x = u_1 * U(y_1) + v_1 * U(x_1).$$

В следующем предложении предполагается, что $\widehat{u}_1, \widehat{v}_1, \widehat{u}_2, \widehat{v}_2, \ldots, \widehat{u}_m, \widehat{v}_m$ вычислены заранее и хранятся в машинной памяти.

Предложение 4. *Пусть $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m$ — последовательность ортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа, и пусть $x \in \mathbb{C}_N$. Тогда вектор $\{x_1, x_2, ..., x_m, y_m\}$ на выходе фазы анализа, соответствующего m-этапному набору фильтров, может быть вычислен не более чем за $4N + 2N \log_2 N$ комплексных умножений.*

Число комплексных умножений для фазы синтеза оценивается аналогично (ср. с леммой 3.17 из [9]). Приведем теперь метод построения последовательности биортогональных диадических вейвлет-фильтров.

Предложение 5. *Пусть $u, s \in \mathbb{C}_N$. Системы $\{T_{2k}u\}_{k=0}^{N_1-1}$ и $\{T_{2k}s\}_{k=0}^{N_1-1}$ биортонормированы в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{u}(l)\overline{\widehat{s}(l)} + \widehat{u}(l+N_1)\overline{\widehat{s}(l+N_1)} = \frac{2}{N^2} \quad \text{для} \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1. \tag{5}$$

Определение 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \le n$. *Последовательностью биортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа* называется последовательность векторов

$$u_1, v_1, s_1, \tau_1, u_2, v_2, s_2, \tau_2, \ldots, u_m, v_m, s_m, \tau_m$$

таких, что $u_\nu, v_\nu, s_\nu, \tau_\nu \in \mathbb{C}_{N_{\nu-1}}$, и равенства

$$\begin{pmatrix} \overline{\widehat{s}_\nu(l)} & \overline{\widehat{s}_\nu(l+N_\nu)} \\ \overline{\widehat{\tau}_\nu(l)} & \overline{\widehat{\tau}_\nu(l+N_\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_\nu(l) & \widehat{v}_\nu(l) \\ \widehat{u}_\nu(l+N_\nu) & \widehat{v}_\nu(l+N_\nu) \end{pmatrix} = \frac{2}{N^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнены для всех $\nu = 1, 2, \ldots, m$, $l = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$.

По аналогии с ортогональным случаем имеем следующую *процедуру построения последовательностей биортогональных диадических вейвлет-фильтров m-го этапа.*

1. Выбрать векторы $u, s \in \mathbb{C}_N$, удовлетворяющие условию (5).
2. Определить $v, \tau \in \mathbb{C}_N$ по формулам

$$v(j) = (-1)^j \overline{s(1 \oplus j)}, \quad \tau(j) = (-1)^j \overline{u(1 \oplus j)}, \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

3. Принять $u_1 = u$, $v_1 = v$, $s_1 = s$, $\tau_1 = \tau$ и определить $u_\nu, v_\nu, s_\nu, \tau_\nu$ для $\nu = 2, \ldots, m$ равенствами

$$u_\nu(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} u_1(j + kN_{\nu-1}), \quad v_\nu(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} v_1(j + kN_{\nu-1}), \quad j \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}},$$

$$s_\nu(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} s_1(j + kN_{\nu-1}), \quad \tau_\nu(j) = \Delta_\nu^{-1} \sum_{k=0}^{\Delta_\nu - 1} \tau_1(j + kN_{\nu-1}), \quad j \in \mathbb{Z}_{N_{\nu-1}}.$$

Доказательства сформулированных выше теорем и предложений аналогичны доказательствам соответствующих результатов из ([9], гл. 3).

2. Применение к обработке изображений

Основные методы применения вейвлетов в задачах обработки изображений изложены в ([14], с. 183–213; [15], с. 578–609). Существует несколько подходов к выбору наилучшего вейвлета для данного изображения из класса вейвлетов с фиксированным числом параметров. Так называемый “подход с обратной связью” (feedback-based approach) к этой задаче может быть разбит на три основных шага: (a) представление входного изображения в виде массива его вейвлет-коэффициентов, (b) восстановление изображения и подсчет величины PSNR, (c) замена параметров для достижения наилучшего значения PSNR (см., например, [16]). Напомним, что для данного входного изображения $f(x,y)$ размера $M \times M$ и выходного изображения $g(x,y)$ величина PSNR определяется по формуле

$$\mathrm{PSNR} = 20 \lg \frac{255M}{\left(\sum\limits_{x,y=1}^{M} \big(f(x,y) - g(x,y) \big)^2 \right)^{1/2}}.$$

Методом A будем называть метод кодирования изображений, состоящий из следующих четырех шагов.

(1) К входному изображению $f(x, y)$ применяется прямое дискретное вейвлет-преобразование (*фаза анализа*).
(2) Среди вейвлет-коэффициентов выделяется некоторое количество (например, 10% или 1%) наибольших по модулю, остальные коэффициенты приравниваются к нулю.
(3) К полученному массиву вейвлет-коэффициентов применяется обратное дискретное вейвлет-преобразование (*фаза синтеза*).
(4) Для восстановленного изображения $g(x, y)$ вычисляется значение PSNR.

Метод B отличается от метода A тем, что в нем шаг 2 заменен равномерным квантованием вейвлет-коэффициентов $x_{i,j}$ по формуле

$$x_{i,j} = \operatorname{sign}(x_{i,j}) \left\lfloor \frac{x_{i,j}}{\Delta} \right\rfloor,$$

где Δ — шаг квантования.

Вейвлет Добеши порядка N обозначается через DN (см. [11], табл. 6.1; [9], § 3.3). С. Уэлстидом [15] с использованием метода A было показано, что вейвлет D4 имеет преимущества по сравнению с вейвлетом Хаара для изображения 'lena'. В этом разделе сравним вейвлеты Добеши с семействами диадических дискретных вейвлетов из следующих двух примеров.

Пример 3. Пусть b_0, b_1, b_2, b_3 — комплексные числа такие, что $|b_0|^2+|b_2|^2=1$ и $|b_1|^2+|b_3|^2=1$. Предположим, что $N \geq 4$ и векторы $u, v \in \mathbb{C}_N$ заданы формулами

$$u(0) = -v(1) = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3}{2\sqrt{2}}, \quad u(1) = v(0) = \frac{b_0 + b_1 - b_2 - b_3}{2\sqrt{2}},$$
$$u(2) = -v(3) = \frac{b_0 - b_1 + b_2 - b_3}{2\sqrt{2}}, \quad u(3) = v(2) = \frac{b_0 - b_1 - b_2 + b_3}{2\sqrt{2}}$$

при условии, что $u(j) = v(j) = 0$ для $4 \leq j \leq N-1$. Тогда векторы u и v порождают диадический вейвлет-базис первого этапа в $\mathbb{C}_N$. В частности, при $b_0 = b_1 = 1$ получается базис Хаара, а при $b_0 = 1$, $b_1 = a$, $b_2 = 0$, $b_3 = b$ — базис из примера 3. В численных экспериментах параметры b_0 и b_1 были выбраны свободными, а b_2 и b_3 вычисляемыми.

В численных экспериментах использовались изображения в градациях серого 'lena', 'winter', 'bird', 'goldhill', 'rose', 'bridge' размером 256×256 пикселей. При использовании метода A результаты для диадических вейвлет-базисов совпали с результатами для базиса Хаара. Методом B наилучшего результата для семейства вейвлетов из примера 3 удалось добиться для изображения 'winter' и $\Delta = 20$. В этом случае наибольшееe значение PSNR равно 35.032 Дб при $b_0 = b_1 = -1/\sqrt{2}$, $b_2 = b_3 = 1/\sqrt{2}$. Для базиса Хаара PSNR равно 33.351 Дб, а для D4 — 33.36 Дб.

Пример 4. Предположим, что вектор $u \in \mathbb{C}_N$ задан как в примере 3, а вектор $s \in \mathbb{C}_N$ определен аналогично по числам $\widetilde{b}_0, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \widetilde{b}_3$ таким, что

$$b_0\widetilde{b}_0 + b_2\widetilde{b}_2 = 1 \quad \text{и} \quad b_1\widetilde{b}_1 + b_3\widetilde{b}_3 = 1.$$

Тогда условие (5) выполнено и можно применить процедуру построения диадических вейвлет-фильтров m-го этапа.

Отметим, что в то время как для вейвлетов из примера 3 оптимальные параметры были получены методом перебора, для вейвлетов из примера 4 использовался генетический алгоритм (см., например, [17]). Для метода A и всех указанных выше изображений результаты вычислений для диадических базисов совпали с результатами для базиса Хаара. Результаты, полученные с использованием метода B, приведены в табл. 1 и 2, где вейвлеты из примера 4 обозначены через DBW4. В этих таблицах указаны также значения PSNR для биортогонального базиса 9/7, используемого в стандарте JPEG2000.

Таблица 1. Значения PSNR для метода B при $\Delta = 20$

Изображение	Haar	D4	D9/7	DBW4
lena	35.277309	35.730218	35.9138	35.275188
winter	33.351017	33.360446	33.212011	34.699546
bird	37.989651	38.483515	38.735218	39.935549
bridge	33.47463	33.541907	33.507395	33.254276
goldhill	33.925726	33.993981	33.907484	33.835024
rose	35.259254	35.62727	35.788181	36.246756

Таблица 2. Значения PSNR для метода B при $\Delta = 50$

Изображение	Haar	D4	D9/7	DBW4
lena	29.699286	30.226144	30.554083	31.483761
winter	26.830675	26.840673	26.821589	27.146448
bird	33.16109	33.655059	33.959729	36.235351
bridge	27.024998	27.154206	27.265919	28.583615
goldhill	28.41971	28.543566	28.604985	30.197376
rose	29.547306	26.840673	30.598752	32.112816

Наибольшее значение PSNR получилось для изображения 'bird' с помощью базиса DBW4 при значениях параметров указанных в табл. 3.

Таблица 3. Значения параметров для изображения 'bird'

$\Delta = 20$		$\Delta = 50$	
$b_0 = -0.0000741$	$\widetilde{b}_0 = -0.210702$	$b_0 = -0.0004776$	$\widetilde{b}_0 = -0.0613793$
$b_1 = -0.03448621$	$\widetilde{b}_1 = -0.0348843$	$b_1 = -0.0487495$	$\widetilde{b}_1 = -0.2199794$
$b_2 = 0.2618643$	$\widetilde{b}_2 = 3.8186904$	$b_2 = -0.3209754$	$\widetilde{b}_2 = -3.1154209$
$b_3 = 0.2874614$	$\widetilde{b}_3 = 3.4534553$	$b_3 = 0.3502115$	$\widetilde{b}_3 = 2.5492056$

Результаты экспериментов показывают, что при использовании метода B вейвлет-базисы из примера 4 в большинстве случаев превосходят классические базисы Хаара и Добеши (а также биортогональный базис 9/7) по качеству восстановленного изображения.

Литература

[1] Lang W.C. *Wavelet analysis on the Cantor dyadic group*, Houston J. Math. **24** (3), 533–544 (1998).

[2] Фарков Ю.А. *Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах*, Изв. РАН. Сер. матем. **69** (3), 193–220 (2005).

[3] Farkov Yu.A. *On wavelets related to the Walsh series*, J. Approx. Theory **161** (1), 259–279 (2009).

[4] Родионов Е.А., Фарков Ю.А. *Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши*, Матем. заметки **86** (3), 429–444 (2009).

[5] Фарков Ю.А. *Биортогональные всплески на группах Виленкина*, Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова **265**, 110–124 (2009).
[6] Schipp F., Wade W.R., Simon P. *Walsh series*: *an introduction to dyadic harmonic analysis* (Adam Hilger, N. Y., 1990).
[7] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша*: *теория и применения* (Изд-во ЛКИ, М., 2008).
[8] Залманзон Л.А. *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях* (Наука, М., 1983).
[9] Фрейзер М. *Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры* (БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2008).
[10] Broughton S.A., Bryan K.M. *Discrete Fourier analysis and wavelets. Applications to signal and image processing* (John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2009).
[11] Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам* (НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск, 2001).
[12] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. *Теория всплесков* (Физматлит, М., 2006).
[13] Малоземов В.Н., Машарский С.М. *Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона*, Алгебра и анализ **13** (1), 111–157 (2001).
[14] Малла С. *Вейвлеты в обработке сигналов* (Мир, М., 2005).
[15] Уэлстид С. *Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии* (Изд-во Триумф, М., 2003).
[16] Hereford J., Roach D.W., Pigford R. *Image compression using parameterized wavelets with feedback*, Independent Component Analysis, Wavelets and Neural Networks, Proc. SPIE, Vol. 5102, pp. 267–277 (2003).
[17] Holland J.H. *Adaptation in natural and artificial systems. An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence* (University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975).

Ю.А. Фарков

профессор, заведующий кафедрой высшей математики и математического моделирования,
Российский государственный геологоразведочный университет,
ул. Миклухо-Маклая, д. 23, г. Москва, 117997,

`e-mail:` farkov@list.ru

С.А. Строганов

аспирант, кафедра высшей математики и математического моделирования,
Российский государственный геологоразведочный университет,
ул. Миклухо-Маклая, д. 23, г. Москва, 117997,

`e-mail:` o6jiomob@gmail.com

Yu.A. Farkov

Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modeling,
Russian State Geological Prospecting University,
23 Miklukho-Maklai str., Moscow, 117997 Russia,

`e-mail:` farkov@list.ru

S.A. Stroganov

Postgraduate, Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modeling,
Russian State Geological Prospecting University,
23 Miklukho-Maklai str., Moscow, 117997 Russia,

`e-mail:` o6jiomob@gmail.com