ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.925

М.Т. ТЕРЁХИН

НЕНУЛЕВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t,\lambda)x + f(t,x,\lambda)x, \tag{1}$$

в которой $x \in E_2$, $A(t,\lambda) = [a_{ij}(t,\lambda)]_1^2$ и $f(t,x,\lambda) = [f_{ij}(t,x,\lambda)]_1^2$ — ω-периодические по t матрицы, $\lambda \in E_m$, λ — параметр, $t \in R =]-\infty, \infty[$, E_s — s-мерное векторное пространство.

Пусть $|x| = \max\limits_i |x_i|$, $D(\delta_0) = \{(x,\lambda) : |x| \le \delta_0,\ |\lambda - \lambda_0| \le \delta_0\}$, $W(\delta_0) = \{\alpha : \alpha \in E_2,\ |\alpha| \le \delta_0\}$, $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda : \lambda \in E_m,\ |\lambda - \lambda_0| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число, $\lambda_0 \in E_m$.

Определим условия существования ненулевого периодического решения системы (1). Такая задача методом малого параметра изучалась в [1]. В [2] задача о существовании периодического решения системы дифференциальных уравнений при условии существования функции Грина в некотором обобщенном смысле сведена к аналогичной задаче для системы интегральных уравнений, к исследованию которой предлагается применять принцип сжатых отображений. В [3] для системы дифференциальных уравнений, правая часть которой — голоморфная вектор-функция по переменным x, λ, в условиях выполнимости бифуркационной системы равенств доказана теорема о существовании периодического решения. Проблема определения условий существования периодического решения в [4] сведена к проблеме разрешимости трансцендентных уравнений бифуркаций.

В данной работе доказана теорема об условиях существования ненулевого периодического решения системы (1), определяемых достаточно общей зависимостью от параметра элементов матрицы системы линейного приближения, при этом предполагается, что нелинейные члены только непрерывны, система (1) обладает свойством единственности решения.

Далее всюду полагаем, что на множестве $R \times D(\delta_0)$ матрицы $A(t,\lambda)$ и $f(t,x,\lambda)$ непрерывны, $f(t,0,\lambda) \equiv 0$.

Заменой переменных

$$x_1 = \Big(\exp\int_0^t a_{11}(\tau,\lambda)d\tau\Big)y_1, \quad x_2 = \Big(\exp\int_0^t a_{22}(\tau,\lambda)d\tau\Big)y_2 \tag{2}$$

систему (1) сведем к системе

$$\dot{y} = B(t,\lambda)y + \Psi(t,y,\lambda)y, \tag{3}$$

в которой $B(t,\lambda) = [b_{ij}(t,\lambda)]_1^2$, $b_{ii}(t,\lambda) \equiv 0$, $\Psi(t,y,\lambda) = [\psi_{ij}(t,y,\lambda)]_1^2$,

$$b_{12}(t,\lambda) = a_{12}(t,\lambda)\exp\int_0^t [a_{22}(\tau,\lambda) - a_{11}(\tau,\lambda)]d\tau,$$

$$b_{21}(t,\lambda) = a_{21}(t,\lambda)\exp\Big[-\int_0^t [a_{22}(\tau,\lambda) - a_{11}(\tau,\lambda)]d\tau\Big].$$

Для системы (3) сохраним обозначения, принятые для системы (1). Символом $y(\cdot,\alpha,\lambda)$ обозначим непрерывное решение системы (3), удовлетворяющее условию $y(0,\alpha,\lambda)=\alpha$. Очевидно, при любом $\lambda\in\Lambda(\delta_0)$ решением системы (3) является $y\equiv 0$.

Определение. Следуя ([5], с. 172), назовем λ_0 бифуркационным значением параметра λ системы (3), если для любого $\varepsilon>0$ существуют векторы $\alpha\in E_2$, $\alpha\neq 0$, $\lambda\in E_m$ такие, что $\lambda\in\Lambda(\varepsilon)$, решение $y(\cdot,\alpha,\lambda)$ системы (3) является ω-периодическим решением, удовлетворяющим неравенству $|y(\cdot,\alpha,\lambda)|<\varepsilon$ при любом $t\in[0,\omega]$.

Одновременно с системой (3) рассмотрим линейную систему

$$\dot z = C(t,\alpha,\lambda)z, \tag{4}$$

в которой $z\in E_2$, матрица $C(t,\alpha,\lambda)=B(t,\lambda)+\Psi(t,y(t,\alpha,\lambda),\lambda)$. Пусть $Z(t,\alpha,\lambda)$ — фундаментальная матрица системы (4), $Z(0,\alpha,\lambda)=E$, E — единичная матрица.

Определим оператор Γ равенством

$$(Z(\omega,\alpha,\lambda)-E)\alpha^*=0 \tag{5}$$

при условии, что $\Gamma(\alpha)=\alpha^*$.

Теорема 1. *Пусть матрицы $B(t,\lambda)$ и $\Psi(t,y,\lambda)$ ω-периодические по t. Вектор λ_0 тогда и только тогда является бифуркационным значением параметра λ системы* (3)*, когда при любом $\delta\in]0,\delta_0]$ существует вектор $\lambda\in\Lambda(\delta_0)$, при котором оператор Γ имеет неподвижную точку $\alpha_0\neq 0$, $\alpha_0\in W(\delta_0)$.*

Справедливость теоремы непосредственно следует из построения системы (4) и определения периодического решения.

Пусть $Y(t,\lambda)$ — фундаментальная матрица системы $\dot y=B(t,\lambda)y$, $Y(0,\lambda)=E$. Тогда матрицу $Z(t,\alpha,\lambda)$ можно представить в виде $Z(t,\alpha,\lambda)=Y(t,\lambda)+\Phi(t,\alpha,\lambda)$, $\Phi(0,\alpha,\lambda)$ — нулевая матрица, $\Phi(t,\alpha,\lambda)=[\varphi_{ij}(t,\alpha,\lambda)]_1^2$, $\lim\limits_{|\alpha|\to 0}\varphi_{ij}(t,\alpha,\lambda)=0$ равномерно относительно λ.

Матрицу $Y(t,\lambda)$ будем рассматривать как матрицант системы $\dot y=B(t,\lambda)y$ ([6], с. 74). Тогда, учитывая вид матрицы $B(t,\lambda)$ и положив $b_0{=}1$, $b_n(t,\lambda){=}\int_0^t b_{21}(t_1,\lambda)dt_1\int_0^{t_1} b_{12}(t_2,\lambda)b_{n-1}(t_2,\lambda)dt_2$, $c_0=1$, $c_n(t,\lambda)=\int_0^t b_{12}(t_1,\lambda)dt_1\int_0^{t_1} b_{21}(t_2,\lambda)c_{n-1}(t_2,\lambda)dt_2$, запишем представление

$$Y(t,\lambda)-E=\begin{pmatrix}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^t c_{n+1}(\zeta,\lambda)d\zeta & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^t b_{12}(\zeta,\lambda)b_n(\zeta,\lambda)d\zeta\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^t b_{21}(\zeta,\lambda)c_n(\zeta,\lambda)d\zeta & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^t b_{n+1}(\zeta,\lambda)d\zeta\end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Пусть* 1) *существует $\delta\in]0,\delta_0]$ такое, что $\int_0^{\omega} a_{11}(t,\lambda)dt=\sum\limits_{s=1}^{4}a_{3s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s}+o(|\overline{\lambda}|)$, $\int_0^{\omega} a_{22}(t,\lambda)dt=\sum\limits_{s=1}^{4}a_{4s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s}+o(|\overline{\lambda}|)$ на множестве $\Lambda(\delta)\subset E_4$;* 2) *выполняется одна из четырех серий условий:*

I. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{12}(t,\lambda)b_n(t,\lambda)dt=\sum\limits_{s=1}^{4}\alpha_{1s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s}+o(|\overline{\lambda}|)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{n+1}(t,\lambda)dt=\sum\limits_{s=1}^{4}\alpha_{2s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s}+o(|\overline{\lambda}|)$;

II. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} c_{n+1}(t,\lambda)dt=\sum\limits_{s=1}^{4}\alpha_{1s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s}+o(|\overline{\lambda}|)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{21}(t,\lambda)c_n(t,\lambda)dt=\sum\limits_{s=1}^{4}\alpha_{2s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s}+o(|\overline{\lambda}|)$;

III. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{21}(t,\lambda)c_n(t,\lambda)dt = \sum_{s=1}^{4}\alpha_{1s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s} + o(|\overline{\lambda}|),\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{n+1}(t,\lambda)dt = \sum_{s=1}^{4}\alpha_{2s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s} + o(|\overline{\lambda}|)$ *и* $b_{21}(t,0)=0$ *при любом* $t\in[0,\omega]$, $\displaystyle\int_0^{\omega} b_{12}(t,0)dt \neq 0$;

IV. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} c_{n+1}(t,\lambda)dt = \sum_{s=1}^{4}\alpha_{1s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s} + o(|\overline{\lambda}|),\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{12}(t,\lambda)b_n(t,\lambda)dt = \sum_{s=1}^{4}\alpha_{2s}(\lambda)\lambda_s^{\mu_s} + o(|\overline{\lambda}|)$ *и* $b_{12}(t,0)=0$ *при любом* $t\in[0,\omega]$, $\displaystyle\int_0^{\omega} b_{21}(t,0)dt \neq 0$,

где $\overline{\lambda}=(\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\overline{\lambda}_3,\overline{\lambda}_4)$, $\overline{\lambda}_p=\lambda_p^{\mu_p}$ *при любом* $p\in\{1,2,3,4\}$, $\lim\limits_{\overline{\lambda}\to 0} o(|\overline{\lambda}|)/|\overline{\lambda}|=0$, *функции* $\lambda\to\alpha_{ps}(\lambda)$ *непрерывны, матрица* $[a_{ij}(0)]_1^4$ *неособенная;*

3) $\mu_s>0$ *при любом* $s\in\{1,2,3,4\}$ *и удовлетворяет равенству* $(-\gamma)^{\mu_s}=-(\gamma)^{\mu_s}$, $\gamma>0$ — *некоторое число.*

Тогда $\lambda_0=0$ — *бифуркационное значение параметра* λ *системы* (3).

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ таковы, что при любом $\alpha\in W(\delta)$, $\lambda\in\Lambda(\delta)$ решение $y(\cdot,\alpha,\lambda)$ системы (3) определено на промежутке $[0,\omega]$ и при любом $t\in[0,\omega]$ выполнено неравенство $|y(t,\alpha,\lambda)|<\varepsilon$. Следовательно, на множестве $W(\delta)\times\Lambda(\delta)$ матрица $Z(\omega,\alpha,\lambda)$ определена.

Рассмотрим сначала случай, когда выполнены условия серии I. Убедимся, что число $\delta\in]0,\delta_0]$ можно выбрать так, что для любого числа $\delta_1\in]0,\delta]$ существуют векторы $\alpha\in W(\delta_1)$, $\alpha\neq 0$, $\lambda\in\Lambda(\delta_1)$ такие, что

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{12}(\xi,\lambda)b_n(\xi,\lambda)d\xi+\varphi_{12}(\omega,\alpha,\lambda)=0,\\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega} b_{n+1}(\xi,\lambda)d\xi+\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda)=0,\\ \int_0^{\omega} a_{ii}(t,\lambda)dt=0,\quad i=1,2.\end{gathered}\tag{6}$$

Из условий 1) и 2) теоремы следует, что систему (6) можно представить в виде

$$\sum_{s=1}^{4}\alpha_{ps}(\lambda)\overline{\lambda}_s+o(|\overline{\lambda}|)+\varphi_{p2}(\omega,\alpha,\lambda)=0.\tag{7}$$

Пусть $\Delta(\lambda)=[\alpha_{ps}(\lambda)]_1^4$. Так как матрица $\Delta(0)$ неособенная, то $\delta\in]0,\delta_0]$ можно выбрать таким образом, что при любом $\lambda\in\Lambda(\delta)$ матрица $\Delta(\lambda)$ также неособенная. Систему (7) запишем в виде

$$\begin{gathered}\overline{\lambda}=-\Delta^{-1}(\lambda)[o(|\overline{\lambda}|)+\varphi_2(\omega,\alpha,\lambda)],\\ \varphi_2(\omega,\alpha,\lambda)=(\varphi_{12}(\omega,\alpha,\lambda),\varphi_{22}(\omega,\alpha,\lambda),0,0).\end{gathered}$$

Оператор A определим равенством $A\overline{\lambda}=-\Delta^{-1}(\lambda)[o(|\overline{\lambda}|)+\varphi_2(\omega,\alpha,\lambda)]$.

Учитывая свойства $o(|\overline{\lambda}|)$ и $\varphi_2(\omega,\alpha,\lambda)$, можно утверждать существование такого числа $\delta\in]0,\delta_0]$, что при $\delta_1\in]0,\delta]$ оператор A на множестве $\{\overline{\lambda}:|\overline{\lambda}|\le\delta_1\}$ непрерывен и при любом фиксированном $\alpha\in W(\delta_1)$ для любого вектора $\overline{\lambda}$, удовлетворяющего неравенству $|\overline{\lambda}|\le\delta_1$, имеет место включение $A\overline{\lambda}\in\{\overline{\lambda}:|\overline{\lambda}|\le\delta_1\}$. Следовательно, при любом фиксированном $\alpha\in W(\delta_1)$ оператор A на множестве $\{\overline{\lambda}:|\overline{\lambda}|\le\delta_1\}$ имеет неподвижную точку.

Пусть вектор $\alpha^*=(0,\alpha_2)$, $\alpha_2\neq 0$, таков, что $|\alpha^*|\le\delta_1$. Из приведенных рассуждений следует, что существует $\lambda^*\in\Lambda(\delta_1)$, при котором второй столбец матрицы $Z(\omega,\alpha^*,\lambda^*)-E$ является нулевым, а функции $t\to\exp\displaystyle\int_0^{\omega} a_{ii}(\xi,\lambda^*)d\xi$, $t\to b_{ij}(t,\lambda^*)$ являются ω-периодическими, $i\neq j$,

$i, j = 1, 2$. Поэтому при $\lambda = \lambda^*$ вектор α^* является неподвижной точкой оператора Γ, определенного равенством (5). Отсюда по теореме 1 λ_0 — бифуркационное значение параметра λ системы (3).

Доказательство теоремы в случае выполнения условий серии II аналогично.

Пусть выполнены условия серии III. Система (4) при $\lambda = 0$, $\alpha = 0$ примет вид

$$\dot{y}_1 = b_{12}(t, 0) y_2, \quad \dot{y}_2 = 0. \tag{8}$$

Решением системы (8), удовлетворяющим начальным условиям $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, является вектор-функция $y(t) = \Big(\int_0^t b_{12}(\xi, 0) d\xi, 1 \Big)$. Тогда в силу непрерывной зависимости решения системы (3) (следовательно, и системы (4)) от начальных данных и параметра можно выбрать число $\delta \in]0, \delta_0]$ таким, чтобы при любых $(\alpha, \lambda) \in W(\delta) \times \Lambda(\delta)$ в матрице $Z(\omega, \alpha, \lambda) - E$ элемент

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} b_{12}(t, \lambda) b_n(t, \lambda) dt + \varphi_{12}(\omega, \alpha, \lambda) \neq 0.$$

Докажем, что $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любого числа $\delta_1 \in]0, \delta]$ будут существовать векторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in W(\delta_1)$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \Lambda(\delta_1)$ такие, что

$$\begin{gathered}
\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} c_{n+1}(t, \lambda) dt + \varphi_{11}(\omega, \alpha, \lambda) \Big) \alpha_1 + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} b_{12}(t, \lambda) b_n(t, \lambda) dt + \varphi_{12}(\omega, \alpha, \lambda) \Big) \alpha_2 = 0, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} b_{21}(t, \lambda) c_n(t, \lambda) dt + \varphi_{21}(\omega, \alpha, \lambda) = 0, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} b_{n+1}(t, \lambda) dt + \varphi_{22}(\omega, \alpha, \lambda) = 0, \\
\int_0^{\omega} a_{ii}(t, \lambda) dt = 0, \quad i = 1, 2.
\end{gathered} \tag{9}$$

Для простоты записей положим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} c_{n+1}(t, \lambda) dt + \varphi_{11}(\omega, \alpha, \lambda) = B_1(\omega, \alpha, \lambda),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} b_{12}(t, \lambda) b_n(t, \lambda) dt + \varphi_{12}(\omega, \alpha, \lambda) = B_2(\omega, \alpha, \lambda).$$

Тогда, учитывая условие 1) теоремы, систему (9) запишем в виде

$$\begin{gathered}
\alpha_2 = -B_2^{-1}(\omega, \alpha, \lambda) B_1(\omega, \alpha, \lambda) \alpha_1, \\
\sum_{s=1}^{4} a_{ps}(\lambda) \lambda_s^{\mu_s} + o(|\overline{\lambda}|) + \varphi_{2p}(\omega, \alpha, \lambda) = 0, \quad p = 1, 2, 3, 4, \\
\varphi_{23}(\omega, \alpha, \lambda) \equiv \varphi_{24}(\omega, \alpha, \lambda) \equiv 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Так как матрица $\Delta(0)$ неособенная, то $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать таким образом, что при любом $\lambda \in \Lambda(\delta)$ матрица $\Delta(\lambda)$ будет также неособенной.

Систему (10) запишем в виде

$$\begin{gathered}
\alpha_2 = -B_2^{-1}(\omega, \alpha, \lambda) B_1(\omega, \alpha, \lambda) \alpha_1, \\
\overline{\lambda} = -\Delta^{-1}(\lambda) [o(|\overline{\lambda}|) + \psi(\omega, \alpha, \lambda)], \\
\psi(\omega, \alpha, \lambda) = (\varphi_{21}(\omega, \alpha, \lambda), \varphi_{22}(\omega, \alpha, \lambda), 0, 0).
\end{gathered}$$

Оператор A определим равенством $A\nu = (A_1\alpha_2, A_2\overline{\lambda})$, в котором

$$A_1\alpha_2 = -B_2^{-1}(\omega,\alpha,\lambda)\cdot B_1(\omega,\alpha,\lambda)\alpha_1, \quad A_2\overline{\lambda} = -\Delta^{-1}(\lambda)[o(|\overline{\lambda}|)+\psi(\omega,\alpha,\lambda)], \quad \nu = (\alpha_2,\overline{\lambda}).$$

Числа $\delta \in]0,\delta_0]$ и $\delta_1 \in]0,\delta]$ можно выбрать таким образом, чтобы при любом $\delta_2 \in]0,\delta]$ и любом фиксированном $\alpha_1(|\alpha_1| \le \delta_1)$ оператор A на множестве $D(\delta_2) = \{\nu : |\alpha_2| \le \delta_2,\ |\overline{\lambda}| \le \delta_2\}$ был непрерывен и для любого вектора $\nu = (\alpha_2,\overline{\lambda})$, удовлетворяющего неравенствам $|\alpha_2| \le \delta_2$, $|\overline{\lambda}| \le \delta_2$, выполнялись неравенства $|A_1\alpha_2| \le \delta_2$, $|A_2\overline{\lambda}| \le \delta_2$. А это значит, что при любом фиксированном $\alpha_1 \ne 0$, $|\alpha_1| \le \delta_1$, оператор A на множестве $D(\delta_2)$ имеет неподвижную точку $(\alpha_2^*,\overline{\lambda}^*)$. Выберем произвольное, но фиксированное число $\alpha_1^* \ne 0$, удовлетворяющее неравенству $|\alpha_1^*| \le \delta_1$. Из приведенных рассуждений следует, что существует вектор λ^*, при котором оператор Γ, определенный равенством (5), имеет неподвижную точку $\alpha_0 = (\alpha_1^*,\alpha_2^*)$, $\alpha_0 \ne 0$, а $t \to \exp\int_0^\omega a_{ii}(\xi,\lambda^*)d\xi$, $t \to b_{ij}(\xi,\lambda^*)$ — ω-периодические функции, $i \ne j$; $i,j = 1,2$. Отсюда по теореме 1 λ_0 — бифуркационное значение параметра λ системы (3).

Аналогично доказывается теорема при выполнении условий серии IV. □

Отметим, что если выполнены условия теоремы 2, то λ_0 — бифуркационное значение параметра λ системы (1). Это следует из того, что в процессе доказательства теоремы 2 установлено существование вектора λ^*, при котором функции $t \to \exp\int_0^\omega a_{ii}(\xi,\lambda^*)d\xi$ ω-периодические, система (3) (следовательно, и система (1)) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Замечание. Теорема 2 остается справедливой и в том случае, когда при некотором или даже при любом $i \in \{1,2\}$ $a_{ii}(t,\lambda) \equiv 0$. При этом, если $a_{ii}(t,\lambda) \equiv 0$ при некотором i, то при $j \in \{1,2\}$, $j \ne i$, в представлении $\int_0^\omega a_{jj}(t,\lambda)dt$ (условие 1)), а также в сериях I–IV $s = \overline{1,3}$, $\lambda \in E_3$. Если же $a_{ii}(t,\lambda) \equiv 0$ при любом $i \in \{1,2\}$, то условие 1) снимается, а в сериях I–IV $s = 1$ и 2, $\lambda \in E_2$.

Пример. Рассмотрим систему (1), в которой

$$a_{11}(t,\lambda) = 2\lambda_1\sin^2 t + 3\lambda_2^{1/3}(1+\cos t) + 3\lambda_3^{3/5}\cos^2 t + \lambda_1^2,$$
$$a_{12}(t,\lambda) = \lambda_1(1+\cos t) + \lambda_2^{1/3}(1+\sin t) + \lambda_3^{3/5}\cos 2t + \lambda_2^{3/4},$$
$$a_{21}(t,\lambda) = \sin 2t, a_{22}(t,\lambda) \equiv 0,$$
$$f(t,x,\lambda)x = (7\lambda_1 x_1^{10/7}\cos^2 t + 3\lambda_1\lambda_2 x_2^{6/5}\sin 2t, \lambda_2^2 x_2^{4/3}\cos 2t + x_1x_2).$$

Так как $a_{22}(t,\lambda) \equiv 0$, то, полагая $\omega = 2\pi$ и учитывая равенства (2), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_{12}(t,\lambda)b_n(t,\lambda)dt = 2\pi\lambda_1 + 2\pi\lambda_2^{1/3} + o(|\overline{\lambda}|),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_{n+1}(t,\lambda)dt = -\pi\lambda_1 - \pi\lambda_2^{1/3} + \frac{\pi}{2}\lambda_3^{3/5} + o(|\overline{\lambda}|),$$
$$\int_0^{2\pi} a_{11}(t,\lambda)dt = 2\pi\lambda_1 + 6\pi\lambda_2^{1/3} + 3\pi\lambda_3^{3/5} + o(|\overline{\lambda}|),$$

где $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\overline{\lambda}_3)$, $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\overline{\lambda}_2 = \lambda_2^{1/3}$, $\overline{\lambda}_3 = \lambda_3^{3/5}$ ($\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1/3$, $\mu_3 = 3/5$),

$$\det\begin{pmatrix} 2\pi & 2\pi & 0 \\ -\pi & -\pi & \dfrac{\pi}{2} \\ 2\pi & 6\pi & 3\pi \end{pmatrix} = -4\pi^3.$$

Следовательно, выполнены условия теоремы 2 (см. замечание), поэтому λ_0 — бифуркационное значение параметра λ системы (1).

Литература

1. Каудерер Г. *Нелинейная механика.* – М.: Ин. лит., 1961. – 778 с.
2. Шмидт Г. *Параметрические колебания.* – М.: Мир, 1978. – 327 с.
3. Грудо Э.И. *Периодические решения периодических дифференциальных систем в общем критическим случае* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 763–767.
4. Хейл Дж. *Колебания в нелинейных системах.* – М.: Мир, 1966. – 231 с.
5. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1966. – 331 с.
6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Рязанский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 25.06.1997
окончательный вариант 06.12.2001