ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 514.7

М.А. МИКЕНБЕРГ

МНОГООБРАЗИЯ НАД АЛГЕБРОЙ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ СО ВСЮДУ ПЛОТНЫМ СЛОЕМ КАНОНИЧЕСКОГО СЛОЕНИЯ

1. Алгебра Ли голоморфных векторных полей и ее идеалы

Напомним некоторые определения теории многообразий над алгеброй ([1], [2]). Многообразие M называется многообразием над алгеброй дуальных чисел $R(\varepsilon)$, если его модельным пространством является некоторая декартова степень $(R(\varepsilon))^n$ алгебры $R(\varepsilon)$, а функции перехода $R(\varepsilon)$-голоморфны. (Напомним, что отображение $f:(U\subset(R(\varepsilon))^k)\to(R(\varepsilon))^m$, где U — открытое множество в $(R(\varepsilon))^k$, называется $R(\varepsilon)$-голоморфным, если его производная f' $R(\varepsilon)$-линейна.) В определении многообразия над алгеброй $R(\varepsilon)$ будем также предполагать, что овеществленное многообразие (рассматриваемое как многообразие над R) является гладким многообразием класса C^∞. Число n называется размерностью многообразия M над алгеброй $R(\varepsilon)$. Размерность многообразия M над полем R равна $2n$. В слоях касательного расслоения TM многообразия M действует аффинор ранга n, который будем обозначать символом ε, $\varepsilon^2=0$. Из определения многообразия над алгеброй следует, что на M имеется атлас над $R(\varepsilon)$, в картах которого аффинор ε имеет постоянную матрицу ([1], [2]).

Голоморфным векторным полем на M называется $R(\varepsilon)$-голоморфное сечение $s:M\to TM$. Это значит, что существует $R(\varepsilon)$-атлас $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ на M такой, что $TU_i\cong U_i\times(R(\varepsilon))^n$ для любого i, а композиция отображений $s\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i)\to(R(\varepsilon))^n$ $R(\varepsilon)$-голоморфна и принадлежит классу C^∞ над R. Обозначим множество голоморфных векторных полей на M символом L. Далее приведем следующие известные факты (см. предложение 1.1 и предложение 1.2 ниже).

Предложение 1.1. *L есть алгебра Ли над алгеброй дуальных чисел $R(\varepsilon)$.*

Предложение 1.1 имеет место в более общей ситуации: в случае многообразия над произвольной локальной алгеброй [2].

Алгебра Ли L имеет еще одно описание. Будем называть аффинор ε аффинором дуальной структуры по аналогии с комплексной структурой. Инфинитезимальным автоморфизмом дуальной структуры на M будем называть такое векторное поле X на M, что $\mathcal{L}_X(\varepsilon)=0$, где $\mathcal{L}_X$ — производная Ли относительно поля X. Из свойств производной Ли ([3], с. 37) получим равенство

$$[X,\varepsilon Y]=(\mathcal{L}_X(\varepsilon))Y+\varepsilon[X,Y],$$

где X и Y — произвольные векторные поля на M. Таким образом, векторное поле X на M является инфинитезимальным автоморфизмом дуальной структуры ε на M тогда и только тогда, когда имеет место равенство $[X,\varepsilon Y]=\varepsilon[X,Y]$ для любого векторного поля Y на M.

Предложение 1.2. *Множество инфинитезимальных автоморфизмов дуальной структуры на многообразии M совпадает с алгеброй Ли L.*

Это предложение также справедливо в случае многообразия над произвольной локальной алгеброй. По поводу доказательства см. [4], а также [2].

Легко видеть, что множество $I=\varepsilon L$ является нильпотентным идеалом алгебры Ли L. Рассмотрим на M расслоение $R(\varepsilon)$-значных 1-форм $T^*M\otimes_R R(\varepsilon)$, где символом T^*M обозначено кокасательное расслоение многообразия M. Форму ω на M будем называть голоморфной, если ω

$R(\varepsilon)$-линейна и если сечение $\omega : M \to T^*M \otimes_R R(\varepsilon)$ является $R(\varepsilon)$-голоморфным отображением. Обозначим символом $\mathcal{Z}$ $R(\varepsilon)$-модуль голоморфных замкнутых 1-форм на M. Заметим, что если ω — голоморфная 1-форма на M, а X — голоморфное векторное поле на M, то $\omega(X)$ — $R(\varepsilon)$-голоморфная функция на M.

Лемма 1.1. *Пусть M — многообразие над алгеброй дуальных чисел $R(\varepsilon)$. Предположим, что каноническое слоение на M имеет всюду плотный слой. Тогда $R(\varepsilon)$-голоморфными функциями на M являются константы и только они.*

Доказательство. Пусть F — $R(\varepsilon)$-голоморфная функция на M, $F = F_1 + \varepsilon F_2$, где F_1 и F_2 — вещественнозначные функции класса C^∞. Возьмем карту (U, ϕ) $R(\varepsilon)$-голоморфного атласа на M. Без ограничения общности считаем, что $\phi(U) = W_1 \times \varepsilon W_2$, где W_i, $i = 1, 2$, открыто в R^n, $(\phi(U) \subset (R(\varepsilon))^n = R^n \oplus \varepsilon R^n)$. Относительно рассматриваемой локальной системы координат функции F_1 и F_2 имеют вид:

$$F_1(u + \varepsilon v) = f(u), \quad F_2(u + \varepsilon v) = f'(u)v + g(u), \tag{1}$$

где $u \in W_1$, $v \in W_2$; f и g — отображения класса C^∞ из W_1 в R^n, символом $f'(u)v$ обозначено значение производной отображения f в точке u на векторе v. Подробности см. в ([1], с. 98). Слои канонического слоения в карте (U, ϕ) имеют вид $u \times \varepsilon W_2$ $(u \in W_1)$ [2]. Из формулы (1) видим, что F_1 постоянна на слоях канонического слоения. Так как слоение имеет всюду плотный слой, то функция F_1 постоянна на M. Таким образом, в формуле (1) $f' = 0$, значит, F_2 постоянна на слоях слоения. Следовательно, функция F_2 тоже постоянна на M. $\square$

Замечание. Примером такого многообразия является тор со структурой многообразия над $\mathbb{R}(\varepsilon)$, каноническое слоение которой есть иррациональная обмотка тора. Лемма 1.1 показывает, что $R(\varepsilon)$-голоморфные функции на таких многообразиях ведут себя аналогично голоморфным функциям на компактных комплексных многообразиях.

Введем множество $I_0 = \{X \in L \mid \omega(X) = 0$ для всех $\omega \in \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}$ — $R(\varepsilon)$-модуль голоморфных замкнутых 1-форм на $M\}$.

Предложение 1.3. *Пусть M — многообразие над алгеброй дуальных чисел, каноническое слоение которого имеет всюду плотный слой. Тогда I_0 является идеалом алгебры Ли L, содержащим идеал $[L, L]$.*

Доказательство. Возьмем голоморфную замкнутую 1-форму ω на M и голоморфные векторные поля X и Y на M. Имеем равенство [3], [5]

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

По условию $d\omega(X, Y) = 0$; $\omega(X)$ и $\omega(Y)$ являются константами в силу леммы 1.1. Таким образом, $\omega([X, Y]) = 0$. Значит, $[X, Y] \in I_0$ и $[L, L] \subset I_0$. Так как аффинор ε переводит I_0 в себя, то I_0 — идеал алгебры Ли L над алгеброй $R(\varepsilon)$. $\square$

2. Оценка размерности факторалгебры Ли L/I_0

Обозначим символом dim размерность векторного пространства над полем R. Если пространство бесконечномерно, то dim обозначает мощность базиса.

Теорема 2.1. *Пусть M — многообразие над алгеброй дуальных чисел, каноническое слоение которого имеет всюду плотный слой. Тогда*

$$\dim(L/I_0) \leq 2 \dim(\mathrm{Hom}_R(H^1(M, R), R)).$$

Доказательство. Введем множество $D = \{\omega \in \mathcal{Z} \mid \omega(X) = 0$ для всех $X \in L\}$. Рассмотрим $R(\varepsilon)$-билинейное отображение $\beta : L \times \mathcal{Z} \to R(\varepsilon)$, где $\beta(X, \omega) = \omega(X)$; здесь X — голоморфное векторное поле, а ω — голоморфная замкнутая 1-форма. $R(\varepsilon)$-билинейное отображение β индуцирует $R(\varepsilon)$-билинейное отображение $\widetilde{\beta} : (L/I_0) \times (\mathcal{Z}/D) \to R(\varepsilon)$. Отображение $\widetilde{\beta}$ задает невырожденное спаривание $R(\varepsilon)$-модулей L/I_0 и $\mathcal{Z}(D)$. Таким образом, имеем включение $(L/I_0) \subset \mathrm{Hom}_{R(\varepsilon)}(\mathcal{Z}/D, R(\varepsilon))$. Обозначим символом Z пространство $R(\varepsilon)$-значных замкнутых 1-форм на многообразии M (Z — множество R-дифференцируемых сечений расслоения $T^*M \otimes_R R(\varepsilon)$, которые задаются замкнутыми 1-формами). Обозначим символом B подпространство в Z, состоящее из точных форм.

Естественное вложение $i : \mathcal{Z} \to Z$ индуцирует отображение $\widetilde{i} : \mathcal{Z} \to Z/B = H^1(M, R(\varepsilon))$, где $H^1(M, R(\varepsilon))$ — первая группа когомологий де Рама многообразия M с коэффициентами в $R(\varepsilon)$. Отображение $\widetilde{i}$ инъективно. Действительно, всякая голоморфная точная 1-форма имеет вид $\omega = df$, где f — $R(\varepsilon)$-голоморфная функция, которая в силу леммы 1.1 является константой, значит, $\omega = 0$.

В силу теоремы об универсальных коэффициентах [6] имеем изоморфизм $H^1(M, R(\varepsilon)) \approx H^1(M, R) \otimes_R R(\varepsilon)$. Из всего сказанного выше получаем

$$\begin{aligned}\dim(L/I_0) \le \dim(\mathrm{Hom}_{R(\varepsilon)}(\mathcal{Z}/D, R(\varepsilon))) = \frac{1}{2}\dim(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{Z}/D, R(\varepsilon))) = \\ = \dim(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{Z}/D, R)) \le \dim(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{Z}, R)) \le \\ \le \dim(\mathrm{Hom}_R(Z/B, R)) = \dim(\mathrm{Hom}_R(H^1(M, R(\varepsilon)), R)) = \\ = \dim(\mathrm{Hom}_R(H^1(M, R) \underset{R}{\otimes} R(\varepsilon), R)) = 2\dim(\mathrm{Hom}_R(H^1(M, R), R)). \quad \square\end{aligned}$$

Следствие 2.1. Если к условиям предыдущей теоремы добавить условие конечномерности пространства когомологий $H^1(M, R)$, то пространство L/I_0 конечномерно и его размерность не превышает $2\dim(H^1(M, R))$. Конечномерно также пространство $I/(I \cap I_0)$.

Аналогичные результаты имеют место для компактных комплексных многообразий ([7], с. 122–123). Близкие вопросы рассмотрены в ([8], следствие 3).

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 264 с.
2. Шурыгин В.В. *Многообразия над локальными алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй* // УМН. – 1993. – Т. 48. – № 2. – С. 75–106.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.
4. Бояршинова А.В. *О пространстве существенных инфинитезимальных деформаций* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 8. – С. 3–12.
5. Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* – М.: Мир, 1971. – 392 с.
6. Спеньер Э. *Алгебраическая топология.* – М.: Мир, 1971. – 680 с.
7. Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1986. – 224 с.
8. Гайсин Т.И. *О комплексе базовых форм слоения* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 7. – С. 74–76.

Самарский педагогический университет

Поступили
первый вариант 17.05.2001
окончательный вариант 01.04.2002