ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 517.9

В.И. УШАКОВ

УРАВНЕНИЕ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С НЕСЮРЪЕКТИВНЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Нас будут интересовать вопросы разрешимости задачи Коши

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

при этом оператор L предполагается необратимым.

Задаче (1), (2) посвящено большое число работ, обзор которых можно найти в [1], причиной необратимости в них является нетривиальность ядра оператора L. В данной работе рассматривается противоположный случай, когда $\operatorname{Ker} L = \{0\}$ и причиной необратимости оператора L является его несюръективность. Ситуация такого рода имеет место в случае второй краевой задачи для уравнения Россби [2], которую рассмотрим в конце статьи (теорема 2).

На протяжении всей работы будем предполагать, что $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ сопряжены банаховым пространствам $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$, а L и M являются сопряженными ограниченным линейным операторам A и $B : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Следующая конструкция является по существу построением цепочек "относительно присоединенных векторов" ([1], [2]).

Положим при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathcal{Y}_0 = 0, \quad \mathcal{X}_k = A^{-1}(\mathcal{Y}_k), \quad \mathcal{Y}_{k+1} = B(\mathcal{X}_k); \quad \mathcal{X}_\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{X}_k, \quad \mathcal{Y}_\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{Y}_k, \tag{3}$$

где символом $A^{-1}(\mathcal{Y}_k)$ обозначен полный прообраз множества $\mathcal{Y}_k$. Для этих множеств верна

Лемма 1. 1) $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{X}_{k+1}$, $\mathcal{Y}_k \subset \mathcal{Y}_{k+1}$;
2) $\mathcal{X}_\infty = A^{-1}(\mathcal{Y}_\infty)$;
3) $B(\mathcal{X}_\infty) = \mathcal{Y}_\infty$.

Доказательство. Если $k = 0$, то включение $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}_1$ очевидно. Следовательно, $\mathcal{X}_0 = A^{-1}(\mathcal{Y}_0) \subset A^{-1}(\mathcal{Y}_1) = \mathcal{X}_1$. Таким образом, при $k = 0$ первое утверждение леммы справедливо. Пусть $\mathcal{Y}_{k-1} \subset \mathcal{Y}_k$ при некотором k. Тогда $\mathcal{X}_{k-1} = A^{-1}(\mathcal{Y}_{k-1}) \subset A^{-1}(\mathcal{Y}_k) = \mathcal{X}_k$. Поэтому $\mathcal{Y}_k = B(\mathcal{X}_{k-1}) \subset B(\mathcal{X}_k) = \mathcal{Y}_{k+1}$. Итак, утверждение первого пункта доказано.

Второе утвеждение леммы и включение $B(\mathcal{X}_\infty) \subset \mathcal{Y}_\infty$ есть общее теоретико-множественное свойство. Так как $\mathcal{Y}_k = B(\mathcal{X}_{k-1}) \subset B(\mathcal{X}_\infty)$, то $\mathcal{Y}_\infty \subset B(\mathcal{X}_\infty)$. $\square$

Везде далее обозначения $E \perp F$ и $E^\perp$ будут использоваться в смысле формы двойственности на пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ ($\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^*$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-96030-р_урал_а).

Лемма 2. *Для следующих утверждений:*

$$1)\ \ u \in \mathcal{Y}_\infty^\perp; \quad 2)\ \ A^*u \in \mathcal{X}_\infty^\perp; \quad 3)\ \ B^*u \in \mathcal{X}_\infty^\perp.$$

справедливы соотношения 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $u \in \mathcal{Y}_\infty^\perp$, тогда в силу леммы 1 для всех $x \in \mathcal{X}_\infty$ справедливо $\langle u, Ax\rangle = 0$. Следовательно, $\langle A^*u, x\rangle = 0$, т. е. $A^*u \in \mathcal{X}_\infty^\perp$.

2) $\Rightarrow$ 3). Для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ в силу леммы 1 найдется элемент $x_1 \in \mathcal{X}_\infty$ такой, что $Ax_1 = Bx$. Тогда $\langle B^*u, x\rangle = \langle u, Bx\rangle = \langle u, Ax_1\rangle = \langle A^*u, x_1\rangle = 0$, т. к. $A^*u \in \mathcal{X}_\infty^\perp$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A^*u \in \mathcal{X}_\infty^\perp$. Надо проверить, что $u \perp \mathcal{Y}_\infty$, т. е. что $u \perp \mathcal{Y}_k$ для всех k. Это верно при $k = 0$, поскольку $\mathcal{Y}_0 = 0$.

Пусть $u \perp \mathcal{Y}_k$ при нектором k. Если $y \in \mathcal{Y}_{k+1}$, то в силу (3) $y = Ax$, $x \in \mathcal{X}_{k+1} \subset \mathcal{X}_\infty$. Тогда $\langle u, y\rangle = \langle u, Ax\rangle = \langle A^*u, x\rangle = 0$, поскольку $A^*u \perp \mathcal{X}_\infty$. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{Im} A^*$ *замкнут. Тогда* $A^*(\mathcal{Y}_\infty^\perp) = \mathcal{X}_\infty^\perp$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Im} A^*$ замкнут, то $\operatorname{Im} A^* = \operatorname{Ker} A^\perp$. $\operatorname{Ker} A = \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_\infty$. Следовательно, $A^*(\mathcal{Y}_\infty^\perp) \supset \mathcal{X}_\infty^\perp$. Обратное включение получаем из леммы 2.

Следствие. Если $\operatorname{Ker} A^* = 0$ и $\operatorname{Im} A^*$ замкнут, то A^* биективно отображает $\mathcal{Y}_\infty^\perp$ на $\mathcal{X}_\infty^\perp$ и, следовательно, оператор $A^{*\,-1} : \mathcal{X}_\infty^\perp \to \mathcal{Y}_\infty^\perp$ ограничен.

Вернемся теперь к задаче (1), (2). Если покажем, что $u(t)$ при всех $t \in [0, T]$ лежит в $\mathcal{Y}_\infty^\perp$, то $Mu(t) \in \mathcal{X}_\infty^\perp$ в силу леммы 2 и, значит, в предположениях следствия уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\dot{u} + L^{-1}Mu = 0.$$

Таким образом, осталось показать, что $u(t) \in \mathcal{Y}_\infty^\perp$ при $t \in [0, T]$. Сделаем это при достаточно слабых предположениях на класс рассматриваемых решений. А именно, функцию $u(t) : (0, T)$ (случай $T = +\infty$ не исключается) назовем *слабым решением* уравнения (1), если для всех $v \in \mathcal{F}^*$ $\langle u(t), v\rangle \in C^1(0, T)$ и

$$\frac{d}{dt}\langle Lu, v\rangle + \langle Mu, v\rangle = 0.$$

Лемма 4. *Пусть* $u(t)$ *— слабое решение уравнения* (1) *на* $(0, T)$. *Тогда* $u(t) \in \mathcal{Y}_\infty^\perp$ *для всех* $t \in (0, T)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $u(t) \in \mathcal{Y}_k^\perp$ для всех $t \in (0, T)$ и для всех k. При $k = 0$ $u(t) \in \mathcal{Y}_0^\perp$, т. к. $\mathcal{Y}_0 = 0$.

Пусть $u(t) \in \mathcal{Y}_k^\perp$ (для всех $t \in (0, T)$) и $y \in \mathcal{Y}_{k+1}$. Тогда в силу (3) $y = Bx$, где $x \in \mathcal{X}_k$, следовательно, $Ax \in \mathcal{Y}_k$. Поэтому $\langle u(t), y\rangle = \langle u(t), Bx\rangle = \langle Mu(t), x\rangle = \frac{d}{dt}\langle Lu(t), x\rangle = \frac{d}{dt}\langle u(t), Ax\rangle$. Но при $x \in \mathcal{X}_k$ имеет место $Ax \in \mathcal{Y}_k$ и, значит, $\langle u(t), Ax\rangle = 0$. $\square$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{F}$ *— банаховы пространства, сопряженные* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *соответственно,* $L, M : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ *— линейные ограниченные операторы, сопряженные* $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\operatorname{Ker} L = 0$, $\operatorname{Im} L$ *замкнут. Тогда для существования решения* $u(t)$ *задачи* (1), (2) *класса* $C^1(0, T) \cap C[0, T)$ *необходимо и достаточно, чтобы (в обозначениях* (3)) $u_0 \in \mathcal{Y}_\infty^\perp$. *При этом решение задачи* (1), (2) *указанного класса единственно и при всех* $t \in [0, T)$ $u(t) \in \mathcal{Y}_\infty^\perp$.

Замечание. В терминологии [1] $\mathcal{Y}_\infty^\perp$ является фазовым пространством уравнения (1).

Рассмотрим теперь вторую краевую задачу для уравнения Россби в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$

$$-\Delta u_t + u_{x_1} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_T} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla u\big|_{t=0} = \nabla u_0, \tag{6}$$

где $\Gamma_T = (0,T)\times\Omega$, ν — нормаль к $\partial\Omega$.

Отметим, что при замене u на $u+c$ (и даже на $u+c(t)$) равенства (4)–(6) сохраняются, поэтому естественно в качестве $\mathcal{U}$ выбрать пространство $W_2^1(\Omega)/\operatorname{const} = \mathcal{U} = \mathcal{Y}^*$. Тогда $\mathcal{Y} = \{v \in (W_2^1(\Omega))^* : \langle v, 1\rangle = 0\}$. Пусть $\mathcal{F} = (W_2^1(\Omega))^*$, $\mathcal{X} = \mathcal{F}^* = W_2^1(\Omega)$.

Умножив (4) на пробную функцию v, и проинтегрировав по Ω, получим

$$\int_\Omega (\nabla u_t \nabla v + u_{x_1} v)dx = 0.$$

Таким образом, задача (4)–(6) редуцируется до задачи (1), (2), если операторы $L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ и $M : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ определить равенствами

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx, \quad \langle Mu, v\rangle = \int_\Omega u_{x_1} v\, dx \tag{7}$$

для любой функции $v \in \mathcal{X} = W_2^1(\Omega)$.

Лемма 5. *Пусть $\mathbb{P}_k$ — множество многочленов степени k переменной x_1. Тогда (в обозначениях (3)) $\mathcal{X}_k = \mathbb{P}_k/\operatorname{const}$.*

Доказательство. При $k = 0$ утверждение леммы справедливо, поскольку $\mathcal{X}_0 = 0$ и $\mathbb{P}_0/\operatorname{const} = 0$.

Пусть $\mathcal{X}_k = \mathbb{P}_k/\operatorname{const}$ при некотором k. В силу (3) условие $v \in \mathcal{X}_{k+1}$ эквивалентно условию $Av \in \mathcal{Y}_{k+1} = B(\mathcal{X}_k)$. В силу предположения индукции получим $Av = B(v_k)$, где $v_k(x_1)$ — многочлен степени k.

Учитывая, что A и B сопряжены L и M, из (7) получим тождество

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega u_{x_1} v_k\, dx, \tag{8}$$

справедливое для всех $u \in W_2^1(\Omega)/\operatorname{const}$. Равенству (8) может удовлетворять не более одной функции $v \in W_2^1(\Omega)/\operatorname{const}$ (т. к. тождество (8) означает, что $\Delta v = \varphi$, где $\varphi \in (W_2^1(\Omega))^*$, $\langle \varphi, u\rangle = \int\limits_\Omega u_{x_1} v_k\, dx$).

Легко видеть, что первообразная функции $v_k(x_1)$ равенству (8) удовлетворяет. Следовательно, v есть многочлен степени $k+1$. □

Теорема 2. *Для разрешимости задачи (4)–(6) необходимо и достаточно, чтобы для всех целых неотрицательных k выполнялось равенство*

$$\int_\Omega u_{0x_1} x_1^k\, dx = 0. \tag{9}$$

Если (9) выполнено, то решение $u(t,x)$ единственно в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\int_\Omega u(t,x)\, dx = 0.$$

При этом для всех $t \in [0,T)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega u_{x_1}(t,x) x_1^k\, dx = 0.$$

Доказательство. В силу леммы 5 равенство (9) означает, что $B^*u_0 = Mu_0 \in \mathcal{X}_\infty^\perp$. Для того чтобы применить теорему 1, необходимо проверить, что $u_0 \in \mathcal{Y}_\infty^\perp$. Таким образом, остается убедиться, что все три утверждения леммы 2 в данном случае эквиралетны.

Условие $B^*u \in \mathcal{X}_\infty^\perp$ означает, что для любого многочлена $P(x_1)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega u_{x_1} P(x_1)\, dx = 0. \tag{10}$$

А условие $A^*u \in \mathcal{X}_\infty^\perp$ эквивалентно

$$\int_\Omega \nabla u \nabla P(x_1)\, dx = 0. \tag{11}$$

Но $\int\limits_\Omega \nabla u \nabla P(x_1)\, dx = \int\limits_\Omega u_{x_1} P'(x_1)\, dx$ и, следовательно, (10) влечет (11). $\square$

Таким образом, фазовое пространство [1] задачи (4)–(6) имеет бесконечную коразмерность.

Литература

1. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
2. Rossby C.G. *Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and displacement of the semipermanent center of actions* // S. Mariue Res. – 1939. – V. 2. – № 1. – P. 38–55.

Челябинский государственный университет

Поступила 18.07.2005