ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 515.165

Р.А. ВОЛАК

О СЛОЯХ ЛАГРАНЖЕВЫХ СЛОЕНИЙ

Уже давно известно, что слои лагранжева слоения являются аффинными многообразиями. Недавние исследования показали, что существует весьма тесная связь между трансверсальной структурой слоения и геометрией и топологией слоев как многообразий, которые рассматриваются сами по себе. Мы продолжаем изучение этой связи, обращая особое внимание на тип роста слоев и свойства слоев как аффинных многообразий.

1. Введение

Пусть (M,ω) — симплектическое многообразие размерности $2n$. Слоение $\mathcal{F}$ размерности n является лагранжевым, если для любых векторов X, Y, касательных к $\mathcal{F}$, выполняется условие $\omega(X,Y)=0$. (Подробно о симплектических многообразиях и лагранжевых слоениях см. [1].) Слои лагранжевых слоений являются аффинными многообразиями [2], [1], [3], [4]. Тем не менее, вообще говоря, неизвестно являются ли они полными как аффинные (плоские) многообразия. Следует отметить, что не все симплектические многообразия допускают лагранжевы слоения [5].

Связность ∇ на M называется симплектической, если $\nabla\omega=0$. Это условие эквивалентно тому, что связность ∇ является продолжением некоторой связности в $\mathrm{Sp}(n)$-редукции $B(M,\mathrm{Sp}(n))$ расслоения линейных реперов $L(M)$, определяемой симплектической формой.

2. Двойственность между тангенциальной и трансверсальной геометриями

Как уже было сказано, слои лагранжевых слоений являются аффинными многообразиями. Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(L,x_0)$ слоя L слоения $\mathcal{F}$ допускает два естественных представления в линейной группе $GL(n)$. Первое представление $\varphi:\pi_1(L,x_0)\to GL(n)$ есть представление линейной голономии слоя, т. е.

$$\varphi([\gamma])=d_{x_0}h_\gamma,$$

где h_γ есть голономия слоя L, соответствующая петле γ. Второе представление $\psi:\pi_1(L,x_0)\to GL(n)$ — это линейная голономия аффинного многообразия L [6]. В [4] Т. Инаба доказал, что

$$\psi^t\circ\varphi=\mathrm{id}. \qquad (*)$$

Как следствие получаем следующее свойство. Пусть Γ есть псевдогруппа голономии лагранжева слоения $\mathcal{L}$. Можно всегда считать, что Γ состоит из локальных диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Γ_{lin} ассоциированный группоид, состоящий из дифференциалов элементов группоида Γ. Назовем Γ_{lin} группоидом линейной голономии слоения $\mathcal{L}$. Его слои являются подмножествами $GL(n,\mathbb{R})$. Скажем, что Γ_{lin} есть G-группоид, где G есть подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$, если его слои лежат в G.

Частично поддержан KBN грант 2PO3A 024 10.

Лемма 1. *Пусть G — подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$. Если группоид линейной голономии слоения $\mathcal{L}$ является G-группоидом, то представление линейной голономии каждого слоя слоения $\mathcal{L}$ (как аффинного многообразия) принимает значения в группе G^t.*

Соотношение $(*)$ и классическая теорема Эпштейна-Милле-Тишлера [7] позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — лагранжево слоение на компактном многообразии M. Множество точек, лежащих на слоях, у которых аффинная группа голономии состоит из параллельных переносов, есть плотное подмножество типа G_δ в M.*

Доказательство. Теорема Эпштейна-Милле-Тишлера гарантирует, что множество точек, лежащих на слоях без голономии, есть плотное подмножество типа G_δ в M. С помощью соотношения Инабы $(*)$ можно убедиться, что у слоя без голономии группа аффинной голономии состоит из параллельных переносов. □

Соотношение $(*)$ показывает, что имеет место очень тесная связь между голономией плоской связности на слоях и голономией слоев слоения. Если слой имеет большую группу голономии, то индуцированная плоская связность на этом слое также имеет большую группу голономии и наоборот. Простейшие примеры слоеных произведений показывают, что даже трансверсально аффинные слоения с плоскими слоями на аффинных компактных многообразиях не обладают этим свойством.

Если группа голономии слоя слоения нильпотентна (разрешима), то группа линейной голономии аффинной структуры этого слоя является нильпотентной (соответственно разрешимой).

Наконец, напомним, что соотношение $(*)$ дает нам некоторые условия, обеспечивающие полноту аффинной структуры на компактных слоях [8].

3. Билагранжевы структуры

В ([3], теорема 1) показано, что если задано дополнительное лагранжево подрасслоение Q, то существует единственная симплектическая связность ∇, называемая билагранжевой связностью или связностью Гесса, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\nabla T\mathcal{F} \subset T\mathcal{F}$ и $\nabla Q \subset Q$;
2) $T(X, Z) = 0$ для $X \in T\mathcal{F}, Z \in Q$, где T — тензор кручения связности ∇;
3) $T(X, Y) = -\pi_Q([X, Y]) = 0$, $X, Y \in T\mathcal{F}$;
4) $T(X, Y) = -\pi_{\mathcal{F}}([X, Y])$, $X, Y \in Q$,

где π_Q и $\pi_{\mathcal{F}}$ — канонические проекции на Q и $T\mathcal{F}$ соответственно в $TM = T\mathcal{F} \oplus Q$.

Первое условие означает, что связность Гесса на самом деле является связностью в $GL(n) \times GL(n)$-редукции $B(M; \mathcal{F}, Q)$ расслоения реперов $L(M)$, соответствующей разложению $TM = T\mathcal{F} \oplus Q$. Эта билагранжева связность ∇ индуцирует плоскую связность без кручения на $\mathcal{F}$ и плоскую связность на Q, поэтому только смешанные компоненты тензора кривизны могут быть ненулевыми. В [3] приведены явные формулы для этой связности.

Форма связности ω принимает значения в алгебре Ли $gl(n) \times gl(n)$, поэтому ω может быть представлена как пара (ω_1, ω_2), где ω_i являются 1-формами на $B(M; \mathcal{F}, Q)$ со значениями в $gl(n)$. Форма кривизны связности Гесса Ω также может быть представлена в виде (Ω_1, Ω_2). Фундаментальная форма θ расслоения $B(M; \mathcal{F}, Q)$ со значениями в R^{2n} представляется как пара (θ_1, θ_2), где формы θ_i принимают значения в R^n. Таким же образом структурные уравнения связности Гесса в расслоении $B(M; \mathcal{F}, Q)$ распадаются на две системы уравнений

$$\Omega_i = d\omega_i + [\omega_i, \omega_i],$$
$$\Theta_i = d\theta_i + \omega_i \wedge \theta_i,$$

где $i = 1, 2$ [9].

$GL(n) \times GL(n)$-расслоение $B(M;\mathcal{F},Q)$ является расслоенным произведением расслоения реперов $L(T\mathcal{F})$ векторного подрасслоения, касательного к слоению, и расслоения реперов $L(Q)$ векторного расслоения Q. Обозначим через $p_{\mathcal{F}}$ и p_Q соответствующие проекции.

Нормальное расслоение $N(M,\mathcal{F})$ расслоения $\mathcal{F}$ может быть отождествлено с подрасслоением Q. Хорошо известно, что нормальное расслоение допускает слоение $\mathcal{F}^Q$ той же размерности, что и $\mathcal{F}$ [10], [11]. Слои слоения $\mathcal{F}^Q$ являются накрытиями соответствующих слоев слоения $\mathcal{F}$. Связность ∇ индуцирует связность ∇^Q в расслоении Q с формой ω^Q. Тогда $p_Q^*\omega^Q = \omega_2$. Слоение $\mathcal{F}$ является трансверсально аффинным, если эта индуцированная связность трансверсально проектируема. Это будет в случае, когда форма кривизны Ω^Q индуцированной связности является базовой, что эквивалентно условию, что вторая смешанная $gl(n)$-компонента формы кривизны Ω обращается в нуль, т. е. $\Omega_2(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = 0$ для $X \in \mathcal{F}$ и $Y \in Q$. В этом случае голономия любого слоя определяется его линейной голономией, и слои $\mathcal{F}^Q$ являются накрытиями голономии соответствующих слоев слоения $\mathcal{F}$ в принятом в теории слоений смысле.

Связность Гесса индуцирует связность $\nabla^{\mathcal{F}}$ в расслоении $T\mathcal{F}$ с формой связности $\omega^{\mathcal{F}}$, которая, в свою очередь, индуцирует на каждом слое плоскую связность. Легко проверить, что $\omega_2 = p_{\mathcal{F}}^*\omega^{\mathcal{F}}$. Ее форма кривизны $\Omega^{\mathcal{F}}$ соответствует первой $gl(n)$-компоненте Ω_1 формы кривизны Ω, т. е. $p_{\mathcal{F}}^*\Omega^{\mathcal{F}} = \Omega_1$. Расслоение реперов $L(\mathcal{F})$ расслоения $T\mathcal{F}$ допускает слоение $\mathcal{F}_1$ той же размерности, что и $\mathcal{F}$: стандартные горизонтальные векторные поля $B(\xi)$, $\xi \in R^n$, касательны к расслоению реперов любого слоя слоения. Этот факт и структурные уравнения приводят к тому, что вертикальная компонента $[B(\xi_i),B(\xi_j)]^V$ векторного поля $[B(\xi_i),B(\xi_j)]$ обращается в нуль

$$[B(\xi_i),B(\xi_j)]^V = \Omega^{\mathcal{F}}(B(\xi_i),B(\xi_j))^* = 0,$$

также, как и горизонтальная компонента $[B(\xi_i),B(\xi_j)]^H$

$$\theta^{\mathcal{F}}([B(\xi_i),B(\xi_j)]^H) = \Theta^{\mathcal{F}}(B(\xi_i),B(\xi_j)) = 0.$$

Поэтому стандартные горизонтальные векторные поля коммутируют.

Слои слоения $\mathcal{F}_1$ являются накрытиями голономии слоев $\mathcal{F}$, рассматриваемых как аффинные многообразия [6]. Коммутирование стандартных горизонтальных векторных полей приводит к тому, что накрытия голономии являются аффинными многообразиями, группы голономии которых состоят только из параллельных переносов [6]. Если предположить или доказать, что аффинная структура полна, то эти накрытия будут обобщенными цилиндрами, т. е. $R^k \times T^{n-k}$.

Теперь предположим, что дополнительное подрасслоение Q инволютивно. Тогда ассоциированная билагранжева связность не имеет кручения, и слои обоих слоений являются аффинными многообразиями. Скажем, что эти слоения связаны в смысле Гейзенберга [12], [3], если их касательные расслоения локально натянуты на локально гамильтоновы векторные поля $\omega^* dq_i$ и $\omega^* dp_i$ соответственно, где функции q_i, p_i, $i = 1,\dots,n$, удовлетворяют каноническим соотношениям скобки Пуассона: $[q_i,q_j] = 0 = [p_i,p_j]$, $[q_i,p_j] = \delta^i_j$, $i,j = 1,\dots,n$.

Гесс [3] доказал следующее

Предложение 1. *Слоения $\mathcal{F}$ и Q связаны в смысле Гейзенберга тогда и только тогда, когда ассоциированная билагранжева связность является плоской.*

Более того, если рассмотрим пару лагранжевых слоений, связанных в смысле Гейзенберга, то по предложению 1 связность Гесса ∇ плоская, и поэтому многообразие M есть аффинное многообразие с парой взаимно трансверсальных лагранжевых слоений, и билагранжева связность (Гесса) на этом многообразии индуцирует на слоях обоих слоений плоские связности. Локальные карты из определения связанных в смысле Гейзенберга лагранжевых слоений являются аффинными картами нашего аффинного многообразия (M,∇) [3], [13], [14].

4. Трансверсально аффинные лагранжевы слоения

Соотношения Инабы ($*$) наводят на мысль, что трансверсальная структура лагранжева слоения очень близка к трансверсальной аффинной структуре. Подробно о свойствах трансверсально аффинных слоений, и в частности, о трансверсальной геодезической полноте см. [15]–[19], [11]. Такие слоения допускают связность Эресмана [20], [21], [11], [8], [22]; в [20] И. Вайсман рассматривал лагранжевы аффинные трансверсальные распределения, т. е. просто по-другому названные связности Эресмана (этот термин используется при рассмотрении билагранжевых структур).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}$ — трансверсально геодезически полное трансверсально аффинное слоение на компактном многообразии. Тогда*

1) *трансверсальное подрасслоение, для которого слоение является геодезически полным, является связностью Эресмана*;

2) *если ∇ — связность, расширяющая трансверсально проектируемую плоскую связность и сохраняющая разложение, определяемое слоением и трансверсальным подрасслоением, то в случае, когда смешанная компонента формы кривизны связности нулевая, связность Эресмана сохраняет связность, индуцированную на слоях слоения $\mathcal{F}$*;

3) *если билагранжева связность плоская, то определяемая ей связность Эресмана сохраняет аффинную связность на слоях.*

Если предположить, что аффинная группа голономии слоения нильпотентна (соответственно разрешима), то группы голономии слоев нильпотентны (соответственно разрешимы). Предположение полноты гарантирует, что фундаментальная группа любого слоя вкладывается в фундаментальную группу многообразия [18]. Поэтому предположение о том, что фундаментальная группа многообразия нильпотентна (соответственно разрешима) влечет, что фундаментальные группы слоев нильпотентны (соответственно разрешимы), и, таким образом, группа аффинной голономии и группа голономии каждого слоя этого слоения нильпотентны (соответственно разрешимы). Более того, соотношение ($*$) показывает, что никакая петля с голономией не гомотопна нулю.

Для этого класса лагранжевых слоений имеют место следующие результаты работ [23], [18].

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F}$ — лагранжево многообразие на компактном многообразии. Если $\mathcal{F}$ также является трансверсально геодезически полным трансверсально аффинным слоением, то слои $\mathcal{F}$ удовлетворяют свойству ограниченной гомотопии.*

В работе [18] приводятся некоторые оценки типа роста слоев трансверсально аффинных слоений, которые также выполняются и для нашего класса слоений.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{F}$ — лагранжево слоение на торе T^{2n}. Если $\mathcal{F}$ является трансверсально геодезически полным трансверсально аффинным слоением, то его слои имеют не более чем полиномиальный рост.*

Для этого класса лагранжевых слоений теорему 1 можно истолковать как утверждение об общем слое.

Предложение 3. *Если лагранжево слоение $\mathcal{F}$ является трансверсально геодезически полным трансверсально аффинным слоением, то слои $\mathcal{F}$ имеют одно и то же универсальное накрывающее пространство, и аффинная группа голономии общего слоя состоит из параллельных переносов.*

Доказательство. Это простое следствие свойств трансверсально аффинных слоений и того факта, что общий слой не имеет голономии. $\square$

В частном случае трансверсально аффинных слоений предложение 1 обладает интересными следствиями.

Следствие. Пусть $\mathcal{L}$ — трансверсально аффинное лагранжево слоение.

1) Если $\mathcal{L}$ допускает трансверсальную форму объема с постоянными коэффициентами, то каждый слой слоения допускает форму объема с постоянными коэффициентами.

2) Если $\mathcal{L}$ допускает трансверсальную риманову метрику с постоянными коэффициентами (т. е. группоид линейной голономии есть $O(n)$-группоид), то слои слоения суть плоские римановы многообразия.

Доказательство. 1) Если $\mathcal{L}$ — трансверсально аффинное лагранжево слоение, допускающее трансверсальную форму объема с постоянными коэффициентами, то его группа линейной аффинной голономии содержится в $SL(n,R)$, поэтому в силу $(*)$ группа линейной аффинной голономии любого слоя также есть подгруппа в $SL(n,R)$. Отсюда и вытекает, что каждый слой $\mathcal{L}$ допускает форму объема с постоянными коэффициентами.

Доказательство свойства 2) аналогично. $\square$

5. Формы объема вдоль слоев

В этом параграфе рассмотрим класс трансверсально аффинных лагранжевых слоений, группа линейной голономии которых содержится в $SL(n,R)$, т. е. группоид линейной голономии является $SL(n,R)$-группоидом. Это предположение эквивалентно существованию трансверсальной формы объема с локально постоянными коэффициентами или, говоря по-другому, эта трансверсальная форма объема параллельна относительно трансверсально проектируемой плоской связности. Некоторые следствия существования такой формы приведены в [15]. Следствие гарантирует, что на любом слое слоения $\mathcal{L}$ существует форма объема с постоянными коэффициентами (ср. с [6]). Но в общем случае мы не знаем, задают ли все эти формы, вместе взятые, гладкую n-форму вдоль слоев.

Предполагая полноту многообразия или полноту аффинной структуры, индуцированной на слоях, получаем, что второе слоение есть связность Эресмана для первого слоения. В любой карте из теоремы 1 (также см. [14]) эта связность Эресмана имеет особенно простой вид. В этом случае связность Эресмана сохраняет аффинную связность вдоль слоев [8], и в силу $(*)$ постоянная форма объема на слоях есть глобальная n-форма на слоях слоения. Имеет место

Теорема 4. *Пусть M — компактное многообразие с парой лагранжевых слоений $(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$, связанных в смысле Гейзенберга. Если слоение $\mathcal{L}_1$ имеет трансверсальную форму объема с постоянными коэффициентами, то существует n-форма, индуцирующая формы объема на слоях. Если слоение $\mathcal{L}_1$ трансверсально геодезически полное, то $\mathcal{L}_2$ определяет связность Эресмана для слоения $\mathcal{L}_1$, которая сохраняет форму объема с постоянными коэффициентами вдоль слоев.*

Любые две такие n-формы различаются на гладкую функцию. Поэтому их можно использовать для изучения типа роста слоев и изучения самого слоения.

В [21] доказано, что для любой геодезической γ, касательной к $\mathcal{L}_2$, накрытие голономии слоя L_0, проходящего через точку $\gamma(0)$, накрывает слой L_t, проходящий через точку $\gamma(t) \in \operatorname{dom}\gamma$. Итак, если L_0 не имеет голономии, то он накрывает любой слой L_t. Так как накрывающее отображение задается трансверсальными геодезическими (т. е. связностью Эресмана), это отображение сохраняет формы объема слоев. Более того, известно, что любой слой слоения $\mathcal{L}_2$ пересекает любой слой слоения $\mathcal{L}_1$. Выберем некоторый слой L_2 слоения $\mathcal{L}_2$ так, чтобы любой слой L слоения $\mathcal{L}_1$ пересекал L_2. Тогда найдется слой L_1 слоения $\mathcal{L}_1$ без голономии, который пересекает L_2. Слой L_1 накрывает любой слой L слоения $\mathcal{L}_1$, который пересекает геодезическую, начинающуюся в точке $L_1 \cap L_2$ и касательную к L_2. Поэтому, для того чтобы доказать, что L_1 накрывает любой слой L слоения $\mathcal{L}_1$, достаточно доказать, что этот слой L пересекает некоторую геодезическую, начинающуюся в точке L_1 и касательную к L_2. Это будет так, если L_2 является полным аффинным многообразием (т. е. его универсальное накрытие есть R^n). Обсуждение различных достаточных условий полноты аффинного многообразия см. в [6], [24], [25]. Также достаточно предположить, что слоение $\mathcal{L}_1$ трансверсально геодезически полно. Следующие две теоремы являются простыми следствиями проведенных рассуждений.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{L}$ — трансверсально геодезически полное трансверсально аффинное лагранжево слоение, допускающее трансверсальную форму объема с постоянными коэффициентами. Если $\mathcal{L}$ допускает дополнительное лагранжево слоение, связанное с ним в смысле Гейзенберга, то объем слоев ограничен объемом общего слоя.*

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{L}$ — компактное трансверсально геодезически полное трансверсально аффинное лагранжево слоение на компактном многообразии M с нильпотентной фундаментальной группой. Если существует дополнительное лагранжево слоение, связанное с $\mathcal{L}$ в смысле Гейзенберга, то слоение $\mathcal{L}$ глобально стабильно.*

Доказательство. Группа аффинной голономии слоения $\mathcal{L}$ нильпотентна. Так как слоение полно, то оно имеет трансверсальную форму объема с постоянными коэффициентами [15]. Поэтому связность Эресмана, определенная вторым лагранжевым слоением, сохраняет индуцированную форму объема на слоях, и по теореме 5 объем слоев относительно этой n-формы ограничен. Так как многообразие M компактно, объем слоев, вычисляемый с помощью любой глобально определенной n-формы (индуцирующей формы объема на слоях), ограничен. Тогда по теореме Эпштейна [26] слоение $\mathcal{L}$ глобально стабильно. $\square$

6. Римановы лагранжевы слоения

Как мы отметили, соотношение $(*)$ связывает трансверсальную структуру слоения со слоевой структурой. Тем не менее, слоевая структура не определяет трансверсальную структуру слоения, даже если слоение трансверсально аффинно. Неизвестно, следует ли из того, что слои являются плоскими аффинными многообразиями то, что группа аффинной голономии состоит из движений, или равносильно, что группа линейной голономии состоит из изометрий. Дело в том, что не всякий элемент этой группы происходит из элемента группы голономии слоя, т. е. из элемента группы аффинной голономии, имеющего неподвижную точку. Поэтому стоит рассмотреть весьма специальный класс лагранжевых слоений — римановы слоения. Их очень жесткая трансверсальная структура даст нам возможность сказать значительно больше о структуре слоев таких слоений. Наши рассуждения будут основаны на следующей теореме [1], [27].

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{F}$ — лагранжево слоение симплектического многообразия M. Тогда*

(i) *отображение $df \mapsto -X_f$ в ограничении на ростки слоеных функций определяет изоморфизм между $N^*(M,\mathcal{F})$ и $T\mathcal{F}$;*
(ii) *гамильтоновы векторные поля базовых функций касательны к слоям слоения и параллельны относительно индуцированной плоской связности на слоях;*
(iii) *если гамильтоново векторное поле касательно к слоям слоения и параллельно относительно индуцированной плоской связности на слоях, то оно определяется базовой функцией.*

Эта теорема показывает важность глобальных слоеных функций или вообще слоеных функций, определенных на насыщенных подмножествах. В [28] достаточно подробно изучены слоеные функции на римановых слоениях. Мы хотели бы применить некоторые результаты этой работы для определения числа глобальных параллельных гамильтоновых векторных полей на слое.

Компактное многообразие, наделенное римановым слоением, естественным образом стратифицировано [29], [30]. Замыкания слоев являются подмногообразиями и образуют сингулярное риманово слоение [30]. Каждый страт состоит из точек слоев, замыкания которых имеют одну и ту же размерность и, грубо говоря, имеют одну и ту же голономию. Главный страт, состоящий из точек слоев, замыкания которых имеют максимальную размерность и минимальную голономию, открыт и плотен в объемлющем многообразии. В [29] М. Пьерро показал, что глобальные слоеные векторные поля трансверсально транзитивны по отношению к замыканиях слоев в каждом страте (любое глобальное расслоенное векторное поле должно быть касательным к страту). В [28] мы обобщили этот результат на случай сингулярных римановых слоений и, более того, доказали, что римановы градиентные векторные поля трансверсально транзитивны по отношению в замыканиям слоев в каждом страте. Построено достаточное количество слоеных функций: именно, для каждого вектора, касательного к страту и ортогонального к замыканию слоя, проходящего через точку приложения вектора, построена глобальная слоеная функция, дифференциал которой не равен нулю на этом векторе. Этот результат мы бы хотели применить к симплектическому градиенту. Чтобы упростить формулировку, введем некоторые обозначения.

Пусть L — слой риманова лагранжева слоения на компактном многообразии M. Обозначим через $k(L)$ коразмерность замыкания L в страте, содержащем этот слой.

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{F}$ — риманово лагранжево слоение на компактном многообразии M. На любом слое L слоения $\mathcal{F}$ число линейно независимых параллельных векторных полей больше или равно $k(L)$.*

Литература

1. Weinstein A. *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds* // Advances in Math. – 1971. – V. 6. – № 3. – P. 329–346.
2. Libermann P. *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales régulieres* // Ann. mat. pura ed appl. – 1954. – V. 36. – P. 27–120.
3. Hess H. *Connections on symplectic manifolds and geometric quantization* // Springer LN in Math. – № 836. – P. 153–165.
4. Inaba T. *The tangentially affine structure of lagrangian foliations and the tangentially projective structure of legendrian foliations.* Preprint.
5. Gotay M.J. *A class of non-polarisable symplectic manifolds* // Monatsh. Math. – 1987. – Bd. 103. – № 1. – S. 27–30.
6. Fried D., Goldman W., Hirsch M.W. *Affine manifolds with nilpotent holonomy* // Comment. Math. Helv. – 1981. – V. 56. – № 4. – P. 487–523.
7. Epstein D.B.A., Millet K.C., Tischler D. *Leaves without holonomy* // J. London Math. Soc. – 1977. – V. 16. – P. 548–552.
8. Wolak R. *Ehresmann connections for Lagrangian foliations* // J. Geom. and Phys. – 1995. – V. 17. – P. 310–320.
9. Wolak R. *The structure tensor of a transverse G-structure on a foliated manifold* // Boll. U.M.I. – 1990. – V. 4. – № 1. – P. 1–15.
10. Wolak R. *Foliated and associated geometric structures on foliated manifolds* // Ann. Fac. Sc. Toulouse. – 1989. – V. 10. – № 3. – P. 337–360.
11. Wolak R. *Geometric Structures on Foliated Manifolds* // Publ. Dept. de Geometría y Topología, Santiago de Compostela, 1989.
12. Konstant B. *Quantization and unitary representations. Prequantization* // Lect. Notes Math. – 1970. – № 170.
13. Nguiffo Boyom M. *Variétés symplectiques affines* // Manuscr. math. – 1989. – V. 64. – № 1. – P. 1–33.
14. Nguiffo Boyom M. *Structures localement plates dans certaines variétés symplectiques* // Math. Scand. – 1995. – V. 76. – P. 61–84.
15. Wolak R. *Transversely affine foliations compared with affine manifolds* // Quart. J. Math. – 1990. – V. 41. – № 163. – P. 369–384.
16. Wolak R. *Closures of leaves in transversely affine foliations* // Canad. Math. Bull. – 1991. – V. 34. – № 4. – P. 553–558.

17. Wolak R. *Transverse completeness of foliated systems of differential equations* // Proc VI-th Inter. Coll. on Differential Geometry, Santiago de Compostela 1988, ed. L.A. Cordero, Santiago de Compostela. – 1989. – P. 253–262.
18. Wolak R. *Leaves in transversely affine foliations.* – Differential Geometry, Budapest, 1996.
19. Wolak R. *Growth of leaves in transversely affine foliations.* To be published.
20. Vaisman I. d_f*-cohomology of Lagrangian foliations* // Monatsh. Math. - 1988. – Bd. 106. – № 3. – S. 221–244.
21. Wolak R. *Foliations admitting transverse systems of differential equations* // Comp. Math. - 1988. – V. 67. – № 1. – P. 89–101.
22. Wolak R. *Graphs, Ehresmann connections and vanishing cycles* // Differential Geometry and appl.: Proc. 6-th Int. Conf., Brno, 1995. – Brno, 1996. – C. 345–352.
23. Schweitzer P. *Surfaces not quasi-isometric to leaves of foliations of compact* 3*-manifolds* // Analysis and Geometry in Foliated Manifolds, Proc. of Santiago de Compostela 1994, World Sc. Publ. Co. 1995.
24. Goldman W., Hirsch M.W. *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 286. – No 2. – P. 629–649.
25. Goldman W., Hirsch M.W. *Affine manifolds and orbits of algebraic groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 295. – № 1. – P. 175–198.
26. Epstein D.B.A. *Foliations with all leaves compact* // Ann. Inst. Fourier. – 1976. – V. 26. – № 1. – P. 265–282.
27. Vaisman I. *Basics of lagrangian foliations* // Publ. Math. – Barcelona, 1989. – V. 33. – P. 559–575.
28. Wolak R. *Pierrot's theorem for singular Riemannian foliations* // Publ. Matem. – 1994. – V. 38. – P. 433–439.
29. Pierrot M. *Orbites des champs feuilletés pour un feuilletage riemannien sur une variété compacte* // Comp. Rend. Acad. Sci. – Paris, 1985. – V. 301. – № 9. – P. 443–445.
30. Molino P. *Riemannian Foliations* // Progress in Math. – 1988. – V. 73.

Институт математики
(*Краков, Польша*)

Поступила
16.09.1997