ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 517.546

А.Г. ГУШКАЛОВА

К ГИПОТЕЗЕ О ДВУХ ФУНКЦИОНАЛАХ

Введение

Пусть S — класс однолистных и аналитических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$. На множестве всех аналитических в Δ функций введем метрику $\rho(f, g) = \max\limits_{|z|=1/2} |f(z) - g(z)|$. Будем рассматривать линейные непрерывные функционалы L и N, отличные от постоянных и не сводящиеся один к другому умножением на вещественную постоянную. Относительно задачи нахождения вида однолистной и аналитической функции, максимизирующей вещественные части этих функционалов, известна гипотеза Дюрена о двух функционалах. Гипотеза предполагает, что если некоторая функция $f \in S$ доставляет глобальный максимум $\operatorname{Re} L$ и $\operatorname{Re} N$, то f должна быть одной из функций Кебе: $k_\theta(z) = \frac{z}{(1-ze^{i\theta})^2}$.

Далее будем рассматривать функционалы, зависящие от конечного числа коэффициентов функции f:

$$L = \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{n} A_k c_k\right\}, \quad N = \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{m} B_k c_k\right\}, \tag{1}$$

где A_k, B_k — комплексные числа; $m, n \in \mathbb{N}$.

Пусть $S_{\rm loc}(L, N)$ — подмножество функций из S, реализующих локальный экстремум в S одновременно для функционалов L и N, определенных в (1).

Для функционалов вида (1) в работе [1] (см. также [2]) была получена

Теорема А. *Если для линейных функционалов вида* (1) *с* $A_n \neq 0 \neq B_m$, *удовлетворяющих одному из условий*:

$$1)\quad \left|\frac{B_{m-1}}{B_m}(n-3) - \frac{A_{n-1}}{A_n}(m-3)\right| > 4|n-m|, \quad n \neq m;$$

$$2)\quad \frac{A_2}{A_3} \neq \frac{B_2}{B_3}, \quad n = m = 3;$$

$$3)\quad \left|\frac{A_2}{A_3}\right| \geq 4, \quad n = m = 3,$$

однолистная аналитическая функция f_0 *принадлежит* $S_{\rm loc}(L, N)$, *то*

$$f_0 \in Q = \left\{\frac{z}{(1-\eta z)(1-\sigma z)}, \ \ |\eta| = |\sigma| = 1\right\}.$$

Известно ([3], p. 306–307), что всякая функция $f_0 \in S$, доставляющая глобальный максимум функционалу вида (1), отличному от постояного, отображает Δ на плоскость с одним аналитическим разрезом. Отсюда и из теоремы А вытекает очевидное

Следствие 1. Если функционалы вида (1) удовлетворяют условиям теоремы А, то для этих функционалов справедлива гипотеза Дюрена.

Кроме того, в работе [4] (см. также [2]) показано, что гипотеза Дюрена верна и для функционалов (1), удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{B_{m-1}}{B_m}(n-3)-\frac{A_{n-1}}{A_n}(m-3)\right|\le 2\sqrt{2}|n-m|.$$

В данной работе продолжено исследование в направлении гипотезы Дюрена. Полученные результаты (теорема B) существенно расширяют класс функционалов, для которых справедлива эта гипотеза.

Основной результат

Пусть в функционалах (1) $A_n\ne 0\ne B_m$. Обозначим $A'_j=\frac{A_j}{A_n}$, $B'_k=\frac{B_k}{B_m}$, $j=1,\dots,n$; $k=1,\dots,m$.

Теорема B. *Пусть $n\ne m$, выполнено неравенство*

$$\left|\frac{(28-4mn-44m+20n+8n^2)(A'^2_{n-1}+B'^2_{m-1})}{24(n-m)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{A'_{n-1}B'_{m-1}(-8mn-56+24n+24m)}{24(n-m)^2}+\frac{A'_{n-2}(m-5)-B'_{n-2}(n-5)}{3(n-m)}\right|\ge 3 \quad (2)$$

и $f_0\in S_{\mathrm{loc}}(L,N)$. Тогда $f_0\in Q$.

Доказательство. Обозначим $\{\varphi\}_n$ — n-й тейлоровский коэффициент аналитической в Δ функции φ в ее разложении по степеням z. Известно [5] (см. также [6], с. 40–45), если $w=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots=f_0\in S$ доставляет локальный экстремум функционалу $L=\operatorname{Re}\left\{\sum\limits_{k=2}^{n}A_kc_k\right\}$, то f_0 удовлетворяет в Δ уравнению

$$\left(\frac{zw'}{w}\right)^2 Q_n(w)+P_n(z)=0, \quad (3)$$

где

$$Q_n(w)=\sum_{k=2}^{n}A_kq_k(w),\quad q_k(w)=\left\{\frac{f_0(z)^2}{f_0(z)-w}\right\}_k,$$

$$P_n(z)=\sum_{k=2}^{n}\left[A_k\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)a_{k-j}z^{-j}+(k-1)A_ka_k+\overline{A}_k\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\overline{a}_{k-j}z^j\right].$$

Таким же образом, если $w=f_0\in S$ реализует локальный экстремум функционала $L=\operatorname{Re}\left\{\sum\limits_{k=2}^{m}B_kc_k\right\}$, то она удовлетворяет аналогичному уравнению

$$\left(\frac{zw'}{w}\right)^2 Q_m(w)+P_m(z)=0. \quad (4)$$

Покажем теперь, что $f_0(z)$ продолжима на расширенную комплексную плоскость как алгебраическая функция.

Разделив (3) на (4), получим

$$\frac{Q_n(w)}{Q_m(w)}=\frac{P_n(z)}{P_m(z)}\Longleftrightarrow w^{m-n}G(w)=z^{m-n}H(z), \quad (5)$$

где $H(z)$ и $G(w)$ — рациональные функции своих аргументов, $G(0)=H(0)=1$. Из (5) следует, что $w=f_0(z)$ является алгебраической функцией. Таким образом, $f_0(z)$ аналитически продолжима из Δ на расширенную комплексную плоскость за исключением конечного числа полюсов и точек ветвления. Данное аналитическое продолжение обозначим $w = F$, оно удовлетворяет уравнениям (3) и (4). В [6] показано, что каждая ветвь $F(z)$ в окрестности $z = 0$ имеет разложение

$$F(z) = B_1 z + \cdots .$$

Если извлечь корень степени $(m-n)$ из обеих частей (5), то получим

$$\varphi(w) = e^{i\theta}\psi(z), \tag{6}$$

где φ и ψ — аналитические в окрестности нуля функции, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 1$, $e^{i\theta(m-n)} = 1$. Из (6) следует, что любая ветвь $w = F(z)$ в окрестности нуля имеет разложение

$$F(z) = \varphi^{-1}(e^{i\theta}\psi(z)) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots , \quad b_1 = e^{i\theta}. \tag{7}$$

Уравнение (6) однозначно разрешимо относительно w, следовательно, различным элементам $F(z)$ соответствуют различные b_1, иначе уравнение (6) при одном и том же θ определяло бы два различных элемента $F(z)$. Для одной из ветвей аналитической функции $F(z)$ $b_1 = 1$. Если в разложении всех других аналитических элементов $F(z)$ в окрестности нуля $b_1 = 1$, то все ветви $F(z)$ совпадают в окрестности нуля. Тогда $F(z)$ будет однозначной во всей области своего определения. Действительно, пусть $w(z)$ — одна из ветвей $F(z)$ в окрестности нуля, продолжение элемента (U, w) вдоль путей γ_1 и γ_2 приводит к различным элементам $(U_1,\ w_1)$ $(U_1,\ w_2)$. Если все ветви совпадают в окрестности нуля, то в результате продолжения элемента $(U_1,\ w_2)$ вдоль пути γ_1^{-1} получим (U, w). Но тогда и (U_1, w_1) и (U_1, w_2) получаются в результате аналитического продолжения вдоль γ_1 элемента (U, w). А это невозможно, поскольку результат аналитического продолжения вдоль пути определяется однозначно. Значит, $F(z)$ однозначна, поэтому $F(z)$ — алгебраическая функция без точек ветвления, т. е. рациональная функция.

Докажем, что в разложении любой ветви $F(z)$ в окрестности нуля коэффициент b_1=1. Предположим, что $b_1 \neq 1$. Из (7) находим

$$\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 = 1 + 2\frac{b_2}{b_1}z + O(z^2).$$

Для натуральных j имеем

$$F(z)^{-j}(z) = \frac{1}{(b_1 z)^j}\left(1 + \frac{b_2}{b_1}z + \cdots\right)^{-j} = \frac{1}{(b_1 z)^j} - j\frac{b_2}{(b_1)^{j+1}z^{j-1}} + \frac{j((j+1)b_2^2 - 2b_1 b_3)}{2(b_1)^{j+2}z^{j-2}} + O(z^{3-j}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_n(F(z)) = &-A_n\left(\frac{1}{(b_1 z)^{n-1}} - \frac{(n-1)b_2}{b_1^n z^{n-2}} + \frac{(n-1)(nb_2^2 - 2b_3 b_1)}{2b_1^{n+1}z^{n-3}}\right) - \\ &- (A_n a_2(n-1) + A_{n-1})\left(\frac{1}{(b_1 z)^{n-2}} - \frac{(n-2)b_2}{b_1^{n-1}z^{n-3}} + \frac{(n-2)((n-1)b_2^2 - 2b_3 b_1)}{2b_1^n z^{n-4}}\right) - \\ &- \left(\frac{A_n(n-2)(2a_3 + (n-3)a_2^2)}{2} + A_{n-1}a_2(n-2) + A_{n-2}\right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{(b_1 z)^{n-3}} - \frac{(n-3)b_2}{b_1^{n-2}z^{n-4}} + \frac{(n-3)((n-2)b_2^2 - 2b_3 b_1)}{2b_1^{n-1}z^{n-5}}\right) + O(z^{6-n}), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 Q_n(F(z)) = &-\frac{A_n}{(b_1 z)^{n-1}} + \frac{A_n b_2(n-3)}{b_1^n z^{n-2}} - \frac{A_n a_2(n-1) + A_{n-1}}{(b_1 z)^{n-2}} + \\ &+ \frac{A_n(b_2^2(5n - n^2 - 2) + 2b_3 b_1(n-5))}{2b_1^{n+1}z^{n-3}} + \frac{b_2(A_n a_2(n-1) + A_{n-1})(n-4)}{b_1^{n-1}z^{n-3}} - \end{aligned}$$

$$-\frac{A_n(n-2)(2a_3+(n-3)a_2^2)+A_{n-1}a_2(n-2)+A_{n-2}}{2(b_1z)^{n-3}}+O(z^{4-n}),$$

$$P_n(z)=\frac{A_n}{z^{n-1}}+\frac{A_n2a_2}{z^{n-2}}+\frac{A_{n-1}}{z^{n-2}}+\frac{A_n3a_3}{z^{n-3}}+\frac{A_{n-1}2a_2}{z^{n-3}}+\frac{A_{n-2}}{z^{n-3}}+O(z^{4-n}).$$

Сравнив в (3) коэффициенты при z^{n-1} и z^{n-2}, соответственно получим

$$A_n-A_nb_1^{1-n}=0 \Longleftrightarrow b_1^{1-n}=1$$

и

$$2A_na_2+A_{n-1}+\frac{A_nb_2(n-3)}{b_1^n}-\frac{A_na_2(n-1)+A_{n-1}}{b_1^{n-2}}=0. \tag{8}$$

Пользуясь тем, что $b_1^{1-n}=1$, сравниваем коэффициенты при z^{n-3} и получаем

$$\begin{aligned}&A_n(b_2^2(5n-n^2-2)+2b_3b_1(n-5))+2b_1^2b_2(A_na_2(n-1)+A_{n-1})(n-4)-\\&-b_1^4(A_n(n-2)(2a_3+(n-3)a_2^2)+2A_{n-1}a_2(n-2)+2A_{n-2})+6b_1^2a_3A_n+4b_1^2a_2A_{n-1}+2b_1^2A_{n-2}=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в уравнении (4), получаем

$$z^{m-2}: 2B_ma_2+B_{m-1}+\frac{B_mb_2(m-3)}{b_1^m}-\frac{B_ma_2(m-1)+A_{m-1}}{b_1^{m-2}}=0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}z^{m-3}: &B_m(b_2^2(5m-m^2-2)+2b_3b_1(m-5))+2b_1^2b_2(B_ma_2(m-1)+B_{m-1})(m-4)-\\&-b_1^4(B_m(m-2)(2a_3+(m-3)a_2^2)+2B_{m-1}a_2(m-2)+2B_{m-2})+\\&+6b_1^2a_3B_m+4b_1^2a_2B_{m-1}+2b_1^2B_{m-2}=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Делим равенства (9) на $A_n\neq 0$, (11) — на $B_m\neq 0$. Воспользовавшись уравнениями (8) и (10), получим выражение

$$b_2=\frac{(A'_{n-1}((m-1)b_1-2)-B'_{m-1}((n-1)b_1-2))b_1}{2(n-m)}. \tag{12}$$

В ходе доказательства теоремы А в [1] было получено, что у экстремальной функции второй коэффициент имеет вид

$$a_2=\frac{(m-3)A'_{n-1}-(n-3)B'_{m-1}}{2(n-m)}. \tag{13}$$

Воспользовавшись уравнениями (9) и (11), а также выражениями для b_2 и a_2 (см. (12) и (13)), найдем

$$\begin{aligned}|a_3|=\Bigg|&\frac{(28-4mn-44m+20n+8n^2)(A'^2_{n-1}+B'^2_{m-1})}{24(n-m)^2}+\\&+\frac{A'_{n-1}B'_{m-1}(-8mn-56+24n+24m)}{24(n-m)^2}+\frac{A'_{n-2}(m-5)-B'_{n-2}(n-5)}{3(n-m)}\Bigg|.\end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, из условия теоремы следует, что $|a_3|>3$, а это противоречит известной оценке $|a_3|\leq 3$ ([7]). Следовательно, $F(z)=f_0(z)$ — рациональная функция. Известно [5], что рациональная функция $f_0\in S$, удовлетворяющая уравнению (3), принадлежит Q.

Если же $|a_3|=3$, то [7] $f_0(z)=k_\theta(z)$ — функция Кебе. $\square$

Следствие 2. Пусть $11 < m < n$ и условия теоремы A не выполнены. Обозначим $K = \left|n(m-5)\frac{A'_{n-1}}{n-m}\right| + \left|m(n-5)\frac{B'_{m-1}}{n-m}\right|$. Если имеет место неравенство

$$\left|\frac{(m-5)A'_{n-2} - (n-5)B'_{m-2}}{3(n-m)}\right| > \frac{25+2K}{3}, \tag{15}$$

то экстремальная функция из $S_{\text{loc}}(L, N)$ принадлежит Q.

Доказательство. Будем использовать обозначения, введенные в доказательстве теоремы A. Достаточно показать, что при сделанных в следствии 2 предположениях выполненно условие (2) теоремы. Перепишем неравенство (15) в виде

$$\left|\frac{(m-5)A'_{n-2} - (n-5)B'_{m-2}}{3(n-m)}\right| > 3 + \frac{8}{3} + \frac{2}{3}[4+K]. \tag{16}$$

Для доказательства будем пользоваться выражением для a_3 (см. (14)), полученным в ходе доказательства теоремы.

Из неравенств

$$\left|\frac{(m-11)A'_{n-1} - (n-11)B'_{m-1}}{n-m}\right| < \left|(m-3)\frac{A'_{n-1}}{n-m}\right| + \left|(n-3)\frac{B'_{m-1}}{n-m}\right|$$

и

$$\left|\frac{A'_{n-1} - B'_{m-1}}{n-m}\right| < \left|(m-3)\frac{A'_{n-1}}{n-m}\right| + \left|(n-3)\frac{B'_{m-1}}{n-m}\right|,$$

учитывая вид K, получаем

$$\left|\frac{((-nm+5n+m-11)A'_{n-1} - (-nm+5m+n-11)B'_{m-1})(A'_{n-1} - B'_{m-1})}{6(n-m)^2}\right| < \frac{1}{6}4[4+K].$$

Отсюда и из (13), (16) вытекает

$$\begin{aligned}\left|\frac{(m-5)A'_{n-2} - (n-5)B'_{m-2}}{3(n-m)}\right| > 3 + \left|\frac{2a_2^2}{3}\right| + \\ + \left|\frac{((-nm+5n+m-11)A'_{n-1} - (-nm+5m+n-11)B'_{m-1})(A'_{n-1} - B'_{m-1})}{6(n-m)^2}\right|.\end{aligned} \tag{17}$$

Опираясь на (13) и (14), имеем

$$\begin{aligned}|a_3| = \Bigg|\frac{2a_2^2}{3} + \frac{((-nm+5n+m-11)A'_{n-1} - (-nm+5m+n-11)B'_{m-1})(A'_{n-1} - B'_{m-1})}{6(n-m)^2} + \\ + \frac{(m-5)A'_{n-2} - (n-5)B'_{m-2}}{3(n-m)}\Bigg|.\end{aligned} \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует выполнение условия (2) теоремы B.

Следствие 3. Если функционалы вида (1) удовлетворяют условиям теоремы B, то для этих функционалов справедлива гипотеза Дюрена.

Замечание. Из формулировки следствия 2 видно, что существует класс функционалов, не удовлетворяющих условиям теоремы A, но описываемых условиями теоремы B, для которых справедлива гипотеза Дюрена.

Литература

1. Starkov V.V. *Univalent functions that are local extrema of two real functionals* // Stud. Math. Bulgaria PLISKA. – 1989. – V. 10. – P. 16–26.
2. Прохоров Д.В. *Коэффициенты голоморфных функций* // J. Math. Sci., N. Y., 2001. – V. 106. – P. 3518–3544.
3. Duren P.L. *Univalent functions.* – N. Y.: Springer-Verlag, 1983. – 382 p.
4. Goh S.S. *On the two-functional conjecture for univalent functions* // Compl. Var. – 1992. – V. 20. – P. 197–206.
5. Schaeffer A.C., Spencer D.C. *Coefficients region for schlicht functions.* – N. Y., 1950. – 311 p.
6. Бабенко К.И. *К теории экстремальных задач для однолистных функций класса S* // Тр. МИАН СССР. – 1972. – Т. 101. – 320 с.
7. Löwner K. *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises* // Math. Ann. – 1923. – Bd. 89. – S. 103–121.

Петрозаводский государственный университет

Поступила 05.08.2005