ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 515.124

П.Д. АНДРЕЕВ

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУРЕШЕТКИ НА $\mathbb{R}$-ДЕРЕВЬЯХ

1. Введение

Понятие $\mathbb{R}$-дерева является обобщением понятия симплициального дерева и включается в более общее семейство так называемых Λ-деревьев. Геодезическое метрическое пространство X называется $\mathbb{R}$-деревом, если в любом его треугольнике каждая из сторон содержится в объединении двух других сторон. В данной статье вводится понятие метрической полурешетки на метрическом пространстве и доказывается следующий критерий.

Теорема 1. *Пусть X — геодезическое пространство. Если X является $\mathbb{R}$-деревом, то для любой точки $o \in X$ на X существует единственный частичный порядок, по отношению к которому это пространство является верхне полулинейной метрической $\vee$-полурешеткой с корнем o. По отношению к такому порядку каждое непустое подмножество $A \subset X$ имеет точную верхнюю грань. Обратно, если X допускает частичный порядок, превращающий X в полулинейную метрическую полурешетку с общим направлением полулинейности и полурешетки, то X — $\mathbb{R}$-дерево.*

Изучается множество $\mathcal{O}_+(X)$ частичных порядков на полном локально компактном $\mathbb{R}$-дереве X, задающих на X верхне полулинейные метрические $\vee$-полурешетки. На $\mathcal{O}_+(X)$ вводится топология. На подпространстве $\mathcal{O}_+^r(X) \subset \mathcal{O}_+(X)$, состоящем из корневых порядков, эта топология порождается метрикой Хаусдорфа на семействе $\mathcal{C}(X \times X)$ замкнутых подмножеств метрического квадрата $X \times X$. Продолжение топологии на все $\mathcal{O}_+(X)$ строится при помощи базы окрестностей некорневых порядков. Доказывается

Теорема 2. *Метрическое пространство $\mathcal{O}_+^r(X)$ изометрично X, а топологическое пространство $\mathcal{O}_+(X)$ гомеоморфно метрической компактификации $\overline{X}_m$ пространства X.*

В качестве применения теоремы 1 в параграфе 5 строится пример, показывающий существенность условия локальной компактности в следующей гипотезе, которая была сформулирована в [1].

Гипотеза. *Всякое локально компактное подобно однородное неоднородное метрическое пространство с внутренней метрикой (X, ρ) гомеоморфно топологическому произведению $F \times \mathbb{R}_+$, где F — произвольное множество уровня функции радиуса полноты на X. Топологическая группа $\mathrm{Sim}(X)$ подобий X гомеоморфна прямому топологическому произведению $\mathrm{Isom}(X) \times \mathbb{R}_+$, где $\mathrm{Isom}(X) \subset \mathrm{Sim}(X)$ — подгруппа изометрий X.*

Через $\mathbb{R}_+$ обозначается множество положительных действительных чисел. Построенное метрическое пространство X является $\mathbb{R}$-деревом и удовлетворяет всем условиям гипотезы за исключением условия локальной компактности. Оно не гомеоморфно топологическому произведению $F \times \mathbb{R}_+$, но будет метрическим расслоением в смысле определения статьи [2]. Каждая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00315-а, и ведомственной программы "Развитие научного потенциала высшей школы", код проекта № 335.

точка построенного пространства является его точкой ветвления. Группа подобий $\mathrm{Sim}(X)$ расщепляется с помощью точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Isom}(X) \to \mathrm{Sim}(X) \to \mathbb{R}_+ \to 0, \tag{1}$$

но не гомеоморфна топологической группе $\mathrm{Isom}(X) \times \mathbb{R}_+$.

2. Предварительные сведения

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Кратчайшей* в X называется образ при отображении $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \to X$ (*натуральной параметризации* кратчайшей) числового промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle$, при котором $\rho(\gamma(s)\gamma(t)) = |s - t|$ для всех $s, t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Если $\langle \alpha, \beta \rangle$ в этом определении является числовым сегментом, то говорят, что γ есть *отрезок*, соединяющий $x = \gamma(\alpha)$ и $y = \gamma(\beta)$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta = +\infty$, то γ — *луч*, а если $\langle \alpha, \beta \rangle = \mathbb{R}$, то γ — *прямая*. Натуральная параметризация всякой кратчайшей определена с точностью до добавления константы ко всем значениям параметра и выбора ориентации.

Метрическое пространство X называется *геодезическим*, если любые две его точки $x, y \in X$ можно соединить отрезком. В общем случае такой отрезок не единственный. Пространство X называется *локально полным*, если для каждой точки $x \in X$ существует такое число $c(X) > 0$, что все замкнутые шары с центром x и с радиусами, меньшими $c(x)$, полны. Максимальное значение величины $c(x)$, обладающее таким свойством, называется *радиусом полноты* в точке x. Радиус полноты непрерывно зависит от точки $x \in X$.

Отображение $f : X \to Y$ метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) называется *отображением подобия* с коэффициентом $k > 0$, если для всех $x, y \in X$ выполняется $\rho_Y(f(x), f(y)) = k\rho_X(x, y)$. При $k = 1$ отображение подобия называется *изометрическим отображением*. Отображение подобия пространства X на себя называется *подобием*, а изометрическое отображение X на себя — *изометрией* X.

Геодезическое пространство X называется $\mathbb{R}$-*деревом*, если любые две его точки можно соединить единственным отрезком и для любых его трех точек $x, y, z \in X$ отрезок $[xy]$ содержится в $[xz] \cup [yz]$. Аналогичное включение справедливо и для отрезков $[xz]$ и $[yz]$. Основные факты теории $\mathbb{R}$-деревьев можно найти в [3].

Для произвольного полного локально компактного метрического пространства (X, ρ) определена его метрическая компактификация $\overline{X}_m$ [4]. Она может быть описана следующим образом. Рассмотрим вложение Куратовского пространства X в пространство $C(X, \mathbb{R})$ непрерывных функций на X с компактно-открытой топологией. Каждой точке $x \in X$ сопоставляется ее дистанционная функция

$$d_x(y) = \rho(x, y) - \rho(o, x),$$

где $o \in X$ — отмеченная точка. При замене отмеченной точки o все дистанционные функции меняются на константу, поэтому указанное вложение продолжается до вложения X в фактор-пространство $C^*(X, \mathbb{R}) = C(X, \mathbb{R})/\{\mathrm{consts}\}$ векторного пространства $C(X, \mathbb{R})$ по его одномерному подпространству констант. X отождествляется с его образом в $C^*(X, \mathbb{R})$. *Метрической компактификацией* пространства X называется его замыкание в $C^*(X, \mathbb{R})$, а граница $\partial_m X = \overline{X}_m \setminus X$ — *метрической границей*. Предельные функции, принадлежащие $\partial_m X$, называются *орифункциями*.

Эквивалентное приведенному выше определение метрической компактификации как пространства состояний унитальной коммутативной C^*-алгебры, порожденной константами, функциями, равными нулю на бесконечности, и разностями дистанционных функций, дано в [5].

Пространство X называется *однородным* (соответственно *подобно однородным*), если группа изометрий (соответственно подобий) действует на X транзитивно. В [1] изучается метрическое строение локально полных подобно однородных неоднородных метрических пространств с внутренней метрикой. Установлено, что всякое такое пространство конформно эквивалентно полному однородному пространству с внутренней метрикой. Функция радиуса полноты в этом случае является *субметрией* пространства X на $\mathbb{R}_+$, т. е. отображает произвольный шар в X на шар того же радиуса в $\mathbb{R}_+$.

Два подмножества F_1, F_2 метрического пространства X называются *эквидистантными*, если для каждой точки $x_i \in F_i$, $i = \overline{1,2}$, существует точка $x_j \in F_j$, $j \neq i$, для которой расстояние $\rho(x_i, x_j)$ равно расстоянию между множествами F_1 и F_2. *Метрическое расслоение* $\mathcal{F}$ пространства X есть его разбиение на попарно изометричные относительно метрики, индуцированной ρ, эквидистантные замкнутые множества. Фактор-множество $M/\mathcal{F}$ наследует естественную метрику $\rho(F_1, F_2)$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, для которой отображение факторизации $p : M \to M/\mathcal{F}$ является субметрией.

Для произвольного метрического пространства (X, ρ) на семействе $\mathcal{C}(X)$ замкнутых подмножеств в X определена так называемая *метрика Хаусдорфа* Hd, которая может принимать в том числе значение $+\infty$. Под расстоянием Хаусдорфа между замкнутыми множествами $V, W \subset X$ понимается величина

$$\mathrm{Hd}(V, W) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid V \subset \mathcal{N}_\varepsilon(W),\ W \subset \mathcal{N}_\varepsilon(V)\},$$

где $\mathcal{N}_\varepsilon(P)$ — ε-окрестность множества $P \subset X$, т. е.

$$\mathcal{N}_\varepsilon(P) = \{y \in X \mid \exists x \in P,\ \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

3. Критерий $\mathbb{R}$-дерева

Дадим определение метрической полурешетки и приведем доказательство теоремы 1. Основные факты теории решеток и частично упорядоченных множеств можно найти в [6].

Определение 1. Пусть на метрическом пространстве (X, ρ) задано отношение частичного порядка $\preceq$ и соответствующее ему отношение строгого порядка $\prec$. Предположим, что упорядоченное множество $(X, \preceq)$ является $\vee$-полурешеткой ($\wedge$-полурешеткой), т. е. для любых двух точек $x, y \in X$ существует их точная верхняя (соответственно нижняя) грань $x \vee y$ (соответственно $x \wedge y$). Тройка $(X, \rho, \preceq)$ называется *метрической* $\vee$*-полурешеткой* (соответственно *метрической* $\wedge$*-полурешеткой*), если

(1) для любых $x, y, z \in X$ из отношений $x \preceq z \preceq y$ следует равенство $\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y)$,

(2) для любых точек $x, y \in X$ выполнено равенство

$$\rho(x, y) = \rho(x, x \vee y) + \rho(x \vee y, y)$$

(соответственно

$$\rho(x, y) = \rho(x, x \wedge y) + \rho(x \wedge y, y)).$$

Поскольку, благодаря принципу двойственности, все утверждения о $\vee$-полурешетках переносятся на $\wedge$-полурешетки автоматически, в дальнейшем будем рассматривать только $\vee$-полурешетки.

Напомним, что частичный порядок $\preceq$ на множестве X называется *полулинейным сверху* (*снизу*), если для каждой точки $x \in X$ ее верхний (соответственно нижний) конус

$$U_x = \{y \in X \mid x \preceq y\}$$

(соответственно

$$L_x = \{z \in X \mid z \preceq x\})$$

линейно упорядочен.

Доказательство теоремы 1. *Существование порядка.* Пусть X — $\mathbb{R}$-дерево. Выберем произвольную точку $o \in X$ и определим отношение $\preceq_{(o)}$ условием: для точек $x, y \in X$ будем считать, что $y \preceq_{(o)} x$ в том и только том случае, если $x \in [oy]$. Отношение $\preceq_{(o)}$ транзитивно, т. к. если $x \in [oy]$ и $y \in [oz]$, то по определению $\mathbb{R}$-дерева $[oy] \subset [oz]$ и $x \in [oz]$. Антисимметричность отношения $\preceq_{(o)}$ очевидна. Следовательно, отношение $\preceq_{(o)}$ есть отношение частичного порядка.

Порядок $\preceq_{(o)}$ является верхним полулинейным: если $x \preceq_{(o)} y$ и $x \preceq_{(o)} z$, то $y, z \in [ox]$ и, следовательно, либо $y \in [oz]$, либо $z \in [ox]$. Поэтому все множества U_x упорядочены линейно.

Рассмотрим произвольное непустое подмножество $B \subset X$ и множество

$$Z(B) = \bigcap_{b \in B} [ob].$$

Множество $Z(B)$ непусто, т. к. $o \in Z(B)$. Более того, $Z(B)$ либо является одноточечным, либо гомеоморфно отрезку. Действительно, $Z(B)$ содержится в каждом из отрезков $[ob]$ и линейно связно, поэтому либо состоит из одной точки o, либо гомеоморфно числовому промежутку. В последнем случае рассмотрим произвольную точку $b \in B$ и точку x отрезка $[ob]$, являющуюся наиболее удаленной от o предельной точкой промежутка $Z(B)$. Если $b' \in B$ — точка, отличная от b, то $[ox] \subset [ob] \cap [ob']$. Поэтому $x \in Z(B)$ и $Z(B) = [ox]$. Точной верхней гранью $\bigvee_{(o)} B$ множества B будет точка o, если $Z(B) = \{o\}$, или x, если $Z(B) = [ox]$. Точную верхнюю грань точек $a, b \in X$ будем обозначать $a \vee_{(o)} b$.

Порядок $\preceq_{(o)}$ метрический. Действительно, утверждение (1) в определении 1 выполняется автоматически. Кроме того, для $a, b \in X$

$$Z(\{a,b\}) = \begin{cases} \{o\}, & \text{если } a \vee_{(o)} b = o; \\ [ox], & \text{если } a \vee_{(o)} b = x \neq o. \end{cases}$$

Из определения $\mathbb{R}$-дерева следует, что в первом случае

$$\rho(a,b) = \rho(a,o) + \rho(o,b),$$

а во втором —

$$\rho(a,b) = \rho(a,x) + \rho(x,b).$$

Единственность. Пусть $\preceq$ — верхний корневой с корнем o порядок на X, удовлетворяющий условиям теоремы. Предположим, что $x \preceq y$. Тогда из (1) в определении 1 следует $y \in [ox]$, и значит, $x \preceq_{(o)} y$. Обратно, пусть $x \preceq_{(o)} y$. Обозначим через $x \vee y = w$ точную верхнюю грань точек x и y в смысле порядка $\preceq$. Для нее выполнены равенства

$$\begin{aligned} \rho(x,w) + \rho(w,o) &= \rho(x,o), \\ \rho(y,w) + \rho(w,o) &= \rho(y,o), \\ \rho(x,w) + \rho(y,w) &= \rho(x,y). \end{aligned}$$

Так как X — $\mathbb{R}$-дерево, отсюда следует $w = y$ и $x \preceq y$.

Замечание 1. В условиях теоремы полурешетка $(X, \preceq_{(o)})$ может быть решеткой лишь в том случае, если X — одноточечное множество, отрезок или полуинтервал, а точка o — его концевая (терминальная) точка. В этих случаях X линейно упорядочено.

Достаточность. Пусть X — геодезическое метрическое пространство, на котором задан верхне полулинейный частичный порядок $\preceq$, по отношению к которому тройка $(X, \rho, \preceq)$ является метрической $\vee$-полурешеткой. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in X$, для которых $x \preceq y$. Для них $y = x \vee y$. Пусть $z \in [xy]$ и предположим, что не выполняется одно из двух отношений $x \preceq z$ или $z \preceq y$.

Если не выполнено первое из двух отношений, но выполнено второе, то

$$x \preceq x \vee z \preceq y$$

и

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x, x \vee z) + 2\rho(z, x \vee z) + \rho(x \vee z, y) > \rho(x, x \vee z) + \rho(x \vee z, y) \geq \rho(x,y).$$

Если не выполнено второе из двух отношений, то

$$x \preceq y \preceq x \vee z,$$
$$\rho(x,z) > \rho(x,y).$$

В обоих случаях полученные неравенства противоречат равенству

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = \rho(x,y),$$

необходимому для включения $z \in [xy]$. Следовательно, для всех точек z отрезка $[xy]$ выполнено

$$x \preceq z \preceq y.$$

Пусть теперь точки x и y несравнимы по отношению $\preceq$. Тогда они соединяются отрезком, состоящим из пары отрезков $[xw]$ и $[wy]$, где $w = x \vee y$. Покажем, что указанный отрезок единственный, соединяющий x и y. Рассмотрим произвольную точку $z \in X$. Для нее либо справедливо, либо несправедливо условие

$$z \preceq w. \tag{2}$$

Если условие (2) не выполняется, то

$$\rho(x,z) > \rho(x,w),$$
$$\rho(z,y) > \rho(w,y).$$

Складывая, получаем

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) > \rho(x,w) + \rho(w,y) = \rho(x,y),$$

т. е. точка z не принадлежит никакому отрезку с концами x и y. Пусть условие (2) справедливо. Тогда

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) \geq \rho(x, x \vee z) + \rho(x \vee z, w) + \rho(w, z \vee y) + \rho(z \vee y, y) = \rho(x,y),$$

причем равенство выполняется лишь в том случае, когда точка z принадлежит одному из отрезков $[xw]$ или $[wy]$. Отсюда следует единственность отрезка $[xy] = [xw] \cup [wy]$.

Докажем, что для произвольных трех различных точек $x, y, z \in X$ отрезок $[xy]$ содержится в объединении отрезков $[xz] \cup [zy]$. Рассмотрим возможные (с точностью до переобозначений) случаи.

1. $x \prec z \prec y$. В этом случае $[xy] = [xz] \cup [zy]$.

2. Точки x и z несравнимы и $x \prec w \prec y$, где $w = x \vee z$. Тогда

$$[xy] = [xw] \cup [wy] \subset [xz] \cup [zy],$$
$$[xz] = [xw] \cup [wz] \subset [xy] \cup [zy],$$
$$[zy] = [zw] \cup [wy] \subset [zx] \cup [zy].$$

3. Точки x и z несравнимы и $x \prec y \preceq x \vee z = y \vee z$. Тогда $[xz] = [xy] \cup [yz]$.

4. Все три точки x, y и z попарно несравнимы. Обозначим $v = x \vee y$ и $w = x \vee z$. В силу верхней полулинейности порядка $\preceq$ точки v и w сравнимы. Будем считать, что $v \preceq w$. Тогда, как легко видеть, $w = y \vee z$. Следовательно,

$$[xy] = [xw] \cup [vw] \cup [wy] \subset [xz] \cup [zy],$$
$$[xz] = [xw] \cup [wz] \subset [xy] \cup [yz],$$
$$[zy] = [zw] \cup [vw] \cup [wy] \subset [xz] \cup [xy].$$

Случаи 1–4 исчерпывают все возможные ситуации с точностью до переобозначений. □

Следующий пример показывает существенность условия верхней полулинейности в доказанной теореме.

Пример 1. На координатной плоскости A^2 с координатами (x,y) введем следующее отношение частичного порядка: $(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2)$ в том и только том случае, если $x_1 \le x_2$ и $y_1 \le y_2$. Легко видеть, что пара $(A^2,\preceq)$ является $\vee$-полурешеткой (и даже решеткой). Также рассмотрим метрику ρ на A^2, порожденную нормой $\|(x,y)\| = |x| + |y|$. При такой метрике тройка $(A^2,\rho,\preceq)$ является верхней метрической полурешеткой, метрическое пространство (A^2,ρ) геодезическое, но не является $\mathbb{R}$-деревом. Порядок $\preceq$ не полулинеен.

4. Топологическое пространство $\mathcal{O}_+(X)$

Изучим строение пространства $\mathcal{O}_+(X)$ частичных порядков на полном локально компактном $\mathbb{R}$-дереве X, задающих на X верхне полулинейные метрические $\vee$-полурешетки. Через $\mathcal{O}_+^r$ обозначается его подпространство, состоящее из корневых порядков. В принципе, основные результаты этого параграфа распространяются и на случай произвольного $\mathbb{R}$-дерева, но при этом нельзя пользоваться понятием метрической компактификации: ее определение корректно лишь для полных локально компактных метрических пространств.

Произвольный порядок τ, как бинарное отношение, есть замкнутое подмножество в метрическом квадрате $X \times X$. На произведении $X \times X$ определена суммарная метрика

$$d_+((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \rho(x_1,y_1) + \rho(x_2,y_2),$$

которая порождает расстояние Хаусдорфа на семействе замкнутых подмножеств.

Лемма 1. *Для двух корневых порядков $\sigma,\tau \in \mathcal{O}_+^r$ расстояние Хаусдорфа $\mathrm{Hd}(\sigma,\tau)$ конечно и равно расстоянию между корнями данных порядков.*

Доказательство. Если x — корень порядка τ, а y — корень порядка σ, то

$$\mathrm{Hd}(\tau,\sigma) \le \rho(x,y). \tag{3}$$

Действительно, если для точек $s,t \in X$ выполняется $s\tau t$, но не выполняется $s\sigma t$, то точка t лежит на отрезке $[xs]$, но не лежит на отрезке $[ys]$. Расстояние от точки t до отрезка $[ys]$ не превосходит $\rho(t,s)$. Выберем на $[ys]$ точку w, ближайшую к t. Поскольку $s\sigma w$ и $d_+((s,t),(s,w)) = \rho(t,w) \le \rho(s,t)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$(s,t) \in \mathcal{N}_{\rho(x,y)+\varepsilon}(\sigma).$$

Аналогично, если выполнено $s\sigma t$, но не выполнено $s\tau t$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$(s,t) \in \mathcal{N}_{\rho(x,y)+\varepsilon}(\tau).$$

С другой стороны, для корней выполняются отношения $x\sigma y$ и $y\tau x$. Если $\varepsilon < \rho(x,y)$, то метрический замкнутый шар $B((y,x),\varepsilon)$ в метрике d_+ не пересекает $\sigma \subset X \times X$: для $(p,q) \in B((y,x),\varepsilon)$ сумма расстояний $\rho(y,p) + \rho(q,x) \le \varepsilon$. Значит,

$$\rho(x,y) \le \mathrm{Hd}(\tau,\sigma). \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) следует требуемое равенство. □

Таким образом, подмножество $\mathcal{O}_+^r(X) \subset \mathcal{O}_+(X)$ с метрикой Хаусдорфа есть метрическое пространство, изометричное X. Поэтому $\mathcal{O}_+^r$ также является $\mathbb{R}$-деревом. Для произвольных порядков в $\mathcal{O}_+(X)$ расстояние Хаусдорфа может быть и бесконечным, поэтому метрика Хаусдорфа не порождает на $\mathcal{O}_+(X)$ однозначно определенной топологии. Превратим $\mathcal{O}_+(X)$ в топологическое пространство, задав базу $\mathcal{B}$ топологии следующим образом. Для пары различных точек $x,y \in X$ положим

$$\mathcal{U}_{(x,y)} = \{\tau \in \mathcal{O}_+(X) \mid x\tau y\} \setminus \{\preceq_{(y)}\}.$$

Базу $\mathcal{B}$ составляют все открытые множества в метрическом пространстве $\mathcal{O}_+^r$ и всевозможные множества вида $\mathcal{U}_{(x,y)}$ при $x \ne y \in X$ (здесь игнорируем тот факт, что возможно совпадение множеств $\mathcal{U}_{(x,y)} = \mathcal{U}_{(x',y)}$ при $x \neq x'$). Тот факт, что семейство $\mathcal{B}$ действительно задает топологию на $\mathcal{O}_+(X)$, основывается на следующей лемме.

Лемма 2. *Для произвольных двух множеств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{B}$ и для любого порядка $\tau \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ существует такое множество $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, что*

$$\tau \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2.$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ открыты в $\mathcal{O}_+^r$. Поскольку пересечение множества $\mathcal{U}_{(x,y)}$ с $\mathcal{O}_+^r$ также открыто в $\mathcal{O}_+^r$, то утверждение выполняется и для любого корневого порядка $\preceq_{(x)} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{O}_+^r$. Пусть $\tau \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ — некорневой порядок. Считая, что $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{(x_1,y_1)}$ и $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{(x_2,y_2)}$, обозначим $y = y_1 \vee_\tau y_2$. Тогда

$$\tau \in \mathcal{U}_{(x_1,y)} = \mathcal{U}_{(x_2,y)} \subset \mathcal{U}_{(x_1,y_1)} \cap \mathcal{U}_{(x_2,y_2)},$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Топологическое пространство $\mathcal{O}_+(X)$ хаусдорфово.*

Доказательство. Подпространство $\mathcal{O}_+^r(X) \subset \mathcal{O}_+(X)$ хаусдорфово как метрическое. Пусть $\tau = \preceq_x \in \mathcal{O}_+^r(X)$ и $\sigma \in \mathcal{O}_+(X) \setminus \mathcal{O}_+^r(X)$. Выберем точку $y \in X$, для которой $x\sigma y$. Множества $\mathcal{U}_{(x,y)}$ и метрический шар $B(\tau, \rho(x,y))$ в метрике Хаусдорфа являются непересекающимися окрестностями порядков τ и σ. Наконец, пусть оба порядка τ и σ некорневые. Выберем пару точек $x, y \in X$, для которых выполняется $x\tau y$, но не выполняется $x\sigma y$. Обозначим $w = x \vee_\sigma y$. Множества $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{(w,y)}$ и $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{(y,w)}$ являются непересекающимися окрестностями порядков τ и σ соответственно. □

Всякое $\mathbb{R}$-дерево есть $CAT(0)$-пространство, т. е. односвязное пространство неположительной кривизны в смысле А.Д. Александрова. В настоящее время теория пространств Александрова неположительной кривизны изучена достаточно глубоко (напр., [7]). Для полных локально компактных $CAT(0)$-пространств метрическая компактификация совпадает с так называемой *геодезической компактификацией* с *конической топологией*. Два луча $c, d : [0, +\infty) \to X$ называются *асимптотическими*, если функция $\rho(c(t), d(t))$ ограничена при $t \in [0, +\infty)$, т. е. расстояние Хаусдорфа между лучами c и d конечно:

$$\mathrm{Hd}(c, d) < +\infty.$$

Отношение асимптотичности есть отношение эквивалентности на множестве лучей в X. *Геодезическая граница* $\partial_g X$ определяется как множество классов эквивалентности по этому отношению. *Коническая топология* на $\overline{X}_g = X \cup \partial_g X$ есть топология равномерной сходимости на ограниченных областях натуральной параметризации отрезков и лучей. Иначе говоря, последовательность точек $\{\xi_n\} \subset \overline{X}_g$ сходится в конической топологии к точке $\eta \in \overline{X}_g$ в том и только том случае, если последовательность натуральных параметризаций отрезков (лучей) $[o\xi_n]$ с началом в отмеченной точке $o \in X$ равномерно на ограниченных областях задания сходится к натуральной параметризации отрезка (луча) $[o\eta]$.

Совпадение двух компактификаций означает, что тождественное отображение $\mathrm{Id} : X \to X$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{X}_m \to \overline{X}_g$. Далее не будем различать метрическую и геодезическую компактификации и будем обозначать их $\overline{X} = \overline{X}_m = \overline{X}_g$. Граница пространства X, т. е. его множество бесконечно удаленных точек $\overline{X} \setminus X$ обозначается $\partial_\infty X$. В частности, всякая орифункция β на X является *функцией Буземана*, определенной по некоторому лучу $c : \mathbb{R}_+ \to X$ равенством

$$\beta(y) = \lim_{t \to +\infty} (\rho(y, c(t)) - t).$$

Установим гомеоморфизм Φ топологического пространства $\mathcal{O}_+(X)$ на компактификацию $\overline{X}$.

Пусть частичный порядок τ на $\mathbb{R}$-дереве X определяет верхне полулинейную метрическую $\vee$-полурешетку. Если порядок τ верхний корневой с корнем x_τ, положим $\Phi(\tau) = x_\tau$. Если τ

не является корневым, то из его верхней полулинейности и метрического свойства следует, что для произвольной точки $x \in X$ множество U_x есть объединение вложенных друг в друга отрезков вида $[xy]$. Поскольку X предполагается полным, а порядок τ — некорневой, длина таких отрезков бесконечно возрастает. Такое объединение есть луч в X с началом x. Для двух различных точек $x, y \in X$ определена их точная верхняя грань $w = x \vee y$ и лучи U_x и U_y пересекаются по лучу U_w, т. е. асимптотичны. В этом случае положим $\Phi(\tau) = [U_x] \in \partial_\infty X$, т. е. имеем класс эквивалентности лучей в X, асимптотических с U_x.

Теорема 3. *Отображение* $\Phi : \mathcal{O}_+ \to \overline{X}$ *есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Отображение Φ инъективно. Действительно, если $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{O}_+(X)$ — два различных корневых порядка на X, то в силу утверждения единственности в теореме 1 их корни различны. Пусть порядки τ_1, τ_2 не корневые. Рассмотрим пару $x, y \in X$, для которой выполняется $x\tau_1 y$, но не выполняется $x\tau_2 y$. Множество $\overline{X} \setminus \{y\}$ разбивается на компоненты линейной связности так, что точка x и множество $\{z \mid y\tau_1 z\} \setminus \{y\}$ лежат в разных компонентах. Образ $\Phi(\tau_1)$ принадлежит замыканию множества $\{z \mid y\tau_1 z\}$ в $\overline{X}$, тогда как $\Phi(\tau_2)$ — замыканию компоненты, содержащей точку x.

Отображение Φ сюръективно. Действительно, для произвольной точки $x \in X$ теорема 1 определяет порядок $\tau \in \mathcal{O}_+$, для которого $\Phi(\tau) = x$. Для произвольной точки $\xi \in \partial X$ порядок τ определяется с помощью соответствующей функции Буземана β_ξ. Для произвольной точки $y \in X$ соответствующий ей *оришар*, т. е. множество подуровня

$$\mathcal{HB}(\xi, y) = \{z \in X \mid \beta_\xi(z) \le \beta_\xi(y)\}$$

есть выпуклое в X множество, а для $x \in X$ однозначно определена ее проекция $\pi_{\xi,y}(x)$ на $\mathcal{HB}(\xi, y)$, т. е. ближайшая к x точка, принадлежащая $\mathcal{HB}(\xi, y)$. Положим $x\tau_\xi y$ тогда и только тогда, когда $\pi_{\xi,y}(x) = y$. Отношение τ_ξ есть порядок, принадлежащий $\mathcal{O}_+(X)$, и $\Phi(\tau_\xi) = \xi$.

Таким образом, отображение Φ биективно. В силу леммы 3 и компактности $\overline{X}$ для доказательства теоремы достаточно показать, что Φ — открытое отображение, а в силу леммы 1 и задания топологии на $\mathcal{O}_+(X)$, для этого достаточно убедиться, что для любой пары $x, y \in X$ образ множества $\mathcal{U}_{(x,y)}$ открыт в $\overline{X}$. Докажем, что дополнение $\overline{X} \setminus \Phi(\mathcal{U}_{(x,y)}$ замкнуто.

Для $\tau \in \mathcal{U}_{(x,y)} \cap \mathcal{O}_+^r$ обозначим через z корень τ и $r = \rho(y, z)$. Если для точки $t \in X$ выполняется $\rho(z, t) < r$, то $y \in [xt]$ и $x \preceq_t y$. Следовательно, $t \in \mathcal{U}_{(x,y)}$, а τ — внутренняя точка множества $\mathcal{U}_{(x,y)}$. Таким образом, $X \setminus \mathcal{U}_{(x,y)}$ замкнуто в X и содержит все предельные точки, принадлежащие X.

Пусть последовательность $\{\xi_n\} \subset \overline{X} \setminus \mathcal{U}_{(x,y)}$ сходится к идеальной точке $\xi \in \partial X$. Можно считать, что отмеченная точка $o \notin \Phi(\mathcal{U}_{(x,y)})$. При таком предположении для всех n выполняется $[o\xi_n] \cap \Phi(\mathcal{U}_{(x,y)}) = \emptyset$. Пусть $R > \rho(o, y)$ и $c_n : [0, R] \to X$ — натуральные параметризации отрезков или лучей $[o\xi_n]$. Тогда точки $c_n(R)$ сходятся к точке $c(R)$, где $c : \mathbb{R}_+ \to X$ — натуральная параметризация луча $[o\xi]$. Это же утверждение останется справедливым, если выберем произвольное число $R' > R$. Но поскольку X — $\mathbb{R}$-дерево, то такое возможно лишь в том случае, если $c_n(R) = c(R)$ при всех n, начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$. Следовательно, $c(R) \notin \Phi(\mathcal{U}_{(x,y)})$. Поскольку, в частности, $c(R) \in [y\xi]$, луч $[y\xi]$ не асимптотичен ни одному из лучей, начало которых — отрезок $[xy]$. Значит, $\xi \notin \Phi(\mathcal{U}_{(x,y)})$ и множество $\overline{X} \setminus \Phi(\mathcal{U}_{(x,y)})$ замкнуто, т. к. содержит все свои предельные точки. □

5. Подобно однородное неоднородное $\mathbb{R}$-дерево

В этом параграфе приводим конструкцию метрического пространства X, являющегося подобно однородным неоднородным $\mathbb{R}$-деревом. Тем самым показывается существенность условия локальной компактности в гипотезе Берестовского. Наш пример тесно связан с универсальными $\mathbb{R}$-деревьями A_μ (μ — кардинальное число), построенными в [8]. Построенное пространство конформно эквивалентно универсальному $\mathbb{R}$-дереву A_μ в смысле определения конформной эквивалентности из [1].

Функция $y = f(x)$, заданная на интервале $\langle\alpha,\beta\rangle$, называется *кусочно-постоянной слева*, если для любой точки $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $f|_{[x-\varepsilon,x]} = \mathrm{const}$. Множество X — это множество пар (f, a_f), где $a_f > 0$ — действительное число, и $f : (a_f, +\infty) \to G$ — кусочно-постоянная слева функция со значениями в аддитивной группе G, для которой существует такое $b_f \geq a_f$, что $f|_{(b_f,+\infty)} \equiv 0$.

Введем на X отношение частичного порядка, положив $(f, a_f) \preceq (g, a_g)$ в том и только том случае, если $a_f \leq a_g$ и $f|_{(a_g,+\infty)} = g$.

Лемма 4. *Пара $(X, \preceq)$ является верхне полулинейной $\vee$-полурешеткой.*

Доказательство. Для произвольных пар $(f, a_f), (g, a_g) \in X$ их точной верхней гранью является пара (h, a_h), где

$$a_h = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f|_{(x,+\infty)} = g|_{(x,+\infty)}\}$$

и $h = f|_{(a_h,+\infty)} = g|_{(a_h,+\infty)}$. Для пары (f, a_f) линейная упорядоченность верхнего конуса $U_{(f,a_f)}$ следует из определения порядка $\preceq$. $\square$

Далее определим метрику ρ на множестве X, положив

$$\rho((f, a_f), (g, a_g)) = |a_f - a_g|,$$

если $(f, a_f) \preceq (g, a_g)$ или $(g, a_g) \preceq (f, a_f)$, и

$$\rho(p, q) = \rho(p, p \vee q) + \rho(p \vee q, q),$$

если элементы $p, q \in X$ несравнимы.

Лемма 5. *Метрическое пространство (X, ρ) геодезическое. Тройка $(X, \rho, \preceq)$ является верхней метрической полурешеткой.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что если $(f, a_f) \preceq (g, a_g)$, то эти точки можно соединить отрезком. Такой отрезок задается параметризацией $\gamma : [a_f, a_g] \to X$ по формуле

$$\gamma(t) = (f|_{(t,+\infty)}, t).$$

Требования (1) и (2) в определении 1 следуют из задания метрики ρ. $\square$

Следствие 1. Пространство X является $\mathbb{R}$-деревом.

В $\mathbb{R}$-дереве X точка $x \in X$ называется точкой *валентности* μ, где μ — кардинальное число, если число компонент пространства $X \setminus \{x\}$ равно μ.

Лемма 6. *Каждая точка $\mathbb{R}$-дерева X является точкой валентности $|G| + 1$.*

Доказательство. Для точки $x = (f, a_f)$ компонентами связности множества $X \setminus \{x\}$ являются

$$A = \{(g, a_g) \mid \text{ не выполняется } (g, a_g) \prec (f, a_f)\}$$

и для каждого элемента $\alpha \in G$

$$B_\alpha = \{(g, a_g) \mid (g, a_g) \prec (f, a_f) \text{ и } g(a_f) = \alpha\}.$$

Всего $|G| + 1$ компонента. $\square$

Из определения метрики ρ следует

Лемма 7. *Отображение $\varphi : X \to \mathbb{R}$, заданное равенством $\varphi((f, a_f)) = a_f$, есть субметрия.*

Лемма 8. *$\mathbb{R}$-дерево X локально полно. Радиус полноты в точке $(f, a_f) \in X$ равен $r_c(f, a_f) = a_f$.*

Доказательство. Пусть $\{(f_n, a_{f_n})\}$ — фундаментальная последовательность точек, принадлежащих шару $B((f, a_f), r)$ при $r < a_f$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}_1$, что для всех $m, n > N_1$ функции f_m и f_n совпадают на луче $[a_{f_m} + \frac{1}{3}\varepsilon, +\infty)$. В силу леммы 7 последовательность $\{a_{f_n}\}$ также фундаментальна. Пусть $a_g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Определим функцию $g : (a_g, +\infty) \to \{0, 1\}$. Для произвольного $t > a_g$ обозначим $\varepsilon = t - a_g$ и выберем такое $N_2 \in \mathbb{N}$, что $a_{f_n} - a_g < \frac{1}{3}\varepsilon$ для всех $n > N_2$. Тогда при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ значения функций $f_n(t)$ стабилизируются: $f_n(t) = f_{N+1}(t)$ и существует такое $\varepsilon_1 < \frac{1}{3}\varepsilon$, что $f_n|_{[t-\varepsilon_1]} = f_n(t)$. Положив $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$, получим корректно определенную кусочно-постоянную слева функцию g, заданную на луче $(a_g, +\infty)$, причем $\rho((g, a_g), (f_n, a_{f_n}))$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Делаем вывод, что пара (g, a_g) является элементом пространства X и пределом последовательности $\{(f_n, a_{f_n})\}$. Кроме того, из изложенного следует оценка на радиус полноты $r_c(f, a_f) \geq a_f$. Обратное неравенство очевидно. □

Далее рассмотрим следующие преобразования $\mathbb{R}$-дерева X.

Для числа $\lambda > 0$ положим $H_\lambda(f, a_f) = (f_\lambda, \lambda a_f)$, где $f_\lambda(x) = f(\frac{1}{\lambda}x)$. Преобразование H_λ есть подобие с коэффициентом λ, т. е. для любых элементов $x, y \in X$ выполняется

$$\rho(H_\lambda(x), H_\lambda(y)) = \lambda\rho(x, y).$$

Произвольную функцию $f : (a_f, +\infty) \to G$ доопределим до функции $\overline{f} : \mathbb{R}_+ \to G$, положив $\overline{f}(t) = 0$ при $t \leq a_f$. Пара (f, a_f) порождает преобразование R_f пространства X по формуле

$$R_f((g, a_g)) = (g + \overline{f}|_{(a_g,+\infty)}, a_g).$$

Автоматически проверяется, что R_f — изометрия и для функции $\mathbf{0}$, тождественно равной нулю, выполняется $R_f((\mathbf{0}, a_f)) = (f, a_f)$. Преобразования R_{f_1} и R_{f_2} совпадают тогда и только тогда, когда $\overline{f}_1 = \overline{f}_2$. Заметим, что $R_{f_2} \circ R_{f_1} = R_{f_1} \circ R_{f_2} = R_{f_1+f_2}$ и $(R_f)^{-1} = R_{-f}$, поэтому множество $\mathcal{R}$ изометрий вида R_f составляет коммутативную подгруппу в $\mathrm{Isom}(X)$.

Теорема 4. *X — подобно однородное неоднородное $\mathbb{R}$-дерево. Оно является метрическим расслоением со слоями вида*

$$F_a = \{(f, a)\}.$$

Доказательство. Для точек (f, a_f) и (g, a_g) композиция $R_g \circ H_\lambda \circ (R_f)^{-1}$, где $\lambda = a_g/a_f$, есть подобие, переводящее (f, a_f) в (g, a_g).

Множества F_a замкнуты, поскольку открыты их дополнения. Отображение $T_{(a,b)} : F_a \to F_b$, определенное равенством

$$T_{(a,b)}(f, a) = (T_{a-b}f, b),$$

где функция $T_{a-b}f : (b, +\infty) \to G$ действует по формуле $T_{a-b}f(x) = f(x + a - b)$, есть изометрия слоя F_a на слой F_b. Пусть для определенности $a < b$. Для точки $(f, a) \in F_a$ ближайшей к ней точкой слоя F_b будет точка $(f|_{(b,+\infty)}, b)$. Такая ближайшая точка единственна. Для точки $(f, b) \in F_b$ ближайшими точками слоя F_a будут все точки вида (g, a) при условии $g|_{(b,+\infty)} = f$. Тем самым выполнены все условия в определении метрического расслоения. □

Теорема 2.1 статьи [1] утверждает, что локально полное подобно однородное метрическое пространство однородно тогда и только тогда, когда оно полно. Построенное пространство X неполно, поэтому оно не является однородным. В точке $x = (f, a_f) \in X$ радиус полноты $c(x)$ равен a_f. Пространство X не гомеоморфно произведению $F_a \times \mathbb{R}_+$: оно линейно связно, в то время как сомножитель F_a произведения $F_a \times \mathbb{R}_+$, будучи в метрике, индуцированной из X, ультраметрическим пространством, не линейно связен.

В расщеплении (1) группы $\mathrm{Sim}(X)$ гомоморфизм $\mathrm{Isom}(X) \to \mathrm{Sim}(X)$ — это гомоморфизм вложения, а гомоморфизм $\mathrm{Sim}(X) \to \mathbb{R}_+$ сопоставляет каждому подобию его коэффициент. При этом такое расщепление не порождает на топологической группе $\mathrm{Sim}(X)$ структуры топологического произведения $\mathrm{Isom}(X) \times \mathbb{R}_+$: подгруппа в $\mathrm{Sim}(X)$, порожденная всеми преобразованиями вида H_λ и R_f, линейно связна, в то время как $\mathrm{Isom}(X)$ действует на ультраметрических пространствах F_a как вполне несвязная группа. Следовательно, каждая компонента связности в произведении $\mathrm{Isom}(X) \times \mathbb{R}_+$ изоморфна $\mathbb{R}_+$.

Литература

1. Берестовский В.Н. *Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 11. – С. 3–22.
2. Вайнштейн А.Г., Горелик У.М., Ефремович В.А. *Расслоение плоскости Лобачевского* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 241. – № 2. – С. 269–271.
3. Bestvina M. $\mathbb{R}$*-trees in topology, geometry and group theory.* Handbook of geometric topology. – Edited by R.J. Daverman, R.B. Sher, North-Holland, Amsterdam, London, New York: NY: Elsevier Science, 2002. – P. 55–91.
4. Gromov M. *Hyperbolic manifolds, groups and actions* // Proc. of the 1978 Stony Brook Conference, Princeton Univ. Press, 1981. – P. 182–213.
5. Webster C., Winchester A. *Boundaries of hyperbolic metric spaces* // Pac. J. Math. – 2005. – V. 221. – № 1. – P. 147–158.
6. Биркгоф Г. *Теория решеток.* – М.: Наука, 1984. – 568 с.
7. Bridson M., Haefliger A. *Metric spaces of non-positive curvature* // Comprehensive studies in mathematics. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – V. 319. – 643 p.
8. Dyubina A., Polterovich I. *Explicit constructions of universal* $\mathbb{R}$*-trees and asymptotic geometry of hyperbolic spaces* // Bull. Lond. Math. Soc. – 2001. – V. 33. – № 6. – P. 727–734.

Поморский государственный университет

Поступила 30.09.2005