ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 514.76

П.Я. ГРУШКО, М.А. ГАЕР, Н.М. КУЗУБ

ПОГРУЖЕННЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ С ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ГРУППАМИ G_2^n И COG_2

Алгебру октав Ca (алгебру чисел Кэли) можно представить в виде прямой суммы: $Ca = R\cdot 1\oplus V$, где V — ортогональное дополнение к единице, которое является семимерным векторным пространством, инвариантным относительно действия групп Ли G_2 и COG_2. В V существует базис $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_7\}$ с таблицей умножения классической алгебры Кэли [1]

$$
\begin{array}{llll}
[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]=\mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3]=-\mathbf{e}_2, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4]=\mathbf{e}_5, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_5]=-\mathbf{e}_4,\\
[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_6]=-\mathbf{e}_7, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_7]=\mathbf{e}_6, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]=\mathbf{e}_1, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4]=\mathbf{e}_6,\\
[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_5]=\mathbf{e}_7, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_6]=-\mathbf{e}_4, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_7]=-\mathbf{e}_5, & [\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4]=\mathbf{e}_7,\\
[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_5]=-\mathbf{e}_6, & [\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_6]=\mathbf{e}_5, & [\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_7]=-\mathbf{e}_4, & [\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_5]=\mathbf{e}_1,\\
[\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_6]=\mathbf{e}_2, & [\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_7]=\mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_5,\mathbf{e}_6]=-\mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_5,\mathbf{e}_7]=\mathbf{e}_2,\\
[\mathbf{e}_6,\mathbf{e}_7]=-\mathbf{e}_1, & [\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i]=0, & i=1,\dots,7. &
\end{array}
$$

Многообразия со структурной группой G_2 изучались в [2], [3] и др. Отметим, что группа COG_2 является конформным аналогом группы автоморфизмов G_2 алгебры октав, т. е. $COG_2 = \{\lambda\cdot A \mid \lambda\in R^+,\ A\in G_2\}$. В семимерном пространстве октавная геометрия наиболее подходящая для исследования, т. к. в случае маленьких структурных групп касательные пространства многообразий и подмногообразий чрезмерно неизотропны. В то же время в случае большой структурной группы, например, $SL(7)$, имеется мало инвариантов. В случае произвольной размерности ортогональная и конформная группы наиболее оптимальны в этом смысле. Но в семимерном пространстве исключительное значение имеют компактная форма и нормальная некомпактная форма группы Ли G_2. Эта группа удобна также с точки зрения использования необходимых компьютерных вычислений, т. к. другие особые группы (такие как F_4 размерности 52 со стандартным представлением размерности 26) требуют значительно более долгих и сложных вычислений.

Дифференциальная геометрия семимерных многообразий и различных подмногообразий в пространствах со структурной группой G_2^n (нормальная форма комплексной особой группы Ли G_2^c) очень богата по сравнению даже с обычной октавной геометрией.

Геометрические объекты со структурной группой COG_2 отличаются своеобразием свойств и представляют значительный интерес для углубленного изучения не только в математике, но и в физике [4]. Поэтому вполне естественным является изучение пространств не только с фундаментальной группой G_2, но и с фундаментальными группами G_2^n и COG_2. Пространство с фундаментальной группой G_2^n будем называть псевдооктавным, а с фундаментальной группой COG_2 — конформно-октавным.

В данной работе рассматриваются погруженные гладкие гиперповерхности в этих пространствах с неизотропными нормалями и доказываются аналоги классической теоремы Бонне для них.

Погруженные гиперповерхности псевдооктавного пространства

Пусть V — семимерное псевдооктавное пространство с антикоммутативным умножением

$$
\begin{array}{llll}
[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]=\mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3]=-\mathbf{e}_2, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4]=-\mathbf{e}_5, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_5]=\mathbf{e}_4,\\
[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_6]=-\mathbf{e}_7, & [\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_7]=\mathbf{e}_6, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]=\mathbf{e}_1, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4]=-\mathbf{e}_6,\\
[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_5]=\mathbf{e}_7, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_6]=\mathbf{e}_4, & [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_7]=-\mathbf{e}_5, & [\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4]=-\mathbf{e}_7,\\
[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_5]=-\mathbf{e}_6, & [\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_6]=\mathbf{e}_5, & [\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_7]=\mathbf{e}_4, & [\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_5]=\mathbf{e}_1,\\
[\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_6]=\mathbf{e}_2, & [\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_7]=\mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_5,\mathbf{e}_6]=\mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_5,\mathbf{e}_7]=-\mathbf{e}_2,\\
[\mathbf{e}_6,\mathbf{e}_7]=\mathbf{e}_1, & [\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i]=0, & i=1,\dots,7. &
\end{array}
$$

Данная таблица умножения соответствует обобщенной алгебре Кэли–Диксона [5]. Группа ее автоморфизмов есть особая некомпактная группа Ли G_2^n размерности 14. Ей соответствует алгебра Ли g_2^n.

Векторное и скалярное произведения в семимерном псевдооктавном пространстве образуют смешанное произведение, которое определяет антисимметричную трилинейную форму $\Omega(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\langle[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}\rangle$. Группой, сохраняющей форму $\Omega\in\wedge^3R^{7*}$, является также группа Ли G_2^n.

Пусть $U\subset R^6$ — область и $f:U\to V$ — погружение, так что $S=f(U)$ — гиперповерхность. Дифференциал df индуцирует внешние дифференциальные формы ψ, h второй и третьей степени на U такие, что

$$
\begin{gathered}
h(\mathbf{du},\mathbf{du}',\mathbf{du}'')=\Omega(\mathbf{df}(\mathbf{du}),\mathbf{df}(\mathbf{du}'),\mathbf{df}(\mathbf{du}'')),\\
\psi(\mathbf{du},\mathbf{du}')=\Psi(\mathbf{df}(\mathbf{du}),\mathbf{df}(\mathbf{du}'))=\Omega(\mathbf{df}(\mathbf{du}),\mathbf{df}(\mathbf{du}'),\mathbf{N}),
\end{gathered}
$$

где $\mathbf{N}$ — нормаль гиперповерхности, $\mathbf{du},\mathbf{du}',\mathbf{du}''\in TU\in TR^6$.

Форму $h(\mathbf{du},\mathbf{du}',\mathbf{du}'')$, которая индуцирована формой Ω при погружении f, будем называть первой внешней фундаментальной формой третьей степени; форму $\psi(\mathbf{du},\mathbf{du}')$, которая индуцирована формой Ω при погружении f после подстановки нормального вектора в Ω, — второй внешней фундаментальной формой второй степени.

В каждой точке гиперповерхности возникает репер $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_6,\mathbf{N}\}$, где $\mathbf{f}_i=\frac{\partial f}{\partial u^i}$ — касательные векторы, $\mathbf{N}$ — нормаль гиперповерхности. Деривационные формулы имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{f}&=\mathbf{f}_i du^i,\\
d\mathbf{f}_i&=\Gamma^j_{i\alpha}\mathbf{f}_j du^\alpha+b_{ij}du^j\mathbf{N},\\
d\mathbf{N}&=c_i^j du^i\mathbf{f}_j.
\end{aligned}
$$

Введем обозначения $h_{ijk}=\Omega(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_k)=\langle[\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j],\mathbf{f}_k\rangle=(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_k)$, $\psi_{ij}=\Psi(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j)=\Omega(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j,\mathbf{N})=\langle[\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j],\mathbf{N}\rangle=(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j,\mathbf{N})$. Получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_{ijk}}{\partial u^m}&=\Gamma^\alpha_{im}h_{\alpha jk}+\Gamma^\alpha_{jm}h_{i\alpha k}+\Gamma^\alpha_{km}h_{ij\alpha}+b_{im}\psi_{jk}+b_{jm}\psi_{ki}+b_{km}\psi_{ij},\\
\frac{\partial\psi_{ij}}{\partial u^m}&=\Gamma^\alpha_{im}\psi_{\alpha j}+\Gamma^\alpha_{jm}\psi_{i\alpha}+h_{ij\alpha}c^\alpha_m.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Рассмотрим два случая. 1) Скалярный квадрат вектора нормали положителен. Пусть $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_7\}$ — некоторый октавный репер (неканонический) в произвольной выбранной точке М такой, что вектор нормали $\mathbf{N}$ совпадает с вектором $\mathbf{e}_1$, т. е. $\mathbf{N}^2=1$.

Обозначим $h^0_{ijk}=\Omega(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)$, $\psi^0_{ij}=\Psi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$, где $i,j,k\neq1$. Из таблицы умножения векторов $\{\mathbf{e}_i\}$ константы $h^0\in\wedge^3R^{6*}$, $\psi^0\in\wedge^2R^{6*}$ определены единственным образом: $h^0_{246}=1$, $h^0_{347}=1$, $h^0_{356}=1$, $h^0_{257}=-1$, $\psi^0_{23}=1$, $\psi^0_{45}=1$, $\psi^0_{67}=1$, а h^0_{ijk}, ψ^0_{ij}, не связанные условием кососимметричности, нулевые.

Векторы $\{\mathbf{N}=\mathbf{e}_1,\mathbf{f}_i\}$ образуют репер (неканонический, неоктавный) в точке гиперповерхности S. Рассмотрим связывающую эти два репера матрицу $p=(p_i^j)\in GL(6)$ такую, что $\mathbf{f}_i=p_i^\alpha\mathbf{e}_\alpha$,

$\alpha = \overline{2,7}$. Таким образом, существует такое отображение $p : U \to GL(6)$, что $h(u) = (h^0)^{p(u)}$, $\psi(u) = (\psi^0)^{p(u)}$ в некоторой окрестности точки u поверхности S. Группа $GL(6)$ действует естественным образом в пространстве $\wedge^3 R^{6*} \oplus \wedge^2 R^{6*}$, размерность которого равна 35. Выясняем, что стационарной подгруппой, сохраняющей пару форм (h^0, ψ^0), является группа $SU(1,2)$ размерности 8, и матрица p определяется с точностью до произвольного множителя из $SU(1,2)$.

С использованием известных разложений линейных групп строится алгоритм, позволяющий выделять представителя в каждом классе эквивалентности группы $GL(6)$ по специальной унитарной подгруппе $SU(1,2)$ (в достаточно малой окрестности единицы), что позволяет избавиться от произвола в выборе матрицы p.

2) Скалярный квадрат вектора нормали отрицателен. В этом случае удобнее пользоваться другой матричной реализацией группы G_2^n. Для этого введем новый базис в пространстве V

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_5, \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_6, \quad \mathbf{m}_3 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_7, \quad \mathbf{m}_4 = \mathbf{e}_4,$$
$$\mathbf{m}_5 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5, \quad \mathbf{m}_6 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_6, \quad \mathbf{m}_7 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_7.$$

Полученный базис $\{\mathbf{m}_i\}$ будем называть изотропным в том смысле, что он содержит максимально возможное количество изотропных векторов, т. е. $\mathbf{m}_i^2 \equiv 0$, $i \neq 4$. При этом $\mathbf{m}_4^2 = -1$, $\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_5 \rangle = 2$, $\langle \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_6 \rangle = 2$, $\langle \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_7 \rangle = 2$, остальные скалярные произведения равны нулю.

Векторное произведение $[\ ,\ ]$ в новом базисе $\{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_7\}$ задается следующей таблицей умножения:

$$\begin{array}{lll}
[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = 2\mathbf{m}_7, & [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3] = -2\mathbf{m}_6, & [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_4] = -\mathbf{m}_1, \\
[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_5] = -2\mathbf{m}_4, & [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_6] = 0, & [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_7] = 0, \\
[\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3] = 2\mathbf{m}_5, & [\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_4] = -\mathbf{m}_2, & [\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_5] = 0, \\
[\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_6] = -2\mathbf{m}_4, & [\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_7] = 0, & [\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4] = -\mathbf{m}_3, \\
[\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_5] = 0, & [\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_6] = 0, & [\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_7] = -2\mathbf{m}_4, \\
[\mathbf{m}_4, \mathbf{m}_5] = -\mathbf{m}_5, & [\mathbf{m}_4, \mathbf{m}_6] = -\mathbf{m}_6, & [\mathbf{m}_4, \mathbf{m}_7] = -\mathbf{m}_7, \\
[\mathbf{m}_5, \mathbf{m}_6] = 2\mathbf{m}_3, & [\mathbf{m}_5, \mathbf{m}_7] = -2\mathbf{m}_2, & [\mathbf{m}_6, \mathbf{m}_7] = 2\mathbf{m}_1, \\
 & [\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i] = 0, \qquad i = 1, \ldots, 7. &
\end{array}$$

Пусть $\{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_7\}$ — некоторый изотропный репер (неканонический) в произвольной выбранной точке M такой, что вектор нормали $\mathbf{N}$ совпадает с вектором $\mathbf{m}_4$, т. е. $\mathbf{N}^2 = -1$.

Обозначим $h_{ijk}^0 = \Omega(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j, \mathbf{m}_k)$, $\psi_{ij}^0 = \Psi(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j)$, где $i, j, k \neq 4$. Из таблицы умножения векторов $\mathbf{m}_i$ константы $h_{ijk}^0 \in \wedge^3 R^{6*}$, $\psi_{ij}^0 \in \wedge^2 R^{6*}$ определены единственным образом $h_{123}^0 = 4$, $h_{567}^0 = 4$, $\psi_{15}^0 = 2$, $\psi_{26}^0 = 2$, $\psi_{37}^0 = 2$, а h_{ijk}^0, ψ_{ij}^0, не связанные условием кососимметричности, нулевые.

Векторы $\{\mathbf{N} = \mathbf{m}_4, \mathbf{f}_i\}$ образуют репер (неканонический, неоктавный) в точке гиперповерхности S. Вводится матрица $p = (p_i^j) \in GL(6)$ такая, что $\mathbf{f}_i = p_i^\alpha \mathbf{m}_\alpha$, $i, \alpha = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

В этом случае стационарной подгруппой, сохраняющей пару форм (h^0, ψ^0), является группа $SL(3)$ размерности 8, действующая в пространстве $R^3 \oplus R^{3*}$, и матрица p определяется с точностью до произвольного множителя вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{pmatrix},$$

где $A \in SL(3)$, 0 — нулевая матрица.

Аналогично первому случаю построен алгоритм, позволяющий выделять представителя в каждом классе эквивалентности группы $GL(6)$ по специальной линейной подгруппе $SL(3)$ (в достаточно малой окрестности единицы), что позволяет избавиться от произвола в выборе матрицы p.

Обозначим через q матрицу, обратную к матрице p. Следовательно, в обоих случаях систему уравнений (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} h_{abcd} &= \widetilde{\Gamma}^x_{ad} h^0_{xbc} + \widetilde{\Gamma}^y_{bd} h^0_{ayc} + \widetilde{\Gamma}^z_{cd} h^0_{abz} + \widetilde{b}_{ad}\psi^0_{bc} - \widetilde{b}_{bd}\psi^0_{ac} + \widetilde{b}_{cd}\psi^0_{ab}, \\ \psi_{abd} &= \widetilde{\Gamma}^x_{ad}\psi^0_{xb} + \widetilde{\Gamma}^y_{bd}\psi^0_{ay} + \widetilde{c}^z_d h^0_{abz}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $h_{abcd} = \sum\limits_{i,j,k,l} \frac{\partial h_{ijk}}{\partial u^l} q^i_a q^j_b q^k_c q^l_d$, $\psi_{abd} = \sum\limits_{i,j,l} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial u^l} q^i_a q^j_b q^l_d$, неизвестные $\widetilde{\Gamma}^x_{ad} = \Gamma^\alpha_{il} p^x_\alpha q^i_a q^l_d$, $\widetilde{b}_{ad} = b_{il} q^i_a q^l_d$, $\widetilde{c}^z_d = c^\alpha_l p^z_\alpha q^l_d$. Выражения h_{abcd}, ψ_{abd} в левой части системы рассматриваем как символьные параметры. Коэффициенты в правой части являются константами. Для каждого случая отдельно рассматривалась система уравнений (2). Она линейна относительно 183 неизвестных $\widetilde{\Gamma}^x_{ad}$, $\widetilde{b}_{ad}$, $\widetilde{c}^z_d$ и содержит 210 уравнений.

Ранг однородной системы совпадает с количеством неизвестных и равен 183, следовательно, существует не более одного решения. Это справедливо как в первом, так и во втором случае.

Чтобы система имела решение, должны существовать 27 соотношений, содержащих символьные параметры h_{ijkl}, ψ_{ijk}, т. е. свободные члены системы. В [6] показано, что эти 27 соотношений являются тождественными.

Система (2) имеет единственное решение как в первом, так и во втором случаях. Приведем для примера несколько выражений, полученных в первом случае.

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}^2_{22} &= \frac{1}{2}(2\psi_{232} + \psi_{452} + \psi_{672} - h_{3472} - h_{3562}), \\ \widetilde{\Gamma}^3_{67} &= \frac{1}{4}(\psi_{254} - 2\psi_{245} + 2\psi_{276} + \psi_{344} + \psi_{355} + 2\psi_{366} - 2\psi_{452} - 2\psi_{672} - h_{2365} + \\ &\quad + h_{2374} - h_{2473} - h_{2563} + h_{3463} + 2h_{3472} + h_{3573} - h_{4565} - h_{4574} + 2h_{5676}), \\ \widetilde{b}_{22} &= \frac{1}{4}(-\psi_{246} + \psi_{257} + \psi_{264} - \psi_{275} + \psi_{347} + \psi_{356} - \psi_{365} - \psi_{374} - h_{2344} - \\ &\quad - h_{2355} - h_{2366} - h_{2377} + 2h_{2452} + 2h_{2672} + h_{4566} + h_{4577} + h_{4674} + h_{5675}), \\ \widetilde{c}^2_3 &= \frac{1}{4}(\psi_{247} + \psi_{256} - \psi_{265} - \psi_{274} + \psi_{346} - \psi_{357} - \psi_{364} + \psi_{375} + 2\psi_{463} - \\ &\quad - 2\psi_{573} + h_{2453} + h_{2673} - h_{3452} - h_{3672}). \end{aligned}$$

Из вышеприведенных рассуждений выводится

Лемма. *Коэффициенты Γ^k_{ij}, b_{ij}, c^j_i можно выразить через формы h_{ijk}, ψ_{ij} из линейной системы уравнений* (1).

Теорема 1. *Дифференциальные формы ψ и h, определенные в окрестности U произвольной выбранной точки M, удовлетворяющие структурным уравнениям и содержащиеся в орбите группы $GL(6)$, определяют погружение f окрестности точки M, образ которого является гиперповерхностью с положительно или отрицательно определенной нормалью. Это погружение определяется с точностью до изоморфизма $F(x) = Ax + a$, где $A \in G_2^n$, $x, a \in V = R^7$.*

Доказательство. Согласно лемме, зная дифференциальные формы ψ и h на U, содержащиеся в орбите пары (h^0, ψ^0), можно вычислить коэфициенты Γ^k_{ij}, b_{ij}, c^j_i. Условия интегрируемости системы (1) совпадают с условиями Гаусса и Петерсона–Кодацци на коэфициенты Γ^k_{ij}, b_{ij}, c^j_i и возникают как результат приравнивания смешанных производных. Таким образом, если выполняются условия интегрируемости системы, то согласно теореме Фробениуса определяется погружение $f : U \to V$ (определенное в окрестности произвольной выбранной точки $M \in U$) с точностью до изоморфизма.

Таким образом, доказывается аналог теоремы Бонне для шестимерных гиперповерхностей: две внешние дифференциальные формы второй и третьей степени определяют погружение шестимерного многообразия в семимерное пространство с псевдооктавной структурой.

Погружение гиперповерхностей в конформно-октавное пространство

В конформно-октавном пространстве векторное $[\ ,\ ]$ и скалярное $\langle\ ,\ \rangle$ произведения определены с точностью до скалярного множителя.

Пусть S — произвольная гиперповерхность конформно-октавного пространства, U — открытое множество в R^6 и $\mathbf{r}=\mathbf{r}(U)$ — погружение такое, что $\mathbf{r}(U)=S$. Тогда $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2,u^3,u^4,u^5,u^6)$ — параметризация поверхности S и $d\mathbf{r}=\sum\limits_{i=1}^{6}\mathbf{r}_{u_i}du_i$.

Как известно, в классической дифференциальной геометрии первая квадратичная форма гиперповерхности определяется в виде $\mathrm{I}=d\mathbf{r}^2$. В конформно-октавном же пространстве скалярное произведение определено с точностью до скалярного множителя λ. Поэтому здесь нельзя сказать, что форма I инвариантна, однако удобно ввести следующую квадратичную форму:

$$\widetilde{\mathrm{I}}=\frac{\mathrm{I}}{\mathbf{n}^2}=\frac{d\mathbf{r}^2}{\mathbf{n}^2}=F_{ii}(du^i)^2+2F_{kj}du^kdu^j;\quad i,j,k=\overline{1,6};\quad k<j,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к гиперповерхности, который однозначно характеризуется условиями

$$\langle\mathbf{r}_{u^i},\mathbf{n}\rangle=0,\quad i=\overline{1,6},\qquad \frac{\sum\limits_{k=1}^{6}\mathbf{r}^2_{u^k}}{\mathbf{n}^2}=1 \tag{3}$$

и выбранной ориентацией гиперповерхности S. Такая форма уже будет инвариантна, т. к. скалярный множитель λ в числителе и знаменателе сократится.

Аналогично определим следующую инвариантную форму:

$$\widetilde{\mathrm{II}}=\frac{\mathrm{II}}{\mathbf{n}^2}=-\frac{\langle d\mathbf{r},d\mathbf{n}\rangle}{\mathbf{n}^2}=M_{ii}(du^i)^2+2M_{kj}du^kdu^j;\quad i,j,k=\overline{1,6};\quad k<j. \tag{4}$$

Также оказывается удобно взять еще одну инвариантную линейную форму

$$\widetilde{\mathrm{IV}}=\frac{\langle d\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle}{\mathbf{n}^2}=K_\alpha du^\alpha;\quad \alpha=\overline{1,6}.$$

Присоединим к каждой точке гиперповерхности S репер $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_7\}$ следующим образом: положим $\mathbf{f}_i=\mathbf{r}_{u^i}$, $i=\overline{1,6}$, а вектор $\mathbf{f}_7=\mathbf{n}$.

Из условий (3) вытекает зависимость между коэффициентами первой квадратичной формы $\widetilde{\mathrm{I}}$

$$\sum_{i=1}^{6}F_{ii}=1.$$

Деривационные формулы принимают следующий вид:

$$d\mathbf{r}=\mathbf{f}_\beta du^\beta;\quad d\mathbf{f}_i=\Gamma^\alpha_{i\beta}\mathbf{f}_\alpha du^\beta,\quad \beta=\overline{1,6},\quad i,\alpha=\overline{1,7}.$$

Итак, $d\mathbf{f}_k=d\mathbf{r}_{u^k}=\sum\limits_{j=1}^{6}\mathbf{r}_{u^ku^j}du^j$, $k=\overline{1,6}$. Так как $\mathbf{r}_{u^iu^j}=\mathbf{r}_{u^ju^i}$, то

$$\Gamma^\alpha_{ij}=\Gamma^\alpha_{ji},\quad i,j=\overline{1,6},\quad \alpha=\overline{1,7}. \tag{5}$$

Кроме того, дифференцируя равенство $\langle\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_7\rangle=0$, $i=\overline{1,6}$, получаем $\langle d\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_7\rangle+\langle\mathbf{f}_i,d\mathbf{f}_7\rangle=0$. Следовательно, $\langle d\mathbf{f}_7,\mathbf{f}_i\rangle=-\langle d\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_7\rangle$, $i=\overline{1,6}$, и

$$\Gamma^j_{7i}=-\Gamma^7_{ji},\quad i,j=\overline{1,6}. \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), подсчитаем количество неизвестных Γ^k_{ij}

$$\underbrace{6\cdot7}_{d\mathbf{f}_1}+\underbrace{5\cdot7}_{d\mathbf{f}_2}+\underbrace{4\cdot7}_{d\mathbf{f}_3}+\underbrace{3\cdot7}_{d\mathbf{f}_4}+\underbrace{2\cdot7}_{d\mathbf{f}_5}+\underbrace{1\cdot7}_{d\mathbf{f}_6}+\underbrace{6}_{d\mathbf{f}_7}=42+35+28+21+14+7+6=153.$$

Поскольку

$$\mathrm{I} = d\mathbf{r}^2 = \sum_{i=1}^{6} \langle \mathbf{r}_{u^i}, \mathbf{r}_{u^i} \rangle + 2 \sum_{i<j} \langle \mathbf{r}_{u^i}, \mathbf{r}_{u^j} \rangle du^i du^j;$$

$$d^2\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{6} \mathbf{r}_{u^i u^j} du^i du^j = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{r}_{u^i u^i} (du^i)^2 + 2 \sum_{i<j} \mathbf{r}_{u^i u^j} du^i du^j;$$

$$\mathrm{II} = \langle d^2\mathbf{r}, \mathbf{f}_7 \rangle = \sum_{i=1}^{6} \langle \mathbf{r}_{u^i u^i}, \mathbf{f}_7 \rangle (du^i)^2 + 2 \sum_{i<j} \langle \mathbf{r}_{u^i u^j}, \mathbf{f}_7 \rangle du^i du^j,$$

то $\frac{\langle \mathbf{r}_{u^i}, \mathbf{r}_{u^j} \rangle}{\mathbf{f}_7^2} = F_{ij}$; $\frac{\langle \mathbf{r}_{u^i u^j}, \mathbf{f}_7 \rangle}{\mathbf{f}_7^2} = M_{ij}$. Имеем

$$\frac{\langle d\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_7 \rangle}{\mathbf{f}_7^2} = \sum_{j=1}^{6} \frac{\langle \mathbf{r}_{u^k u^j}, \mathbf{f}_7 \rangle}{\mathbf{f}_7^2} du^j = \sum_{j=1}^{6} M_{kj} du^j, \quad k = \overline{1,6},$$

где M_{kj} — коэффициенты квадратичной формы $\widetilde{\mathrm{II}}$ (см. (4)). С другой стороны,

$$\frac{\langle d\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_7 \rangle}{\mathbf{f}_7^2} = \sum_{j=1}^{6} \Gamma_{kj}^7 du^j, \quad k = \overline{1,6}.$$

Сравнив правые части двух последних равенств, получим

$$\sum_{j=1}^{6} M_{kj} du^j = \sum_{j=1}^{6} \Gamma_{kj}^7 du^j, \quad k = \overline{1,6}.$$

Приравняв в последнем тождестве коэффициенты при одинаковых du^j, найдем неизвестные

$$\Gamma_{kj}^7 = M_{kj}, \quad k, j = \overline{1,6}, \quad k \leq j.$$

Затем умножив скалярно на $\mathbf{f}_k$ ($k = \overline{1,6}$) равенство $\mathbf{r}_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^\alpha f_\alpha$, где $i \leq j \leq 6$, $\alpha = \overline{1,7}$, получим

$$\langle \mathbf{r}_{u^i u^j}, \mathbf{f}_k \rangle = \Gamma_{ij}^\beta \langle \mathbf{f}_\beta, \mathbf{f}_k \rangle.$$

Разделим это равенство на $\mathbf{f}_7^2$

$$\frac{\langle \mathbf{r}_{u^i u^j}, \mathbf{r}_{u^k} \rangle}{\mathbf{f}_7^2} = \Gamma_{ij}^\beta F_{\beta k}, \quad \beta, k = \overline{1,6}, \quad \beta \leq k.$$

Обозначив

$$\frac{\langle \mathbf{r}_{u^i u^j}, \mathbf{r}_{u^k} \rangle}{\mathbf{f}_7^2} = X_{ij}^k, \quad i, j, k = \overline{1,6}, \quad i \leq j,$$

где $X_{ij}^k = X_{ji}^k$, получим систему из 126 линейных уравнений относительно 126 неизвестных Γ_{ij}^β:

$$X_{ij}^k = \Gamma_{ij}^\beta F_{\beta k}. \tag{7}$$

Таким образом, все Γ_{ij}^β, входящие в систему уравнений (7), выражены через X_{ij}^k и $F_{\beta k}$.

Остается найти X_{ij}^k и Γ_{7j}^7. Для этого рассмотрим линейную форму $\widetilde{\mathrm{IV}}$

$$\frac{\langle d\mathbf{f}_7, \mathbf{f}_7 \rangle}{\mathbf{f}_7^2} = \Gamma_{7\alpha}^7 du^\alpha = K_\alpha du^\alpha, \quad \alpha = \overline{1,6}.$$

Отсюда $\Gamma_{7j}^7 = K_j$, $j = \overline{1,6}$, т. е. найдено еще шесть неизвестных Γ_{ij}^k.

Далее продифференцируем по u^j ($j = \overline{1,6}$) коэффициенты первой квадратичной формы $\frac{\langle \mathbf{r}_{u^i}, \mathbf{r}_{u^k}\rangle}{\mathbf{f}_7^2} = F_{ik}$:

$$\frac{(\langle \mathbf{r}_{u^i u^j}, \mathbf{r}_{u^k}\rangle + \langle \mathbf{r}_{u^i}, \mathbf{r}_{u^k u^j}\rangle)\,\mathbf{f}_7^2 - \langle \mathbf{r}_{u^i}, \mathbf{r}_{u^k}\rangle 2\langle \partial \mathbf{f}_7/\partial u^j, \mathbf{f}_7\rangle}{f_7^4} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial u^j}$$

или

$$\frac{(\langle r_{u^i u^j}, r_{u^k}\rangle + \langle r_{u^i}, r_{u^k u^j}\rangle) f_7^2 - 2\langle r_{u^i}, r_{u^k}\rangle \Gamma_{7j}^7 f_7^2}{f_7^4} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial u^j}.$$

Окончательно имеем $X_{ij}^k + X_{kj}^i - 2F_{ik}\Gamma_{7j}^7 = \frac{\partial F_{ik}}{\partial u^j}$, где $i, j, k = \overline{1,6}$, $X_{ij}^k = X_{ji}^k$, $i \le k$. Обозначив $P_{ij}^k = \frac{\partial F_{ik}}{\partial u^j} + 2F_{ik}\Gamma_{7j}^7$, получим систему 126 линейных уравнений относительно 126 неизвестных X_{ij}^k:

$$X_{ij}^k + X_{kj}^i = P_{ij}^k, \quad \text{где} \quad i, j, k = \overline{1,6}, \quad X_{ij}^k = X_{ji}^k, \quad i \le k.$$

Таким образом, определены все коэффициенты деривационных формул гиперповерхности для произвольной параметризации и справедлива следующая

Теорема 2. *Коэффициенты деривационных формул*

$$d\mathbf{r} = \mathbf{f}_\beta du^\beta,$$
$$d\mathbf{f}_i = \Gamma_{i\beta}^\alpha \mathbf{f}_\alpha du^\beta, \quad \beta = \overline{1,6}, \quad \alpha = \overline{1,7},$$

произвольной гладко параметризованной поверхности однозначно определяются через коэффициенты квадратичных форм $\widetilde{\mathrm{I}} = \frac{d\mathbf{r}^2}{\mathbf{n}^2}$, $\widetilde{\mathrm{II}} = -\frac{\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n}\rangle}{\mathbf{n}^2}$, *коэффициенты линейной формы* $\widetilde{\mathrm{IV}} = \frac{\langle d\mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}{\mathbf{n}^2}$ *и частные производные квадратичной формы* $\widetilde{\mathrm{I}}$.

Литература

1. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли.* – М.: Наука, 1982. – 447 с.
2. Банару М.Б., Кириченко В.Ф. *Эрмитова геометрия* 6*-мерных подмногообразий алгебры Кэли* // УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 205.
3. Fernandez M., Gray A. *Riemannian manifolds with structure group* G_2 // Ann. di Math. Pura ed Appl. – 1982. – № 32. – P. 19–45.
4. Friedrich Th., Kath I., Semmelmann U. *On nearly parallel* G_2*-structures* // J. Geom. Phys. – 1997. – V. 23. – № 3–4. – P. 259–286.
5. Желваков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. *Кольца близкие к ассоциативным.* – М.: Наука, 1978. – 431 с.
6. Grushko P.Ja., Kouzoub N.M. *About pseudohermitean submanifolds in octonion space* // Proceedings of the fourth International Mathematical Symposium “Symbolic computations. New horizons”. Japan, Tokyo, 2001. – P. 269–276.

Иркутский государственный университет

Иркутский государственный технический университет

Иркутский государственный педагогический университет

Поступила
01.06.2004