И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 517.977

Ю.А. КОНЯЕВ, Ю.Г. МАРТЫНЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрен класс неавтономных дифференциальных уравнений и их систем с полиномиально периодическими коэффициентами вида

$$\dot{x} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)t^{m-k}\Big)x, \quad x(t_0) = x^0, \quad t \geq t_0 > 1, \quad m \geq -1, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A_k(t)$ $(k \geq 0)$ — достаточно гладкие и T-периодические на полуоси $[t_0, +\infty)$ матричные функции, что дополняет известные ранее результаты [1]–[3]. К таким системам приводятся (при постоянных A_k) уравнения гипергеометрического типа

$$p(t)\ddot{x} + q(t)\dot{x} + \lambda x = 0,$$

где $q(t)$ и $p(t)$ — полиномы не выше первой и второй степени соответственно, λ — постоянный параметр, частные их случаи, уравнения Эйри, Бесселя, Эрмита и многие другие.

Для квадратной матрицы A введем обозначения

$$A = \{a_{jk}\}_1^n, \quad \overline{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}, \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A}.$$

Теорема 1. *Задача Коши* (1) *при* $m = -1$ *в случае, когда матрица* A_0 *является постоянной и ее спектр* $\{\lambda_{0j}\}$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \operatorname{Re}\lambda_{0j} \leq 0, \quad j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n},$$

имеет единственное и ограниченное при $t \to +\infty$ *решение* $x(t)$, *представимое в виде*

$$x(t) = S_0 H_{(N)}(t) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} s^{-1}\Lambda_{(N)}(s)ds\Big)C + O(t^{-N-2}),$$

где $S_0^{-1}A_0S_0 = \Lambda_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\}$, *а матрицы*

$$H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=1}^{N} \overline{\overline{H}}_k(t)t^{-k}, \quad \Lambda_{(N)} = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{N} \Lambda_k(t)t^{-k}$$

с T-*периодическими коэффициентами однозначно определяются в ходе доказательства.*

Идея доказательства состоит в том, что при достаточно больших $t \gg 1$ замена $x = S_0H_{(N)}(t)z$ в системе (1) приводит к системе с почти диагональной матрицей

$$t\dot{z} = \big(\Lambda_{(N)}(t) + t^{-N-1}R(t)\big)z \equiv Q(t)z, \quad z(t_0) = z^0, \quad \|R(t)\| \leq C, \quad t \geq t_0 > 0.$$

При этом матрицы $H_{(N)}(t)$ и $Q(t)$ связаны соотношением

$$t\dot{H}_{(N)}(t) = B(t)H_{(N)}(t) - H_{(N)}(t)Q(t) \quad \Big(B(t) = S_0^{-1}A(t)S_0 = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)t^{-k}\Big),$$

откуда однозначно определяются все диагональные $\Lambda_k(t)$ и “бездиагональные” $\overline{\overline{H}}_k(t)$-$T$-периодические матрицы.

Теорема 2. *Если в системе* (1) *при $m = 0$ матрица A_0 является постоянной и ее спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ удовлетворяет неравенствам $\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i\frac{2\pi}{T}q$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\operatorname{Re}\lambda_{0j} \leq -\delta_0 < 0$, $j \neq k$, $j,k = \overline{1,n}$, то задача Коши* (1) *имеет единственное и ограниченное при $t \to +\infty$ решение*

$$x(t) = S_0 H_{(N)}(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda_{(N)}(s)ds\right)C + O(t^{-N-1}),$$

где матрицы S_0, $H_{(N)}(t)$, $\Lambda_{(N)}(t)$ определены методами теоремы 1.

Замечание 1. В условиях теоремы 1 тривиальное решение системы (1) устойчиво при $\operatorname{Re}\Lambda_{0j} \leq 0$ и асимптотически устойчиво при $\operatorname{Re}\Lambda_{0j} \leq -\delta_0 < 0$.

Замечание 2. Аналог теоремы 2 имеет место и в так называемом критическом случае, когда матрица A_0 имеет точки спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ на мнимой оси, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_{1j} \leq 0$, $j = \overline{1,n}$, а спектр $\{\lambda_{1j}(t)\}$ вспомогательной матрицы $\Lambda_1(t) = \overline{B}_1(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda_{1j}(t) \leq \delta_1(t), \quad a_1(t) = \int_{t_0}^{t} \delta_1(s)ds \to -\infty, \quad t \to +\infty, \quad a_1(t) \leq C, \quad t \geq t_0.$$

Тривиальное решение системы (1) будет в первом случае асимптотически устойчиво, а во втором устойчиво.

Замечание 3. Если матрица A_0 имеет кратные точки спектра и эквивалентна некоторой жордановой матрице, то имеют место аналоги теорем 1 или 2 после применения срезающего преобразования, описанного, в частности, в [4].

Теорема 3. *Если система* (1) *при $m \geq 1$ имеет матрицу $A_0(t)$, точки спектра $\{\lambda_{1j}(t)\}_1^n$ которой удовлетворяют неравенствам*

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_{0j}(t) \leq \delta_0(t), \quad a_0(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \delta_0(s)ds \to -\infty, \quad t \to +\infty,$$

то задача Коши (1) *имеет единственное и ограниченное при $t \to +\infty$ решение, представимое в виде*

$$x(t) = S_0(t) H_{(N)}(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} s^m \Lambda_{(N)}(s)ds\right)C + O(t^{-N-1}),$$

где $N \geq m \geq 1$, $S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t) = \Lambda_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0n}(t)\}$, а матрицы $H_{(N)}(t) = E + \sum\limits_{k=1}^{N} \overline{\overline{H}}_k(t)t^{-k}$ и $\Lambda_{(N)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} \Lambda_k(t)t^{-k}$ с T-периодическими коэффициентами однозначно определяются по указанному выше алгоритму.

Замечание 4. Аналог теоремы 3 имеет место и в так называемом критическом случае, когда T-периодическая матрица $\Lambda_0(t)$ имеет точки спектра на мнимой оси, т. е.

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_{0j}(t) \leq 0, \quad j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad t \geq t_0 > 0,$$

а спектр $\{\lambda_{1j}(t)\}_1^n$ вспомогательной T-периодической матрицы $\Lambda_1(t) = \overline{B}_1(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda_{1j}(t) \leq \delta_1(t), \quad j = \overline{1,n}; \quad a_1(t) = \int_{t_0}^{t} \delta_1(s)ds \to -\infty, \quad t \to +\infty.$$

Тривиальное решение системы (1) при $m \geq 1$ будет в этом случае асимптотически устойчиво.

Новый метод может быть применен для анализа поведения некоторых специальных функций (являющихся частным случаем функций гипергеометрического типа при $t \to +\infty$).

Уравнение Эйри $\ddot{x} + tx = 0$ может быть записано после замены $t = \tau^2$ и использования срезающего преобразования $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{smallmatrix}\right) q$, $y = (x, \dot{x})^T$, в векторной форме

$$\frac{dq}{d\tau} = \Bigl(\sum_{k=0}^{3} P_k \tau^{2-k}\Bigr) q \equiv P(\tau) q \quad \left(P_0 = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = P_2 = 0, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right), \tag{2}$$

когда применима теорема 3. При этом замена

$$q = S_0 H_{(6)}(\tau) z \quad \left(S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\right)$$

позволяет преобразовать систему (2) к виду с почти диагональной матрицей

$$\frac{dz}{d\tau} = \Bigl(\sum_{k=0}^{6} \Lambda_k \tau^{2-k} + O(\tau^{-5})\Bigr) z,$$

где $\Lambda_q = \overline{\overline{H}}_q = 0$, $q = 1, 2, 4, 5$,

$$\Lambda_3 = -\frac{1}{2} E, \quad \overline{\overline{H}}_3 = \frac{i}{8} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_6 = \frac{i}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{H}}_6 = \frac{3}{32} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что позволяет в итоге получить асимптотику решений уравнения Эйри при $t \to +\infty$

$$x = t^{-1/4} e^{\pm i \frac{2}{3} t^{3/2}} \Bigl(1 \pm \frac{7}{48} t^{-3/2} + \frac{235}{2632} t^{-3} + o(t^{-3})\Bigr).$$

Уравнение Бесселя

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \Bigl(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\Bigr) x = 0 \tag{3}$$

также может быть записано в векторной форме $\dot{y} = \Bigl(\sum\limits_{k=0}^{2} A_k t^{-k}\Bigr) y \equiv A(t) y$, $y = (x, \dot{x})^T$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица Λ_0 имеет простой спектр, то замена $y = S_0 \Bigl(E + \sum\limits_{k=1}^{2} \overline{\overline{H}}_k t^{-k}\Bigr) z$, $S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$, позволяет перейти к системе с почти диагональной матрицей

$$\dot{z} = \Bigl(\sum_{k=0} 0^2 \Lambda_k t^{-k} + o(t^{-3})\Bigr) z, \tag{4}$$

где

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = -\frac{1}{2} E, \quad \overline{\overline{H}}_1 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 = i \frac{4\nu^2 + 1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{H}}_2 = \frac{2\nu^2 + 1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это в силу теоремы 2 обеспечивает существование единственного и ограниченного при $t \to +\infty$ решения системы (4) и решений уравнения Бесселя (3), позволяя получить при $t \to +\infty$ их асимптотическое представление

$$x = t^{-1/2} e^{\pm it} \Bigl(1 \pm i \frac{4\nu^2 + 9}{8t} - \frac{\nu^2}{4t^2} + o(t^{-2})\Bigr).$$

Уравнение Эрмита $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2\nu x = 0$ также может быть записано в векторной форме

$$\dot{y} = \Big(\sum_{k=0}^{1} A_k t^{1-k}\Big) y \equiv A(t) y \quad \left(A_0 = \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \;\; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\nu & 0 \end{pmatrix}, \;\; y = (x, \dot{x})^T\right).$$

При этом структура спектра матрицы Λ_0 указывает на возможность существования неограниченного при $t \to +\infty$ решения. После невырожденного при достаточно больших $t \geq t_0 > 0$ преобразования $y = \Big(E + \sum\limits_{k=1}^{3} \overline{\overline{H}}_k t^{-k}\Big) z$ получим для анализа систему с почти диагональной матрицей

$$\dot{z} = \Big(\sum_{k=0}^{3} \Lambda_k t^{1-k} + o(t^{-3})\Big) z, \quad \Lambda_1 = \Lambda_3 = \overline{\overline{H}}_2 = O,$$

$$\overline{\overline{H}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ \nu & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & -\nu \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{H}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}25(\nu - 1) \\ -0{,}5\nu(\nu + 1) & 0 \end{pmatrix},$$

что позволяет в итоге получить при $t \to +\infty$ асимптотическое представление общего решения уравнения Эрмита

$$x = C_1\big(1 + o(t^{-2})\big) t^{\nu} + C_2\big(0{,}5 t^{-1} + o(t^{-2})\big) t^{-\nu} e^{t^2}$$

(здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные).

Литература

1. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. *Основы теории специальных функций.* – М.: Наука, 1974. – 304 с.
4. Коняев Ю.А. *Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений* // Матем. сб. – 1993. – Т. 194. – № 12. – С. 133–144.

Российский университет
Дружбы народов

Поступила
28.03.2003