Известия вузов. Математика
2008, 4 (551), с. 85–89

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
email: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

О.С. Германов

ВЕЙЛЕВО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ПОЛЕ КОНУСОВ В ТРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Аннотация. Изучаются трехмерные римановы пространства и пространства Вейля, уравнения геодезических линий которых допускают первый интеграл 2-го порядка. В специальной системе координат получены объекты, полностью определяющие как связность этих пространств, так и сами интегралы.

Ключевые слова: первый интеграл дифференциального уравнения, геодезические линии, конус направлений, геодезическое поле направлений, риманово пространство, пространство Вейля.

УДК: 514.764

1. Работа посвящена построению первых интегралов 2-го порядка дифференциальных уравнений геодезических линий трехмерных римановых пространств и пространств Вейля. Наличие интеграла в этих пространствах равносильно существованию в их связностях геодезических полей конусов направлений [1] — векторных полей X^i $(i, j, k = \overline{1, n})$, определенных с помощью невырожденного симметрического тензорного поля a_{ij} уравнением

$$a_{ij}X^iX^j = 0, \tag{1}$$

в котором тензор поля удовлетворяет в данной связности вместе с векторным полем M_k условиям $\nabla_{(k}a_{ij)} = M_{(k}a_{ij)}$ (∇_k — символ ковариантного дифференцирования, скобки обозначают симметрирование по индексам, содержащимся в них).

Если связность риманова и $M_k = 0$, то соотношение $(a_{ij}dx^idx^j)(ds^2)^{-1} = \text{const}$ (x^i — координаты пространства, s — аффинный параметр геодезической) является первым квадратичным интегралом геодезических ([2], с. 209); если же рассматриваемая связность является связностью Вейля ([3], с. 153) с основным тензором g_{ij}, дополнительным вектором ω_k и $M_k = 2\omega_k$, то соотношение $(a_{ij}dx^idx^j){:}(g_{ij}dx^idx^j)^{-1} = \text{const}$ представляет собой первый дробно-квадратичный интеграл [4], порожденный тензорами a_{ij} (и g_{ij}).

В работе автора [5] рассмотрены специальные вейлево-геодезические поля конусов направлений в римановом пространстве V_3. А именно, изучены поля направлений (1), тензор которых в данной связности удовлетворяет вместе с некоторыми векторными полями M_k и R_k условию

$$\nabla_{(k}a_{ij)} = M_{(k}a_{ij)} + R_{(k}g_{ij)}. \tag{2}$$

Получена классификация таких пространств, проведенная по типам корней уравнения

$$|a_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0. \tag{3}$$

Поступила 17.05.2007

Специализация поля состоит в том [5], что векторные пространства, натянутые на собственные векторы, соответствующие различным корням (3), имеют максимальную размерность, неизотропны, а их поля голономны.

2. Имея риманову связность, допускающую поле конусов (1), (2), легко построить связность, геодезические которой допускают первый квадратичный интеграл. Для этого надо потребовать, чтобы $M_k = R_k = 0$.

Так же можно построить и связность Вейля, геодезические которой допускают дробно-квадратичный интеграл: считая, что (2) задано в W_n, потребовать, чтобы $M_k^W = 2\omega_k$ и $R_k^W = 0$ (знаком W отмечены векторы поля W_n). Однако есть еще один способ ее построения. Если вейлево-геодезическое поле конусов существует в $W_n(g_{ij}, \omega_k)$, то в римановом пространстве $V_n(g_{ij})$ также существует вейлево-геодезическое поле конусов с дополнительными векторами $M_k = M_k^W - 4\omega_k$, $R_k = R_k^W + 2\omega_i g^{ij} a_{jk}$, поэтому пара (g_{ij}, ω_k) определит искомую связность, если g_{ij} — метрический тензор пространства V_n, допускающего поле конусов (1), (2), а ω_k — решение уравнений (следующих из условий: $M_k^W = 2\omega_k$, $R_k^W = 0$) $R_k = 2\omega_i g^{ij} a_{jk}$.

3. Перейдем к исследованию полученных уравнений в V_3.

Классификация V_3, допускающих существование специального поля (1), (2), получена в [5]. При этом использовалась такая система координат, в которой метрическая форма V_3 и форма, определяющая это поле, приводятся соответственно к виду

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} g_i(x^k)(dx^i)^2, \tag{4}$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = a_1(dx^1)^2 + 2a_{12}dx^1dx^2 + a_2(dx^2)^2 + a_3(dx^3)^2, \quad a_i = a_{ii}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Возможность представления (4) показана в [6]. Представление (5) является следствием специализации поля и характера корней (3). Поскольку тензор поля определен с точностью до функционального множителя, а (2) инвариантно относительно его нормирования, то можно считать, что $a_3 = \lambda_3 g_3$, где λ_3 — действительный корень (3). (Более того, нормируя a_{ij}, можно добиться, что $\lambda_3 = 1$.) Подставив λ_3 и a_3 в (3), приходим к (5).

Исследование (3) во введенных координатах дает [5]

$$\begin{aligned} &a_{12} = m_3^2 b g_1 g_2, \quad a_3 = \lambda_3 g_3, \quad a_1 = U_1 g_1, \quad a_2 = U_2 g_2, \quad U_i = \lambda_3 + m_3^2 g_i \nu_i, \\ &R_i = m_i^2 \partial_i \frac{U_i}{m_i^2} + m_3^2 b \partial_j g_i, \quad i,j = 1,2, \quad i \neq j, \quad R_3 = m_3^2 \partial_3 \frac{\lambda_3}{m_3^2}, \quad M_i = \partial_i \ln m_i^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$, m_i — произвольные функции координат, $b \neq 0$, ν_1, ν_2 — произвольные функции x^1, x^2; λ_3 — действительный корень (3). В дальнейшем будем считать, не отмечая это особо, что тензор поля (1), (2) нормирован так, что $\lambda_3 = 1$.

Классификация V_3, допускающих поле (2), порождается некоторыми соотношениями между функциями m_i, b, ν_1, ν_2. В [5] показано, что существует семь типов таких пространств, причем в четырех из них вектор поля M_k градиентен (и, следовательно, градиентен и ω_k), поэтому при построении W_3 с дробно-квадратичным интегралом геодезических следует рассмотреть лишь три случая (IV, VI и VII из [5]).

Расписав условия $R_k = 2\omega_i g^{ij} a_{jk}$, с учетом (6) получим

$$\partial_2(m_2^2 g_1) = 0, \quad \mu_1 b \partial_1(m_1^2 g_2) + \partial_2(m_3^2 \nu g_2) = 0, \quad \mu_1 = (m_3 m_1^{-1})^2. \tag{7}$$

IV. $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \nu \neq 0$, $\partial_2(\mu_2\nu) \neq 0$. При этом [5]

$$\begin{aligned} &\mu_2\nu = (kx^2 + d), \quad \mu_2 b = k[(\ln\varphi)']^{-1}, \quad m_1^4 = F_1 k^2 p^{-1}[(\ln\varphi)']^{-2} m_2^4, \quad g_1 = F_1 g_3, \\ &W = \varphi(kx^2 + d)^{-1}, \quad g_2 = (q_1 W + q_2 W^{-1})^{-1}\varphi^{-1} W g_3, \quad F_1 = -\varphi'^2[4(k^2 q_2\varphi + q_3\varphi^2)]^{-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

где g_3, m_i — произвольные функции координат, $b(x^1, x^2)$, $p(x^2, x^3)$, $\varphi(x^1)$, $q_i(x^3)$, $i = \overline{1,3}$, — произвольные функции указанных переменных, $k \neq 0$, d — постоянные величины.

Из (7) выводим $m_i^2 g_3 = A_i(x^j, x^3)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, где A_i — произвольные функции указанных переменных такие, что $A_2^2 = -4q(q_2\varphi^{-1} + q_3 k^{-2})$, $A_1^2 = qp^{-1}$, где q — некоторая функция x^3. Таким образом, $m_3^2 b = k\varphi A_2(\varphi' g_3)^{-1}$ и

$$M_i = \delta_i^3 \partial_3 \ln|q(q_2\varphi^{-1} + q_3 k^{-2})| - \partial_i \ln|g_3|. \tag{9}$$

VI. $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \nu \neq 0$, $\partial_2(\mu_2\nu) = \partial_1(\mu_1 b) = 0$. При этом, как показано в [5], для построения W_3, уравнения геодезических которых допускают первый интеграл, (7) надо рассматривать вместе с условием $\partial_1(\nu b^{-1}) = (b\nu^{-1})^2\partial_2[(\nu b^{-1})^2 g_1 g_2^{-1}]$.

Первое из (7) дает $M_i = \delta_i^1 \partial_i \ln|\nu^{-1} b| + \partial_i \ln|A_2 f_2(\nu g_3)^{-1}|$, а второе переписывается так $b\partial_1 z + \nu\partial_2 z = -\nu\partial_1(b\nu^{-1})z$, где $z = A_2 f_2 g_2 g_3^{-1}$. Однородность этого уравнения сразу приводит к градиентности поля M_i. Если же оно неоднородно, то его условия интегрируемости ([7], с. 248) требуют, чтобы $b\nu^{-1} = (x^1 + k)\psi(x^2)$, а это вновь означает градиентность M_i.

VII. $\nu_1 = \nu_2 = 0$. При этом [5] $g_i = F_i(x^i, x^3) g_3$, $(\mu_i b)^2 F_i = A_i(x^j, x^3)$ $(i = 1, 2)$, где g_3, m_3 — произвольные функции координат, F_i, A_i, $b(x^1, x^2)$ — произвольные функции двух указанных переменных. Из (7) получаем

$$2M_i = \delta_i^3 \partial_i \ln|q(F_1F_2)^{-1}| - \partial_i \ln g_3^2. \tag{10}$$

Итак, существуют два типа пространств Вейля W_3, геодезические линии которых допускают первый интеграл, порожденный специальным полем конусов (1)–(2). *Их основная форма в специальной системе координат имеет вид* (3), *а дополнительный вектор $2\omega_k = -M_k$, где*

I. g_1, g_2 *имеют вид* (8), M_k — (10), $W = \varphi(kx^2 + d)^{-1}$;

II. $g_1 = F_1 g_3$, $g_2 = F_2 g_3$, *а* M_i *имеет вид* (10) ($F_1(x^1, x^3)$, $F_2(x^2, x^3)$, $\varphi(x^1)$, $q(x^3)$, $q_i(x^3)$, $g_3(x^i)$ $(i = 1, 2, 3)$ — *некоторые функции указанных переменных, $k \neq 0$, d постоянны*).

4. Для построения V_3, уравнения геодезических которых допускают квадратичный интеграл, рассмотрим условия $M_k = R_k = 0$. В силу (6) получаем, что m_i не зависят от x^i и

$$\partial_i(m_3^2 \nu_i g_i) + m_3^2 b \partial_j \nu_i = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \tag{11}$$

A) Характеристическое уравнение имеет один действительный корень кратности 3.

Классификация таких пространств, содержащая три типа, получена в [5]. При этом

$$\nu_1(x^1, x^2)\nu_2(x^1, x^2) = b^2 \neq 0, \quad g_1\nu_1 + g_2\nu_2 = 0. \tag{12}$$

I. $\partial_i(\mu_i\nu_i) \neq 0$, $i = 1, 2$. В этом случае [5]

$$\begin{aligned} &g_i = F_i(W, x^3)[(k_1x^1 + d^1)(k_2x^2 + d_2)]^{-\frac{1}{2}} g_3, \quad W = (k_1x^1 + d_1)(k_2x^2 + d_2)^{-1}, \\ &\mu_i\nu_i = k_i x^i + d_i, \quad \mu_j b = k_j k_i^{-1}(k_i x^i + d_i), \\ &k_i \neq 0, \quad d_i \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2) \ \text{— постоянные величины;} \end{aligned} \tag{13}$$

по i не суммируется, F_i — произвольные функции указанных переменных.

Так как $M_i = 0$, то из (13) следует $(m_i k_i)^2(k_j x^j + d_j) = m_3^2 b k_1 k_2 = k = \text{const} \neq 0$, поэтому из (11) и (12) имеем $k_2(k_1x^1 + d_1)\partial_1 g_3 + k_1(k_2x^2 + d_2)\partial_2 g_3 = 0$, $g_3 = F(W, x^3)$ и $F_2 = -(k_2 k_1^{-1} W)^2 F_1$.

II. $\partial_1(\mu_1\nu_1)=0$, $\partial_2(\mu_2\nu_2)\neq 0$. При этом [5]

$$g_1=F_1(W,x^3)g_3,\quad g_2=F_2(W,x^3)\bigl[(kx^1+d_1)\sqrt{kx^2+d_2}\,\bigr]^{-1}g_3,\quad W=(kx^1+d_1)^2(kx^2+d_2)^{-1},$$
$$\mu_2\nu_2=kx^2+d_2,\quad 2\mu_2 b=kx^1+d_1,\quad \mu_1\nu_1\mu_2\nu_2=\mu_1\mu_2 b^2=q,\quad g_3=g_3(x^3),\tag{14}$$

где F_1, F_2 — функции двух указанных переменных, g_3 — одной x^3, $k\neq 0$, d_1, d_2 постоянны.

Так же, как и выше, из (11), (12) и (14) получаем $g_3=F(W,x^3)$, $g_2=-\frac{1}{4}\sqrt{W^3}\,F_1g_3$.

III. $\partial_1(\mu_1\nu_1)=\partial_2(\mu_2\nu_2)=0$. При этом, как показано в [5], $g_i=F_i(W,x^3)g_3$, $i=1,2$, где F_i — произвольные функции двух указанных переменных, g_3 — трех и

а) $W=kk_1x^1-k_2x^2$, $\mu_1\nu_1=k_2q_1$, $\mu_1b=kk_1q_1$, $\mu_2\nu_2=k_1q_2$, $\mu_2bk=k_2q_2$, где q_1, q_2 — произвольные функции x^3; k, k_1, k_2 — отличные от нуля постоянные;

б) $W=d\frac{kx^1+d_1}{kx^2+dd_2}$, $\mu_1\nu_1=\frac{dq_1}{kx^2+dd_2}$, $\mu_1b=\frac{dq_1}{kx^1+d_1}$, $\mu_2\nu_2=\frac{q_2}{kx^1+d_1}$, $\mu_2b=\frac{q_2}{kx^2+dd_2}$, где q_1, q_2 — функции x^3; k, d — не равные нулю постоянные, d_1, d_2 постоянны.

Исследование (11) и (12) дает $g_3=F(W,x^3)$, где F — произвольная функция W, x^3, причем в случае а) $F_2=-k_2^2(kk_1)^{-2}F_1$, а в случае б) $F_2=-(Wd^{-1})^2F_1$.

Б) Характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни.

Если уравнения геодезических $W_n(g_{ij},\omega_k)$ допускают первый интеграл, порожденный полями a_{ij} и g_{ij}, то геодезические $V_n(g_{ij})$ также допускают первый интеграл (порожденный a_{ij}), поэтому для построения таких V_n достаточно, взяв W_n, уравнения геодезических которых допускают первый интеграл, исследовать условия $\omega_k=0$ (случаи IV и VII).

IV. $\partial_2(\mu_2\nu)=0$. Условия $\omega_i=0$ в силу (9) дают, что $g_3=g_3(x^3)$, а $(A_2g_3^{-1})^2$ не зависит от x^3. Дифференцируя полученное по x^3, выводим, что $A_2^2=g_3^2(k_1\varphi^{-1}+d_1)$, $g_3^2=-4qq_2k_1^{-1}$, где $k_1\neq 0$, d_1 постоянны и $d_1=k_1q_3(q_2k^2)^{-1}$, следовательно, $q_3=k^2d_1k_1^{-1}q_2$, $m_1^2=A_1g_3^{-1}$, $m_2^2=k_1\varphi^{-1}+d_1$, $(m_3^2b)^2=(k\varphi\varphi'^{-1})^2(k_1\varphi^{-1}+d_1)$, а g_{ij} по-прежнему имеют вид (8).

VII. $\nu_1=\nu_2=0$. Те же рассуждения с учетом (10) дают $g_3^2=q(kF_1F_2)^{-1}$, где q, F_1, F_2 зависят лишь от x^3, $(m_3^2b)^2=q(F_1F_2g_3^2)^{-1}=k=\mathrm{const}$, $g_i=F_ig_3$, $i=1,2$.

V. $\partial_2(\mu_2\nu)=0$, $\partial_1(\mu_1b)\neq 0$. При этом [5]

$$g_1=\frac{qg_3}{(k_1x^1+d_1)^2},\quad g_2=F_2g_3,\quad W=\frac{(k_1x^1+d_1)^2}{\psi},\quad m_3^2b=(k_1x^1+d_1)m_1^2,\quad m_3^2\nu=\frac{2k_1}{(\ln\psi)'}m_2^2,$$
$$m_1^2=(\ln\psi)'A_2m_2^2,\quad M_i=\partial_i\ln m_3^2|b|-k_1(k_1x^1+d_1)^{-1}\delta_i^1-\partial_2\ln|(\ln\psi)'|\delta_i^2,$$

где m_2, g_3 — функции трех переменных, $F_2(W,x^3)$, $b(x^1,x^2)$, $A_2(x^1,x^3)$ — двух, $q(x^3)$ — одной указанной, $k_1\neq 0$, d постоянны, а функция $\psi=e^{k_2x^2+d_2}$ (и при этом $F_2=F_2(x^3)$) или $\psi=[(1-k)(k_2x^2+d_2)]^{(1-k)^{-1}}$ (и тогда $F_2=q_1(x^3)W^{2(k-1)}$), $k\neq 1$, $k_2\neq 0$, d постоянны.

Условия $M_i=0$ дают, что в первом случае $m_1^2=dk_2$, $m_2^2=dA_2^{-1}(x^1,x^3)$, $d=\mathrm{const}\neq 0$, $m_3^2b=dk_2(k_1x^1+d_1)$, а во втором — $m_1^2=dA_2^{-1}$, $d=\mathrm{const}\neq 0$, $m_2^2=dk_2[(1-k)(k_2x^2+d_2)]^{-1}$, $m_3^2=dk_2(k_1x^1+d_1)[(1-k)(k_2x^2+d_2)]^{-1}$. Из условий $R_k=0$ получаем $g_3=g_3(x^3)$.

VI. $\partial_2(\mu_2\nu)=\partial_1(\mu_1b)=0$. Как показано в [5], $g_1=F_1(x^3)g_3$, $g_2=\widetilde{F}_2(Q,x^3)g_3$, где g_3 — произвольная функция трех переменных, F_1, $\widetilde{F}_2$ — двух указанных, связанные вместе с ν и b условием $\partial_1(\nu b^{-1})=(b\nu^{-1})^2\partial_2[(\nu b^{-1})^2g_1g_2^{-1}]$, Q — функция x^1, x^2 такая, что $b\partial_1Q=-\nu\partial_2Q=1$, и если геодезические $W_3(g_{ij},2\omega_i=-M_i)$ допускают первый интеграл, то имеют место (7). Их изучение дает $m_3^2b=\psi'(x^2)$, $m_3^2\nu=\varphi'(x^1)$, $m_3^2=\Phi(W)\varphi'\psi'$, где φ, ψ — непостоянные функции, Φ — некоторая функция $W=\varphi-\psi$. Из условий $b{:}\nu=\varphi'{:}\psi'$ вытекает $Q=Q(W)$, а из (7) — $g_3=g_3(x^3)$, поэтому $\widetilde{F}_2=F_2(x^3,W)$, и для определения функций φ и ψ получаем $\varphi''=-(\psi'^2\partial_WH+2\psi''H)$, $H=g_1g_2^{-1}$, $2((\psi')^{-1})'=\partial_W\ln\partial_3H$. Это дает $((\psi')^{-1})'=k=\mathrm{const}$. При $k=0$

имеем $\psi = k_2 x^2 + d_2$, $k_2 \neq 0$, d_2 постоянны, $\varphi = -\frac{1}{2}k_2^2 p_1 (x^1)^2 + p_2 x^1 + p_3$, $H = q(x^3) + p_1 W + p_2$, где q — некоторая функция x^3; p_1, p_2, p_3 постоянны. Если же $k \neq 0$, то $\psi = \frac{1}{k}\ln|kx^2 + d_2|$, $d_2 = \mathrm{const}$, $H = qe^{2kW} + k_2 e^{-2kW}$, q — произвольная функция x^3, $k_2 = \mathrm{const}$, а $\varphi = \frac{1}{k}\ln\left|\frac{k_1^2 e^{\pm k k_1 x^1 + d_1} + 4k_2 e^{\mp k k_1 x^1 - d_1}}{2k_1^2}\right|$ ($k_1 \neq 0$, d_1 постоянны) или $\varphi = \frac{1}{k}\ln|\pm 2k\sqrt{-k_2}\,x^1 + d_1|$ ($k_1 = 0$).

Таким образом, существует семь типов трехмерных римановых пространств, уравнения геодезических линий которых допускают первый квадратичный интеграл, порожденный специальным геодезическим полем конусов. Первые три типа выделяются тем, что характеристическое уравнение (3) *имеет только действительный корень кратности* 3*. Строение метрической формы этих* V_3 *описано в случае* А (*типы* I–III)*. Остальные четыре типа характеризуются тем, что уравнение* (3) *имеет простой действительный корень. Строение их метрических форм описано в случае* Б (*типы* IV–VII).

Литература

[1] Шапиро Я.Л. *О некоторых полях геодезических конусов* // ДАН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 1. – С. 6–10.

[2] Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии.* – М.: Ин. лит., 1948. – 348 с.

[3] Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[4] Писарева Н.М. *О дробно-квадратичном интеграле геодезических линий в пространстве аффинной связности* // Матем. сб. – 1955. – Т. 36. – № 1. – С. 169–200.

[5] Германов О.С. *Вейлево-геодезическое поле конусов в трехмерном римановом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 5. – С. 24–32.

[6] Dennis M. De Turk, Dean Yang. *Existence of elastic deformations with prescribed principal strains and triply orthogonal systems* // Duke Math. J. – 1984. – V. 51. – № 2. – P. 243–260.

[7] Эльсгольц А.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – М.: Наука, 1969. – 424 с.

О.С. Германов

доцент, кафедра алгебры и геометрии,

факультет математики, информатики и физики,

Нижегородский государственный педагогический университет,

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 1

E-mail: olmi-nn@nm.ru