

*А.Н. ДАНИЛИН, Е.Б. КУЗНЕЦОВ, В.И. ШАЛАШИЛИН*

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЯВНЫХ АЛГОРИТМОВ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье показано, что при численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка возможно построение простых и экономичных неявных вычислительных алгоритмов пошагового интегрирования без организации трудоемких итерационных процедур, основанных на процессах по типу итераций Ньютона–Рафсона. Предварительно исходная задача должна быть преобразована к новому аргументу — длине интегральной кривой. Такое преобразование осуществляется с использованием уравнения, связывающего исходный аргумент задачи с длиной интегральной кривой. На примере метода линейного ускорения показана схема построения неявного алгоритма с использованием простых итераций для численного решения преобразованной задачи Коши. Сформулированы и доказаны утверждения о вычислительных свойствах итерационного процесса. Эффективность предложенной методологии продемонстрирована на численном решении двух задач. Для них дан сравнительный анализ численных решений, полученных с использованием и без использования параметризации исходных задач. В качестве тестовой рассмотрена задача Лагранжа о распространении звука и о колеблющейся струне. Второй пример связан с моделированием нелинейной динамики раскрытия гибкой стержневой системы, вращающейся свободно в пространстве относительно неподвижной точки.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенной относительно старшей производной,

$$\ddot{u} = f(t, u, \dot{u}), \quad u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = v_0. \quad (1.1)$$

Здесь  $u(t)$  — неизвестная вектор-функция, определяющая перемещение точки в  $n$ -мерном евклидовом пространстве,  $t \in \mathbb{R}$  обозначает время, вектор-функция  $f = f(t, u, v)$ , действующая как оператор  $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , представляет собой ускорение точки в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , зависящее от времени, перемещения и скорости  $v = \dot{u}$ .

Математическое моделирование многих физических явлений сводится к системе уравнений (1.1). В частности, к уравнениям (1.1) приводят прикладные исследования в области численного моделирования динамических процессов, протекающих в конструкциях и сплошных средах (напр., [1]–[6]).

Будем предполагать, что функция  $f \in C^2(D)$ , где  $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  — некоторая область в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Тогда, как известно [7], [8], в области  $D$  существует единственное решение задачи Коши при заданных начальных значениях  $y_0 = [u_0, v_0, t_0]^T \in D$ . Таким образом, при сформулированных условиях через любую точку области  $D$  проходит единственная гладкая интегральная кривая  $y(t) = [u(t), v(t), t]^T$ , удовлетворяющая системе уравнений (1.1), и решение

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 03-01-00071, 01-01-00038).

задачи (1.1) сводится к построению в области  $D$  интегральной кривой, проходящей через точку  $y_0$ .

Для дальнейшего обозначим скалярное произведение функций  $f, g$  и норму функции  $f$  из некоторого евклидова пространства соответственно через  $fg$  и  $\|f\| = (ff)^{1/2}$ .

Целью данной работы является изучение системы уравнений (1.1) с позиции метода продолжения решения по параметру [9] и построение для нее эффективных неявных вычислительных схем решения при некоторой дополнительной замене переменных, называемой наилучшей параметризацией [10]–[15].

## 2. Параметризация уравнений

Введем в области  $D$  вещественную гладкую функцию  $\lambda = \lambda(y) = \lambda(u, v, t) \in \mathbb{C}^3(D)$  и произведем замену независимой переменной  $t$  на параметр  $\lambda$ . При этом важное значение имеет дифференциальная характеристика  $J$  функции  $\lambda$  — ее полная производная по времени вдоль интегральной кривой:  $J(y) = J(u, v, t) = \dot{\lambda}[y(t)]$ . Будем предполагать, что  $J(y) \neq 0$  в области  $D$ . Тогда функция  $\lambda(y)$  может быть восстановлена вдоль некоторой интегральной кривой по ее дифференциальной характеристике в виде определенного интеграла  $\lambda(y) = \lambda_0 + \int_{t_0}^t J[y(t)]dt$ .

Переход к параметру  $\lambda$  позволяет преобразовать систему дифференциальных уравнений (1.1) к автономной системе первого порядка в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$y' = F(y), \quad y(\lambda_0) = y_0, \quad F = J^{-1}[v, f, 1]^T \in \mathbb{C}^2(D). \quad (2.1)$$

Здесь и далее штрих обозначает полную производную по параметру  $\lambda$ .

Функция  $J$  имеет смысл дифференциального нормирующего множителя при переходе от времени  $t$  к параметру  $\lambda$ . В частности, если  $J \equiv 1$ , то  $\lambda = t + (\lambda_0 - t_0)$ . С помощью параметризации можно улучшить метрические свойства правой части уравнения (2.1). В работах [9]–[14] показано, что оптимальное улучшение (т. е. наилучшая параметризация) достигается в случае, когда в качестве  $\lambda$  выбирается длина интегральной кривой в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Этому соответствует уравнение в дифференциальной форме

$$d\lambda^2 = dt^2 + du du + dv dv \quad (2.2)$$

или уравнение для нормирующего множителя

$$J(y) = [1 + vv + f(y)f(y)]^{1/2}. \quad (2.3)$$

Очевидно,  $J^{-1}(y) = t'$ .

Из формул (2.1)–(2.3) следует, что в случае наилучшей параметризации выполняется важное свойство для нормы правой части уравнения (2.1): в области  $D$   $\|F\| = 1$ . Переход к аргументу  $\lambda$  обеспечивает также наилучшую обусловленность линейризованных систем уравнений, получающихся при реализации пошаговых процедур численного построения интегральной кривой задачи (1.1) методом продолжения решения по параметру, и в этом смысле переход к аргументу  $\lambda$  назван наилучшей параметризацией, а аргумент  $\lambda$  — наилучшим.

## 3. Численная схема решения задачи Коши

Для решения задачи (1.1) или (2.1) могут применяться различные приближенные численные схемы интегрирования систем дифференциальных уравнений [16]–[18], например, методы Рунге–Кутты, Адамса–Моултона, Милна и др. Среди них отметим методы второго и третьего порядков точности, которые, как правило, приводят к неявным схемам интегрирования, например, методы центральных разностей, Хоболта, Ньюмарка, Вилсона [2]–[4]. На практике широкое распространение для решения задач вычислительной механики получил метод Вилсона, представляющий собой некоторую модификацию метода линейного ускорения, в котором при интегрировании уравнения (1.1) ускорение  $\ddot{u}$  заменяется кусочно-линейной функцией на малом

интервале времени (шаге интегрирования). Следовательно, скорость  $v = \dot{u}$  и само перемещение  $u$  приближаются соответственно сплайнами второго и третьего порядков.

Рассмотрим обобщение метода линейного ускорения на систему уравнений (2.1), параметризованную наилучшим образом [15], [19].

Для этого представим неизвестный вектор  $y$  в виде  $y = [u, x]^T$ , где  $x = [v, t]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ , т.е. выделим из  $y$  вектор  $x$ , по которому однозначно восстанавливается ускорение  $\ddot{u} = Jv'$ . Соответственно этому представим правую часть уравнения (2.1) в виде  $F = J^{-1}[v, g]^T$ , где  $g = [f, 1]^T$ .

Из (2.2), (2.3) следует равенство  $J^{-2} + u'u' + v'v' = 1$ , откуда, с учетом формулы  $v' = J^{-1}f$ , получаем  $J^{-1} = (1 - u'u')^{1/2}/(1 + ff)^{1/2}$ . Последнее выражение позволяет переписать (2.1) в виде системы дифференциальных уравнений

$$u' = J^{-1}v, \quad (3.1)$$

$$x' = J^{-1}g = (1 - u'u')^{1/2}e(u, x), \quad (3.2)$$

где  $e(u, x) = g/(1 + ff)^{1/2} = g/(gg)^{1/2}$  — единичный вектор в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , коллинеарный вектору  $g$ . В дальнейшем будем использовать первое равенство (3.2) в виде

$$x' = \hat{g},$$

где  $\hat{g} = J^{-1}g = [\hat{f}, J^{-1}]^T$ ,  $\hat{f} = J^{-1}f$ .

Разобьем область изменения параметра интегрирования  $\lambda$  на интервалы точками  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  и приблизим переменную  $x'$  (в параметризованном виде) на каждом интервале  $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$  линейной функцией

$$x'(\lambda) = x'_n + \frac{\tau}{\Delta\lambda_n}(x'_{n+1} - x'_n). \quad (3.3)$$

Здесь  $\tau = \lambda - \lambda_n$ ,  $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$ .

Интегрируя (3.3) по параметру  $\tau$  и учитывая представление  $x = [v, t]^T$ , получим

$$v(\lambda_n + \tau) = v_n + \tau v'_n + \frac{\tau^2}{2\Delta\lambda_n}(v'_{n+1} - v'_n), \quad (3.4)$$

$$t(\lambda_n + \tau) = t_n + \tau t'_n + \frac{\tau^2}{2\Delta\lambda_n}(t'_{n+1} - t'_n). \quad (3.5)$$

Для определения  $u(\lambda_n + \tau)$  обратимся к уравнению (3.1). Заменяя  $J^{-1}$  линейным приближением на основе формулы (3.3) и используя (3.4), получим приближение третьего порядка точности для  $u'(\lambda)$  в виде

$$\begin{aligned} u'(\lambda_n + \tau) &= t'(\lambda_n + \tau)v(\lambda_n + \tau) = J_n^{-1}v_n + \tau \left[ J_n^{-1}v'_n + \frac{v_n}{\Delta\lambda_n}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{\Delta\lambda_n} \left[ \frac{J_n^{-1}}{2}(v'_{n+1} - v'_n) + (J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})v'_n \right] + \frac{\tau^3}{2\Delta\lambda_n^2}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})(v'_{n+1} - v'_n). \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по  $\tau$ , находим приближение и для  $u(\lambda)$

$$\begin{aligned} u(\lambda_n + \tau) &= u_n + \tau J_n^{-1}v_n + \frac{\tau^2}{2} \left[ J_n^{-1}v'_n + \frac{v_n}{\Delta\lambda_n}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) \right] + \\ &+ \frac{\tau^3}{3\Delta\lambda_n} \left[ \frac{J_n^{-1}}{2}(v'_{n+1} - v'_n) + v'_n(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1}) \right] + \frac{\tau^4}{8\Delta\lambda_n^2}(J_{n+1}^{-1} - J_n^{-1})(v'_{n+1} - v'_n). \quad (3.6) \end{aligned}$$

Полагая в (3.4)–(3.6)  $\tau = \Delta\lambda_n$ , получим следующую неявную численную схему для определения величин  $u_{n+1} = u(\lambda_{n+1})$  и  $x_{n+1} = x(\lambda_{n+1})$ :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2}v_n(J_{n+1}^{-1} + J_n^{-1}) + \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{24}[\widehat{f}_{n+1}(3J_{n+1}^{-1} + J_n^{-1}) + \widehat{f}_n(5J_{n+1}^{-1} + 3J_n^{-1})], \quad (3.7)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta\lambda_n}{2}(\widehat{g}_{n+1} + \widehat{g}_n), \quad (3.8)$$

где  $\widehat{f}_n = \widehat{f}(u_n, x_n)$ , начальные значения  $u_0$  и  $x_0 = [v_0, t_0]^T$  известны. Численная схема (3.7), (3.8) имеет второй порядок точности для вектора  $x = [v, t]^T$  и вектора перемещения  $u$ , поскольку аппроксимировали искомый вектор  $x$  сплайном второго порядка, а перемещение — кусочно-гладким полиномом четвертого порядка, имеющим непрерывные производные.

#### 4. Итерационный процесс

Полученная численная схема (3.7), (3.8) является неявной относительно неизвестной  $y_{n+1} = [u_{n+1}, x_{n+1}]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , поэтому на каждом шаге требуется решать систему из  $2n + 1$  нелинейных уравнений. Это решение можно трактовать с позиции теории гладких отображений [8] евклидова пространства  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , поскольку оно является неподвижной точкой для некоторого гладкого диффеоморфного отображения, определяемого итерационной схемой (3.7), (3.8), действующего на компактном множестве в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Чтобы показать последнее, перепишем (3.7), (3.8) в виде

$$y = \Phi(y), \quad \Phi(y) = y_{n+1/2} + \Delta\lambda_n\Psi(y). \quad (4.1)$$

Решением (4.1) является неизвестная  $y_{n+1}$ , а промежуточное значение  $y_{n+1/2}$  и функция  $\Psi(y)$  определяются по данным предыдущего шага соответственно формулами

$$y_{n+1/2} = \begin{bmatrix} u_n + \Delta\lambda_n J_n^{-1} v_n / 2 + (\Delta\lambda_n)^2 J_n^{-1} \widehat{f}_n / 8 \\ x_n + \Delta\lambda_n \widehat{g}_n / 2 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\Psi(y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J^{-1}(y)v_n + \Delta\lambda_n((3J^{-1}(y) + J_n^{-1})\widehat{f}(y) + 5J^{-1}(y)\widehat{f}_n) / 12 \\ \widehat{g}(y) \end{bmatrix}.$$

Тогда решение нелинейного уравнения (4.1) эквивалентно поиску неподвижных точек отображения

$$\widetilde{y} = \Phi(y), \quad \Phi \in \mathcal{C}^2(D), \quad (4.3)$$

действующего в пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

**Лемма.** Для системы (2.1), (2.2), параметризованной наилучшим образом, отображение (4.3) действует в бшаре  $B_{r,A}(y_{n+1/2})$  с центром в точке  $y_{n+1/2} = [u_{n+1/2}, x_{n+1/2}]^T$ , где

$$B_{r,A}(y_{n+1/2}) = \{y = [u, x]^T : \|u - u_{n+1/2}\| \leq A, \|x - x_{n+1/2}\| \leq r\}, \quad (4.4)$$

$$r = r(\Delta\lambda_n) = \Delta\lambda_n/2, \quad A = A(v_n, \Delta\lambda_n) = \frac{\Delta\lambda_n}{2} \left( \|v_n\| + \frac{3}{4}\Delta\lambda_n \right). \quad (4.5)$$

**Доказательство.** Оценим нормы компонентов вектор-функции  $\Psi(y)$ , отвечающих за нормы  $\|u - u_{n+1/2}\|$  и  $\|x - x_{n+1/2}\|$  соответственно. Вычисляя квадрат нормы первой компоненты, имеем

$$\begin{aligned} \|u - u_{n+1/2}\|^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\| J^{-1}(y)v_n + \frac{\Delta\lambda_n}{12}[(3J^{-1}(y) + J_n^{-1})\widehat{f}(y) + 5J^{-1}(y)\widehat{f}_n] \right\|^2 \leq \\ &\leq J^{-2}(y)\|v_n\|^2 + \frac{\Delta\lambda_n}{6}J^{-1}(y)v_n[(3J^{-1}(y) + J_n^{-1})\widehat{f}(y) + 5J^{-1}(y)\widehat{f}_n] + \\ &\quad + \left( \frac{\Delta\lambda_n}{12} \right)^2 \|(3J^{-1}(y) + J_n^{-1})\widehat{f}(y) + 5J^{-1}(y)\widehat{f}_n\|^2. \end{aligned}$$

Из (2.3) следует, что  $J^{-1}(y) = 1/\sqrt{1 + vv + f(y)f(y)} \leq 1$  при любых значениях  $y$ . Используя последнее неравенство, а также неравенство треугольника, далее получим

$$\begin{aligned} \|u - u_{n+1/2}\|^2 &\leq \|v_n\|^2 + \frac{2\Delta\lambda_n}{3}v_n\left(\hat{f} + \frac{5}{4}\hat{f}_n\right) + \frac{(\Delta\lambda_n)^2}{9}\left\|\hat{f} + \frac{5}{4}\hat{f}_n\right\|^2 = \\ &= \left\|v_n + \frac{\Delta\lambda_n}{3}\left(\hat{f} + \frac{5}{4}\hat{f}_n\right)\right\|^2 \leq \left(\|v_n\| + \frac{\Delta\lambda_n}{3}\left\|\hat{f} + \frac{5}{4}\hat{f}_n\right\|\right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $\hat{f} = f/\sqrt{1 + vv + f(y)f(y)} \leq 1$ , то  $\|\hat{f} + 5/4\hat{f}_n\| \leq 9/4$ . Поэтому  $\|u - u_{n+1/2}\| \leq \|v_n\| + \frac{3}{4}\Delta\lambda_n$ . Это позволяет с учетом (4.1), (4.2) дать оценку

$$\|u - u_{n+1/2}\| \leq \frac{\Delta\lambda_n}{2}\left(\|v_n\| + \frac{3}{4}\Delta\lambda_n\right).$$

Используя оценку  $\|\hat{g}\| \leq 1$ ,  $\hat{g} = J^{-1}g = g/\sqrt{vv + g(y)g(y)}$ , для второй компоненты вектор-функции  $\Psi(y)$ , получаем  $\|x - x_{n+1/2}\| \leq \frac{\Delta\lambda_n}{2}$ .

В итоге приходим к формулам (4.4), (4.5).  $\square$

Таким образом, решение нелинейного уравнения (4.1) эквивалентно поиску неподвижных точек дважды непрерывно дифференцируемого отображения  $\tilde{y} = \Phi(y)$ , действующего на компактном множестве (4.4), (4.5).

**Замечание.** Многообразие (4.4), (4.5) является неизотропным в подпространствах векторов  $x$  и  $u$ : для вектора  $x$  имеем оценку, не зависящую явно от предыдущей точки интегрирования  $y_n = [u_n, v_n, t_n]^T$ , а для вектора перемещений  $u$  такая оценка зависит от  $v_n$  явно. Это обстоятельство отражает неравноправность построенной разностной схемы по отношению к скорости и перемещению, что является следствием адаптации решения к аналитическим особенностям рассчитываемой интегральной кривой и связано с наилучшей параметризацией. Однако это свойство не является препятствием для построения эффективных вычислительных процедур.

Ниже доказывается свойство сжимаемости отображения  $\tilde{y} = \Phi(y)$  и формулируется условие, при котором выполняется это свойство.

**Теорема.** *Всегда найдется такое значение величины  $\Delta\lambda_n$ , что решение нелинейного уравнения (4.1) существует, единственно и может быть построено при помощи итерационного процесса*

$$y^{k+1} = \Phi(y^k), \quad y^0 = y_{n+1/2}, \quad (4.6)$$

как предел  $y_{n+1} = y = \lim y^k, k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Рассмотрим отображение (4.3), для которого согласно лемме  $y \in B_{r,A}(y_{n+1/2})$ , и оценим разностное отношение  $\omega(\Phi; y_1, y_2) = \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|/\|y_1 - y_2\|$  для двух произвольных векторов  $y_1, y_2 \in B_{r,A}(y_{n+1/2})$ . Используя (4.1), (4.2), а также то обстоятельство, что  $\Psi \in \mathbb{C}^2(B_{r,A}(y_{n+1/2}))$ , получаем  $\omega(\Phi; y_1, y_2) \leq C$ , где  $C = \Delta\lambda_n M(v_n, \Delta\lambda_n)$ , причем  $M(v_n, \Delta\lambda_n) \rightarrow \|\Psi'(y_n)\|$  при  $\Delta\lambda_n \rightarrow 0$ . Следовательно, при достаточно малом  $\Delta\lambda_n$  константа  $C < 1$ , поскольку является произведением ограниченной и малой величины, и из определения оцениваемого разностного отношения получаем  $\|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\| \leq C\|y_1 - y_2\|, C < 1$ , т.е. отображение (4.3) является сжимающим в баре  $B_{r,A}(y_{n+1/2})$ . Отсюда на основании теоремы о сжимающем отображении, действующем на компактном множестве в полном метрическом пространстве [8], [7], следует существование и единственность решения нелинейного уравнения (4.1).  $\square$

Отметим, что, используя (3.8), можно преобразовать формулу (3.7) к виду, в котором  $u_{n+1}$  выражается через известные значения на предыдущем шаге и значения компонентов вектора  $x = [v, t]^T$  на текущем шаге. Действительно, из (3.9) получим

$$J_{n+1}^{-1} + J_n^{-1} = (2/\Delta\lambda_n)(t_{n+1} - t_n), \quad (4.7)$$

$$\widehat{f}_{n+1} + \widehat{f}_n = (2/\Delta\lambda_n)(v_{n+1} - v_n). \quad (4.8)$$

Подстановка (4.7), (4.8) в (3.7) позволяет переписать формулу (3.7) в виде

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(t_{n+1} - t_n)(v_{n+1} + 5v_n) + \frac{\Delta\lambda_n}{6}[\widehat{f}_n(t_{n+1} - t_n) + J_{n+1}^{-1}(v_{n+1} - v_n)].$$

Наконец, используя вытекающее из (4.7) выражение  $J_{n+1}^{-1} = 2/\Delta\lambda_n(t_{n+1} - t_n) - J_n^{-1}$ , приходим окончательно к формуле

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)(t_{n+1} - t_n) + \frac{\Delta\lambda_n}{6}[\widehat{f}_n(t_{n+1} - t_n) - J_n^{-1}(v_{n+1} - v_n)]. \quad (4.9)$$

В связи с этим выделим вектор  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  и рассмотрим для него проекцию итерационного процесса (4.6) на подпространство  $\mathbb{R}^{n+1}$ . В соответствии с (4.1) и (4.6) введем итерационную функцию  $\phi(x) = x_{n+1/2} + \Delta\lambda_n\widehat{g}(u, x)/2$ , где переменная  $u$  является параметром. Рассмотрим итерационный процесс в подпространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$x^{k+1} = \phi^k = \phi(x^k), \quad x_{n+1} = x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi^k, \quad x^0 = x_n + \Delta\lambda_n\widehat{g}_n/2. \quad (4.10)$$

Будем время от времени (или на каждом шаге, или в конце итерационного процесса на временном слое) определять параметр и по формуле, согласованной с (4.9), вычислять

$$u^{k+1} = u_n + \frac{1}{2}(v^{k+1} + v_n)(t^{k+1} - t_n) + \frac{\Delta\lambda_n}{6}[\widehat{f}_n(t^{k+1} - t_n) - J_n^{-1}(v^{k+1} - v_n)]. \quad (4.11)$$

Итерационный процесс (4.10), (4.11), очевидно, сходится при условии сжимаемости отображения  $\tilde{x} = \phi(x)$ , действующего в шаре  $B_r(x_{n+1/2})$ ,  $r = \Delta\lambda_n/2$ .

## 5. Примеры

Ниже рассмотрены две задачи. Для них дано сопоставление численных решений, полученных с использованием и без использования процедуры наилучшей параметризации. Показана эффективность неявной схемы интегрирования для параметризованных уравнений по сравнению с решением, полученным по той же неявной схеме, но для исходных (непараметризованных) уравнений. Для тестовой задачи Лагранжа решение проводилось для ряда значений шага интегрирования, постоянного по длине некоторого интервала вдоль интегральной кривой, или интервала изменения исходного аргумента задачи. Для второй задачи решение осуществлялось с автоматическим управлением длиной шага интегрирования вдоль интегральной кривой решения: шаг выбирался из условия, чтобы локальная погрешность интегрирования, вычисленная с использованием экстраполяции Ричардсона [16], не превышала предписанной величины  $\delta = 10^{-8}$ . Сходимость итерационного процесса контролировалась по величине погрешности вычислений  $\varepsilon^{(k)} = \max_i (|u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}|/d_i)$ , где  $k$  — номер итерации,  $i$  — номер компоненты вектора решения  $u$ ,  $d_i = \max(|u_i^{(k)}|, 1)$  — коэффициент смешанного масштабирования. Итерации прекращались при условии  $\varepsilon^{(k)} \leq 10^{-10}$ .

## 5.1. Задача Лагранжа о распространении звука и о колеблющейся струне [16]

Упругая среда моделируется как последовательность материальных точек, соединенных невесомой, но упругой нитью. Уравнения, описывающие динамическое поведение механической системы, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= K^2(-2y_1 + y_2), \\ \ddot{y}_2 &= K^2(y_1 - 1y_2 + y_3) \\ &\dots\dots\dots \\ \ddot{y}_n &= K^2(y_{n-1} - 2y_n). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — отклонения точек от положения равновесия,  $K$  — некоторый коэффициент,  $n$  — число материальных точек. Уравнения (5.1) представляют собой систему разностных уравнений, общее решение которой записывается в виде [16]

$$y_i = \sum_{k=1}^n (a_k \cos r_k t + b_k \sin r_k t) \sin \frac{ik\pi}{n+1},$$

где

$$r_k = 2K \sin \frac{\pi k}{2n+2}, \quad a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \sin \frac{jk\pi}{n+1} y_j(0), \quad b_k = \frac{1}{r_k} \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \sin \frac{jk\pi}{n+1} \dot{y}_j(0).$$

Для расчетов было принято:  $n = 19$ ,  $K^2 = 10^5$ . Интегрирование по  $t$  проводилось в интервале  $0 \leq t \leq 5$  с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_i(0) &= 0, \quad i = 1, \dots, 19, \\ \dot{y}_i(0) &= 0, \quad i = 1, \dots, 9, 11, \dots, 19; \quad \dot{y}_{10}(0) = 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 1. На рис. 1а) и 1б) дано сопоставление аналитического решения задачи (сплошная линия изображает перемещение серединной точки струны  $y_{10}$  как функции  $t$ ) и результатов интегрирования параметризованных уравнений (точки) при двух значениях шага  $\Delta\lambda = 0,1; 1,0$ .

Каждому отрезку  $\Delta\lambda$  при пошаговом интегрировании параметризованных уравнений соответствует некоторый отрезок  $\Delta t$ , меняющий свою длину при движении по интегральной кривой. Таким образом, параметризация автоматически адаптирует шаг  $\Delta t$  к характеру изменения интегральной кривой решения. Этот факт отражен на рис. 1в) и 1г), где точками показаны зависимости  $\Delta t(t)$  при интегрировании параметризованных уравнений задачи (5.1), (5.2) с шагом вдоль интегральной кривой  $\Delta\lambda = 0,1$  и  $1,0$  соответственно. Пунктирная линия на рис. 1г) — некоторое пограничное значение шага  $\Delta t$ , выше которого итерации при интегрировании задачи (5.1), (5.2) без использования параметризации расходились. Наконец, на рис. 1д), 1е) показаны числа итераций в зависимости от времени при интегрировании параметризованных уравнений с шагом  $\Delta\lambda = 0,1$  и  $\Delta\lambda = 1,0$  соответственно.

## 5.2. Моделирование динамики раскрытия вращающейся системы, состоящей из шести гибких стержней и одного жесткого стержня

Рассматривается упругая система из 7 последовательно соединенных шарнирами стержней, которая изменяет свою конфигурацию в результате предписанного изменения углов между соседними стержнями. Вид системы показан на рис. 2.

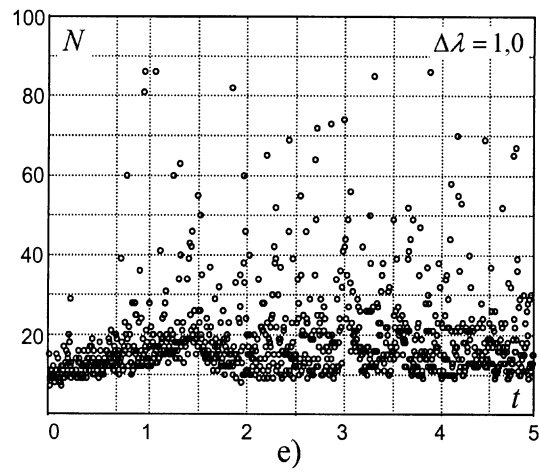
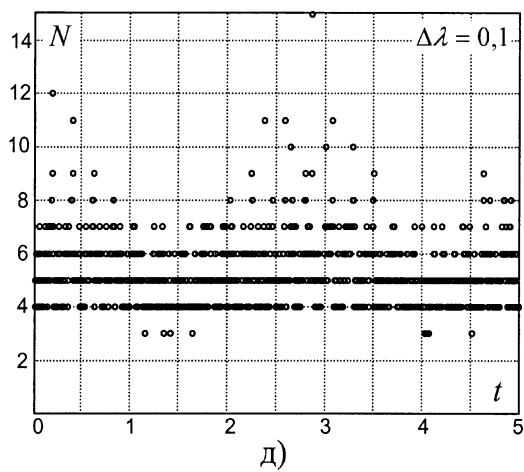
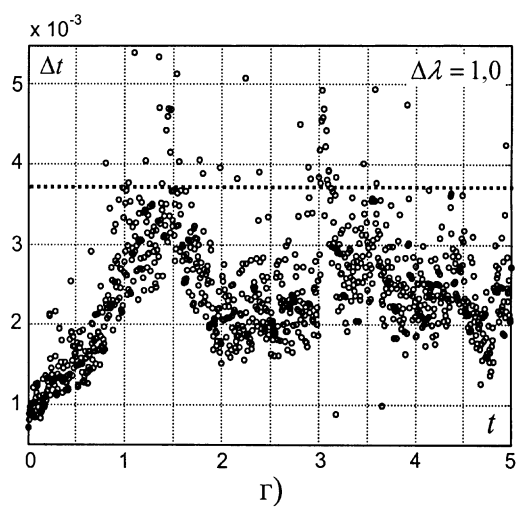
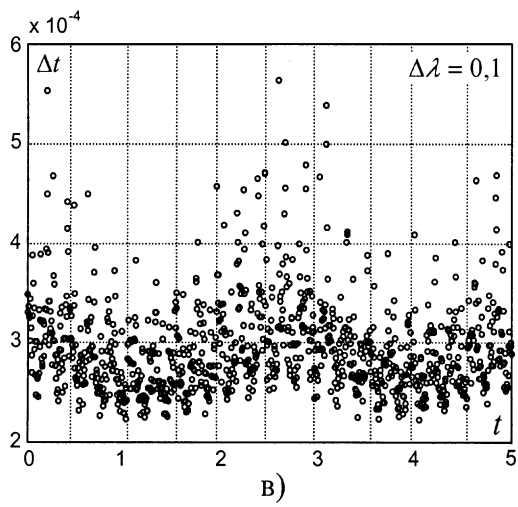
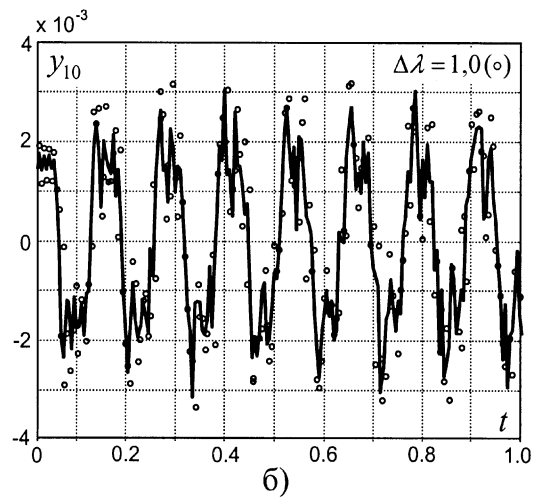
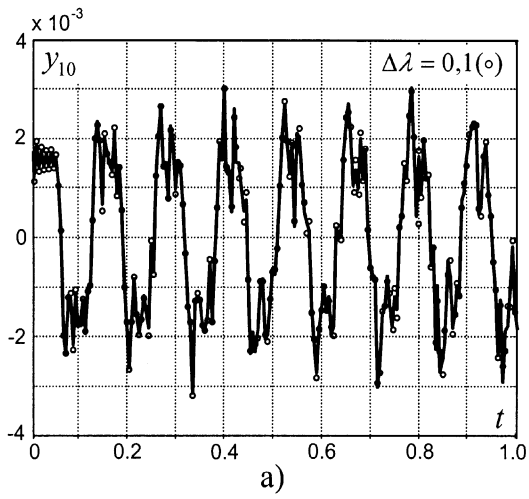


Рис. 1. Результаты расчетов задачи Лагранжа



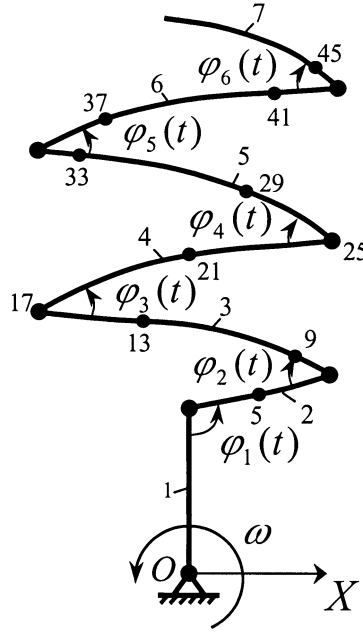


Рис. 2. Схема трансформируемой упругой конструкции

Стержень 1, имитирующий некоторое несущее тело, считается абсолютно жестким. Длина жесткого стержня  $L_1 = 5$  м. Длины гибких стержней (в порядке их следования от жесткого стержня)  $L_2 = 1$  м,  $L_3 = L_4 = L_5 = L_6 = 2$  м,  $L_7 = 1$  м. Поперечные сечения стержней имеют одни и те же геометрические и жесткостные характеристики: площадь поперечного сечения  $F = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>; геометрический момент инерции сечения  $J_z = 8,3333 \cdot 10^{-10}$  м<sup>4</sup>; жесткость на растяжение-сжатие  $EF = 7,2 \cdot 10^6$  Н, изгибная жесткость  $EJ = 60$  Н·м<sup>2</sup>; сдвиговая жесткость  $GF = 2,7692 \cdot 10^6$  Н. Здесь  $E = 7,2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> — модуль Юнга,  $G = 2,7692 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> — модуль сдвига. Считается также, что стержни выполнены из одного материала с массовой плотностью  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>.

В начальном состоянии (до раскрытия) система имеет Т-образный вид, показанный на рис. 4 как начальная конфигурация 1. В этом состоянии гибкие стержни располагаются перпендикулярно жесткому стержню и параллельно глобальной оси  $OX$ . В начальном состоянии углы раскрытия  $\varphi_1(0) = \pi/2$ ,  $\varphi_k(0) = 0$ ,  $k = \overline{2,6}$ . Гибкая часть стержневой системы соединяется с жестким стержнем через шарнир.

Принимается, что до раскрытия система свободно вращается относительно начала координат  $OXY$  с постоянной угловой скоростью  $\omega = \pi/3$  радиан в секунду. Началу интегрирования системы отвечает начало раскрытия системы. В процессе раскрытия углы  $\varphi_k(t)$ ,  $k = \overline{1,6}$ , начинают монотонно увеличиваться по предписанному закону раскрытия во времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \text{при } 0 \leq t \leq 10 \quad & \varphi_1 = (1 + t/10)\pi/2, \quad \varphi_2 = -\varphi_3 = \varphi_4 = -\varphi_5 = \varphi_6 = -(t/10)\pi/2; \\ \text{при } t > 10 \quad & \varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = -\varphi_3 = \varphi_4 = -\varphi_5 = \varphi_6 = -\pi/2. \end{aligned}$$

Задача решалась в конечно-элементной постановке [3], [4], [20]. Силы гравитации и демпфирование колебаний в расчетах не учитывались.

Каждый конечный элемент (рис. 3) связывается с локальной (элементной) системой координат  $oxy$  таким образом, чтобы одна из осей (напр., ось  $ox$ ) проходила через узлы элемента 0, 1. Перемещения, углы поворотов, поступательные и вращательные скорости элементных осей, совершающих движение относительно неподвижной системы координат  $OXY$ , учитываются строго. В качестве функций формы принимаются квазистатические аппроксимации локальных перемещений и углов поворотов сечений стержневого элемента в переменных элементной системы координат. Они строятся на основе решения однородной линейной статической задачи в зависимости от углов поворота узловых сечений элемента  $\theta_0, \theta_1$  как функций времени  $t$ .

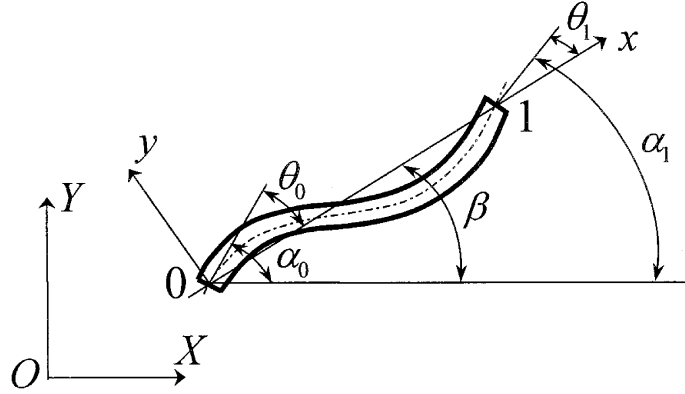


Рис. 3. Стержневой конечный элемент относительно локальной и глобальной систем координат

Стержневой элемент считается растяжимым. Принимается также, что поперечные сечения элементов могут поворачиваться и сдвигаться друг относительно друга, т. е. учитываются деформации осредненного сдвига. Для упрощения вычислений распределенные массовые характеристики стержня (масса, моменты инерции) и нагрузка приводятся к узлам конечно-элементной модели. В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные координаты узлов и углы поворотов поперечных сечений стержня, ассоциированных с этими узлами, относительно системы координат  $OXY$ .

Нелинейные уравнения движения записываются в обобщенных координатах в форме уравнений Лагранжа второго рода вида

$$m_i \ddot{q}_i + \partial U^\Sigma / \partial q_i = Q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $m_i$  —  $i$ -й элемент диагональной матрицы масс;  $U^\Sigma = \sum_{k=1}^n U^{(k)}$  — потенциальная энергия системы, где  $U^{(k)}$  — потенциальная энергия  $k$ -го элемента;  $Q_i$  — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_i$  с номером  $i$ ,  $n$  — число обобщенных координат. В дальнейшем для простоты записи верхние индексы будем опускать, подразумевая, что все обозначения относятся к элементу с номером  $k$ .

Потенциальная энергия элемента при конечных деформациях (с учетом квадратичных членов по углу поворота поперечных сечений) записывается в виде

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{EJ}{l} [(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + 3\kappa(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2] + \frac{N^2 l}{EF} \right\},$$

где продольная сила  $N$ , постоянная по длине элемента, определяется в форме

$$N = EF \left\{ \frac{u_1}{l} + \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \frac{\kappa^2}{5} (\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2 \right] \right\};$$

продольное перемещение узла “1” в направлении оси  $ox$  относительно узла “0” равно  $u_1 = \sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2} - l$ ,  $l$  — длина элемента до деформации;  $\beta$  — угол поворота подвижной элементной системы координат  $oxy$  относительно инерциальной системы координат  $OXY$ ; безразмерный коэффициент  $\kappa = 1/[1 + 12EJ/(l^2 GF_c)]$ .

Упругая часть конструкции была разбита на 40 конечных элементов равной длины  $l = 0,25$  м. Жесткий стержень принимался как один конечный элемент.

Интегрирование проводилось от 0 до 20 с ( $c = \text{сек.}$ ) движения системы. Некоторые результаты интегрирования представлены на рис. 4.

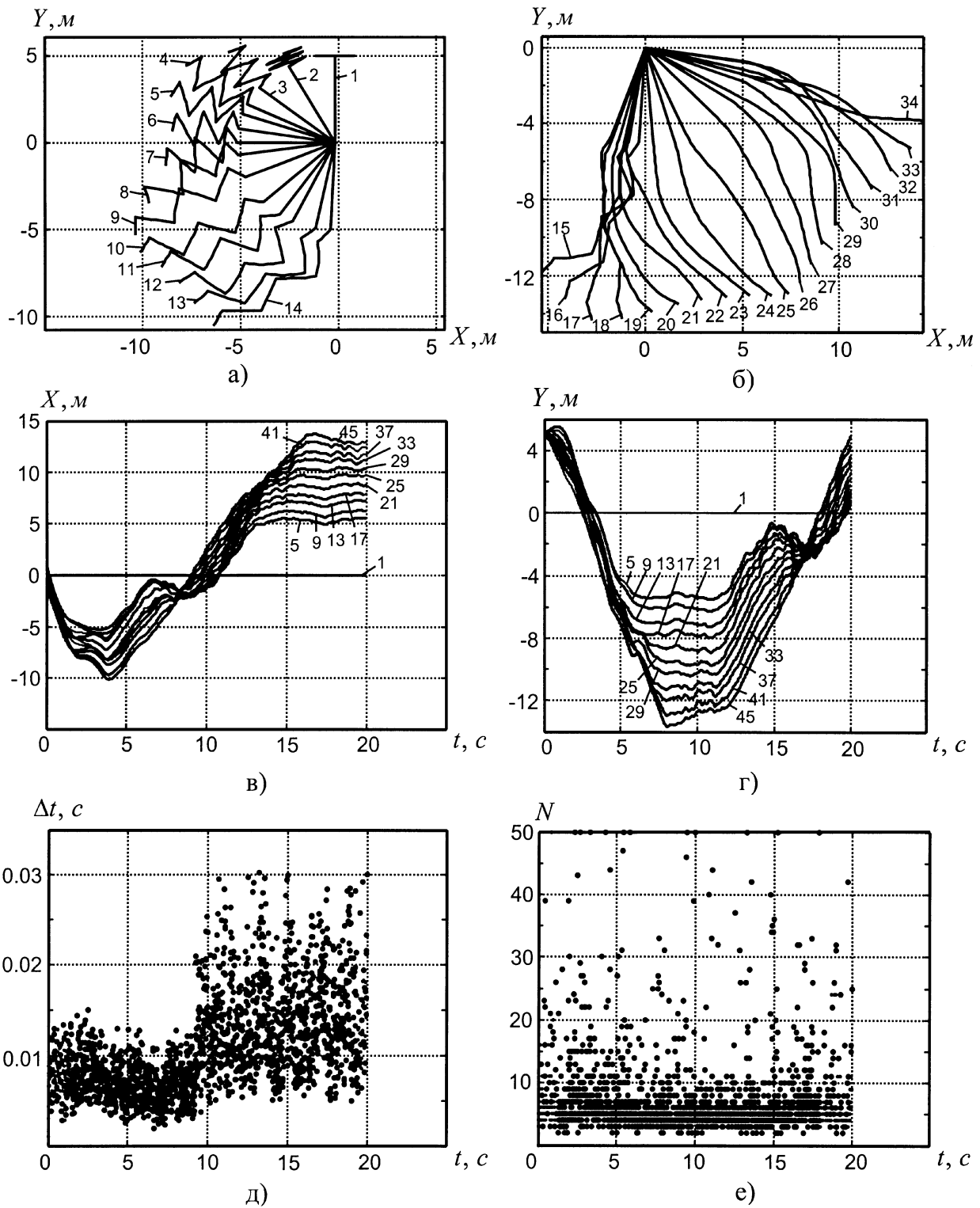


Рис. 4. Результаты расчетов задачи о раскрытии вращающейся стержневой системы

Конфигурации системы в различные моменты времени с шагом  $0,5$  с от  $0$  до  $16,5$  с движения изображены на рис. 4а), 4б). На рис. 4в), 4г) показаны координаты  $X_k, Y_k$  как функции времени  $t$  для выбранного ряда значений номера узлов  $k$ , отмеченных на рис. 2 рядом цифр (5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45). На рис. 4д) показаны значения шага интегрирования вдоль интегральной кривой решения. Средний шаг интегрирования оказался равным примерно  $0,01$ .

Количества итераций, необходимых для получения решения на каждом шаге интегрирования, даны на рис. 4е). Среднее число итераций — 5 или 6 на шаг интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений движения.

Интегрирование уравнений движения по предложенному алгоритму, но без использования процедуры параметризации оказалось практически невозможным: итерационный процесс расходился в начале интегрирования при всех значениях шага, приемлемых для успешного завершения расчета.

## 6. Выводы

В данной работе сформулированы общие утверждения о вычислительных свойствах итерационных процессов, используемых при интегрировании неявными методами систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, параметризованных относительно наилучшего аргумента задачи. Доказаны утверждения о существовании и возможности построения решения с использованием простейших итерационных алгоритмов без вычисления матриц Якоби и решения линеаризованных систем уравнений в процессе итераций (как в методе Ньютона–Рафсона). На численных примерах показана эффективность простого неявного алгоритма (по схеме метода линейного ускорения) для численного решения прикладных задач динамики деформируемых систем.

## Литература

1. Лурье А.И. *Аналитическая механика*. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
2. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. - Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1976. – 528 p.
3. Данилин А.Н. *Нелинейные уравнения движения гибких стержневых систем* // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 1. – С. 177–188.
4. Данилин А.Н. *Плоская задача динамики космических систем с гибкими одномерными элементами* // Вестн. МАИ. – 1995. – Т. 2. – № 1. – С. 61–68.
5. Шклярчук Ф.Н. *Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций* // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – № 1. – С. 161–175.
6. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. *Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether* // Comput. & Structures. – 1999. – V. 72. – P. 141–147.
7. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. – М.: Наука, 1982. – 331 с.
8. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
9. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. *Проблемы нелинейного деформирования*. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
10. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. *Задача Коши для нелинейно деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329. – № 4. – С. 426–428.
11. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. *Задача Коши как задача продолжения решения по параметру* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1993. – Т. 33. – № 12. – С. 1792–1805.
12. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. *Наилучший параметр продолжения решения* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 334. – № 5. – С. 566–568.
13. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. *Задача Коши для механических систем с конечным числом степеней свободы как задача продолжения по наилучшему параметру* // ПММ. – 1994. – Т. 58. – Вып. 6. – С. 14–21.
14. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация*. – М.: Изд-во “Эдиториал УРСС”, 1999. – 222 с.
15. Данилин А.Н., Шалашилин В.И. *О параметризации нелинейных уравнений деформирования твердого тела* // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 1. – С. 82–92.

16. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.* – М.: Мир, 1990. – 512 с.
17. Хайрер Э., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.* – М.: Мир, 1999. – 685 с.
18. Бахвалов Н.С. *Численные методы.* – М.: Наука, 1973. – 631 с.
19. Danilin A.N., Kuznetsov E.B., Shalashilin V.I. *The best parameterization and numerical solution of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations of the second order //* *Funct. Different. Equations.* – 2001. – V. 8. – № 1-2. – P. 141-146.
20. Данилин А.Н., Волков-Богородский Д.Б. *О неявных методах интегрирования параметризованных уравнений нелинейных динамических систем //* *Вестн. МАИ.* – 2001. – Т. 8. – № 2. – С. 40-52.

*Московский авиационный институт  
(государственный технический университет)*

*Поступила  
06.05.2003*