ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.763

С.Е. СТЕПАНОВ

О ГОЛОМОРФНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПОЧТИ СЕМИ-КЕЛЕРОВА МНОГООБРАЗИЯ

1. *Введение.* Теория гармонических отображений многообразий активно развивается в последние десятилетия ([1]; [2], с. 171–191). В рамках этой теории изучаются гармонические отображения почти комплексных многообразий и, в частности, келеровых многообразий (см. там же). Например, давно замечено, что голоморфное отображение келеровых многообразий является гармоническим (см., напр., [3] и [2], с. 172).

В данной статье доказывается ряд утверждений о гармоничности голоморфных отображений почти семи-келерова, квазикелерова и приближенно келерова многообразий.

2. *Определения и результаты.* Напомним, что *почти эрмитовым многообразием* (M, g, J) называется ([4], с. 139) гладкое $2m$-мерное многообразие M с почти комплексной структурой J, которая является гладким сечением расслоения $T^*M \otimes TM$, удовлетворяющее равенству $J^2 = -\operatorname{id}$, и (псевдо)римановой метрикой g, совместимой с почти комплексной структурой J, т. е. $g(J, J) = g$. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита на многообразии M, соответствующую метрике g. Тогда многообразие (M, g, J) называется *почти семи-келеровым* (см., напр., [5]), если $\nabla^* J = 0$ для оператора ∇^* формально сопряженного ∇. Частными видами семи-келерова многообразия (M, g, J) являются *квазикелерово*, *приближенно келерово* и *келерово* многообразия [6], которые выделяются соответствующими условиями $(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$, $(\nabla_X J)X = 0$ и $\nabla J = 0$ для произвольных $X, Y \in C^\infty TM$.

Обратимся теперь к гладким (не обязательно диффеоморфным) отображениям $f: M \to M'$ почти эрмитовых многообразий (M, g, J) и (M', g', J'). Такое отображение $f : M \to M'$ называется *голоморфным* [1] или, по другой терминологии, *почти комплексным* ([4], с. 118), если его дифференциал $f_* : TM \to TM'$ коммутирует с почти комплексными структурами J и J' многообразий M и M' соответственно, т. е.

$$f_* \circ J = J' \circ f_*. \tag{2.1}$$

Для келеровых многообразий M и M' голоморфное отображение $f : M \to M'$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа [1], которое характеризует отображение как гармоническое

$$\operatorname{trace}_g \overline{\nabla} f_* = 0, \tag{2.2}$$

где $\overline{\nabla}$ — естественная связность в расслоении $T^*M \otimes f^{-1}(TM')$, порожденная связностями Леви-Чивита ∇ и ∇' многообразий M и M' соответственно.

Теорема. *Для почти семи-келерова* (*приближенно келерова или квазикелерова*) *многообразия M и приближенно келерова многообразия M' голоморфное отображение $f : M \to M'$ является гармоническим.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00028).

Следствие 1. Голоморфная иммерсия $f : M \to N$ почти эрмитова многообразия (M, g, J) в приближенно келерово многообразие (N, g', J') будет гармонической тогда и только тогда, когда (M, g, J) будет семи-келеровым многообразием.

В работе [7] были получены условия, препятствующие установлению гармонического отображения $f : M \to M'$ римановых многообразий M и M'. Адаптируя их к изучаемому здесь случаю, сформулируем

Следствие 2. Не существует голоморфного отображения $f : M \to M'$ полного почти семи-келерова (приближенно келерова или почти келерова) многообразия M положительной кривизны Риччи на приближенно келерово многообразие M' неположительной секционной кривизны.

3. *Доказательство утверждений.* Рассмотрим окрестность U на M с локальной системой координат $x^1, \dots, x^{2m}$ и окрестность V на M' с локальной системой координат $y^1, \dots, y^{2m}$ такие, что $f(U) \subset V$ для гладкого отображения $f : M \to M'$. Зададим данное отображение $f : M \to M'$ в локальных координатах уравнениями вида $y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^{2m})$, тогда $f_i^\alpha = \partial_i y^\alpha$ будут компонентами матрицы линейного отображения $f_* : TM \to TM'$, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$; $i, j, k, \dots = 1, \dots, 2m$ и $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, 2n$.

Условимся в дальнейшем произвольную функцию $\varphi : M' \to \mathbf{R}$ отождествлять с функцией $\varphi \circ f : M \to \mathbf{R}$ во всех точках $f(M) \subset M'$.

Обозначим через Γ_{ij}^k и ${\Gamma'}_{\gamma\beta}^{\ \alpha}$ коэффициенты связностей Леви-Чивита ∇ и ∇' многообразий M и M' соответственно. Тогда (см., напр., [8])

$$\overline{\nabla}_j f_i^\alpha = \partial_j f_i^\alpha + f_j^\gamma f_i^\beta {\Gamma'}_{\gamma\beta}^{\ \alpha} - f_k^\alpha \Gamma_{ji}^k,$$

где $f_{ji}^\alpha = \overline{\nabla}_j f_i^\alpha = f_{ij}^\alpha$ — компоненты квадратичного дифференциала отображения $f : M \to M'$.

Перепишем равенство (2.1) в координатной форме $f_i^\alpha J_j^i = {J'}_\beta^{\ \alpha} f_j^\beta$, а затем продифференцируем его ковариантным образом. Получим уравнения

$$f_{ik}^\alpha J_j^i + f_i^\alpha (\nabla_k J_j^i) = f_k^\gamma (\nabla'_\gamma J_\beta^\alpha) f_j^\beta + {J'}_\beta^{\ \alpha} f_{jk}^\beta. \tag{3.1}$$

Свернем левую и правую части уравнений (3.1) с контрвариантными компонентами g^{jk} метрического тензора g и в результате придем к следующим уравнениям:

$$f_i^\alpha (\nabla^k J_k^i) = \frac{1}{2} G^{\beta\gamma} (\nabla'_\beta {J'}_\gamma^{\ \alpha} + \nabla'_\gamma {J'}_\beta^{\ \alpha}) + {J'}_\beta^{\ \alpha} (g^{jk} f_{jk}^\beta), \tag{3.2}$$

где $\nabla^k = g^{kj} \nabla_j$ и $G^{\beta\gamma} = g^{jk} f_j^\beta f_k^\gamma$. В случае почти семи-келерова многообразия M и приближенно келерова многообразия M' из уравнений (3.2) следует равенство (2.2).

Доказательство следствия 1. Рассмотрим голоморфную иммерсию $f : M \to M'$. В случае приближенно келерова многообразия M' из (3.2) выводим $f_i^\alpha (\nabla^k J_k^i) = {J'}_\beta^{\ \alpha} (g^{jk} f_{jk}^\beta)$, и при этом $\operatorname{rang} \|f_{*x}\| = 2m$ в каждой точке $x \in M$. Теперь становится очевидным, что условия $\nabla^* J = 0$ и $\operatorname{trace}_g \overline{\nabla} f_* = 0$ следуют одно из другого. $\square$

Доказательство следствия 2. Заметим, что оно вытекает из следствия 13 работы [7], где при аналогичных требованиях на кривизну римановых многообразий M и M' утверждается невозможность существования гармонического отображения $f : M \to M'$. Кроме перечисленных, в условии цитируемого следствия 13 присутствуют требования ориентируемости и компактности многообразия M. При формулировке же следствия 2 мы учитывали, что почти комплексное многообразие ориентируемо ([4], с. 116) и что полное риманово многообразие положительной кривизны Риччи компактно ([9], с. 117). $\square$

Литература

1. Давидов Й., Сергеев А.Г. *Твисторные пространства и гармонические отображения* // УМН. – 1993. – Т. 48. – № 3. – С. 3–96.
2. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. *Минимальные поверхности и проблема Плато.* – М.: Наука, 1987. – 312 с.
3. Lichnerowicz A. *Applications harmoniques et varietes Kahleriannes* // Sympos. Math. Bologna. – 1970. – V. 3. – P. 341–402.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
5. Friedland L., Hsiung Ch.-Ch. *A certain class of almost Hermitian manifolds* // Tensor. N.S. – 1989. – V. 48. – P. 252–263.
6. Gray A., Hervella L.M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* // Ann. Math. Pure Appl. – 1980. – V. 123. – P. 35–58.
7. Stepanov S.E. *On the global theory of some classes of mappings* // Ann. Global Anal. and Geom. – 1995. – V. 13. – № 3. – P. 239–249.
8. Yano K., Ishihara S. *Harmonic and relatively affine mappings* // J. Different. Geom. – 1975. – V. 10. – № 4. – P. 501–509.
9. Милнор Дж. *Теория Морса.* – М.: Мир, 1965. – 184 с.

Владимирский государственный
педагогически институт

Поступила
16.01.2003