ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 517.5:517.956

Р.Г. САЛАХУДИНОВ

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ L^p-НОРМ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ В $\mathbb{R}^n$

1. *Введение.* Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с непустой границей. Классической функцией напряжения $u(x,G)$ называется решение краевой задачи (напр., [1])

$$\begin{aligned} \triangle u &= -1 \quad \text{в } G, \\ u &= 0 \qquad \text{на } \partial G. \end{aligned} \tag{1}$$

В случае, когда G — односвязная область на плоскости, физический функционал

$$\mathrm{P}(G) := 4\int_G u(x,G)\mathrm{d}x$$

называется жесткостью кручения области G. Задача о двусторонней оценке жесткости кручения через один и тот же геометрический параметр области восходит к работам В. Сен-Венана [1], [2]. В классе плоских односвязных областей эта задача была решена в работе [2]. Обозначим через $\mathrm{R}(x,G)$ конформный радиус области G в точке x и через $\rho(x,G)$ — расстояние от точки $x \in G$ до границы области.

Теорема A ([2]). *Пусть G ($G \subset \mathbb{R}^2$) — односвязная область, тогда $\mathrm{P}(G) \sim \mathrm{I}_c(G) \sim \mathrm{I}(G)$, а именно, справедлива цепочка неравенств*

$$\mathrm{I}(G) \le \mathrm{I}_c(G) \le \mathrm{P}(G) \le 16\,\mathrm{I}_c(G) \le 64\,\mathrm{I}(G),$$

где

$$\mathrm{I}_c(G) := \int_G \mathrm{R}^2(x,G)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{I}(G) := \int_G \rho^2(x,G)\mathrm{d}x$$

— конформный и евклидов моменты инерции области G соответственно.

Отметим, что оценка снизу $\mathrm{P}(G)$ является следствием поточечной оценки $\mathrm{R}^2(x,G) \le 4u(x,G)$ (см. [1], с. 160) и не является точной. В [3] было доказано точное изопериметрическое неравенство $3\mathrm{I}_c(G) \le 2\mathrm{P}(G)$, которое достигается только для круга. В классе выпуклых областей константу 64 в теореме A можно заменить на 4, которая тоже является неулучшаемой и достигается для вырожденной области — “иглы” (см. [2]).

Некоторое обобщение теоремы A на n-мерный случай было доказано в [4] для областей, удовлетворяющих строгому условию Харди. Заметим, что это условие не совсем стыкуется с ограниченностью n-мерного евклидового момента инерции (см., напр., обзор [5]), т. е. полный аналог теоремы A для $n \ge 3$ не доказан. Однако в более узком классе выпуклых областей в [4] получен полный аналог теоремы A.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00523.

Теорема B. *Пусть G — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, тогда*

$$\frac{1}{2n}\int_G \rho^2(x,G)\mathrm{d}x \le \int_G u(x,G)\mathrm{d}x \le 6\sqrt{\pi}\frac{\Gamma((n+1)/2)5^{n-1}}{\Gamma((n+2)/2)}\int_G \rho^2(x,G)\mathrm{d}x,$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма функция Эйлера.*

Основным результатом данной статьи является обобщение теоремы A и теоремы B. А именно, в классе выпуклых областей получены двусторонние оценки L^p-нормы функции напряжения.

Заметим вначале, что функция напряжения в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет неравенству $\frac{1}{2n}\rho^2(x,G) \le u(x,G)$. В действительности, справедливо более сильное неравенство с гармоническим радиусом вместо функции расстояния (см. [6]). Отсюда вытекают оценки снизу при $p > 0$

$$\|u(x,G)\|_p \ge \frac{1}{2n}\|\rho^2(x,G)\|_p.$$

Таким образом, для оценок снизу открытым остается вопрос о точной константе и экстремальной области, для которой она достигается. В данной работе будет изучаться вопрос существования оценки сверху для $\|u(x,G)\|_p$.

Теорема 1. *Пусть G — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$ и $p > 1/2$. Тогда*

$$\|u(x,G)\|_p \le C(n,p)\|\rho^2(x,G)\|_p,$$

где

$$C^p(n,p) = \frac{\Gamma(p+n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)}\left[\frac{n2^p\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)}\right]^n\left[\frac{n!np^2}{(p-1/2)^2}\right]^p.$$

Из доказательства, приведенного ниже, следует существование некоторой константы для произвольной области, граница которой лежит между двумя n-мерными эллипсоидами. В этом случае константа в правой части неравенства зависит от отношения полуосей эллипсоидов, т. е. некоторой фиксированной величины для данной области. Отметим, что указанный класс не включается в класс областей, для которых выполняется строгое условие Харди. Таким образом, сформулированный в такой форме результат является новым и при $p = 1$ и $n \ge 3$.

Замечание. Нетрудно видеть, что $C(n,p)$ является строго убывающей функцией от p при фиксированном n, а также, что

$$\lim_{p\to+\infty} C(n,p) = 2^n n! n.$$

Таким образом, для $p_0 \in (1/2, +\infty]$ существует функция $C(n) = C(n,p_0)$ такая, что $\|u(x,G)\|_p \le C(n)\|\rho^2(x,G)\|_p$ для $p \ge p_0$.

Теорема 2. *Пусть G — выпуклая область на плоскости, $0 < p \le 1/2$. Тогда для $1 \le q < 1/(1-p)$*

$$\|u(x,G)\|_p \le 4^{2+1/p}\left[\frac{\|\rho(x,G)\|_{pq}}{pq-q+1}\right]^{\frac{2(p+1)}{p+2/q}}.$$

Следующие две теоремы описывают интегральное поведение функции напряжения для эллипсоидов.

Теорема 3. *Пусть E — n-мерный эллипсоид. Тогда*

$$\int_E |\nabla u(x,E)|^{2p}\mathrm{d}x \le K(n,p)\int_E u^p(x,E)\mathrm{d}x,$$

где

$$K(n,p)=\begin{cases}\dfrac{[2(n-1)!]^p}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(p+\frac{n}{2})}{\Gamma(p+1)}\left[\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(2p+1)}{2^p\Gamma^2(p+1)}\right]^{n-1} & \text{при } p\ge 0;\\ \dfrac{2^p}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(p+\frac{n}{2})}{\Gamma(p+1)}\left[\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(2p+1)}{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}\right]^{n-1} & \text{при } -1/2\le p<0.\end{cases}$$

Замечание. В случае $n=2$ и $-1<p<-1/2$ оценки такого вида невозможны.

Справедливо и утверждение, обратное теореме 3.

Теорема 4. *Пусть E — n-мерный эллипсоид и $p>-1$ $(p\neq 0,1)$. Тогда*

$$\int_E |\nabla u(x,E)|^{2p}\mathrm{d}x \ge \frac{2^p\Gamma(p+n/2)}{n^p\Gamma(n/2)\Gamma(p+1)}\int_E u^p(x,E)\mathrm{d}x.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда E — n-мерный шар.

Заметим, что при $p=0$ утверждение теоремы превращается в равенство, а случай $p=1$ является хорошо известным равенством для функции напряжения.

2. *Доказательство основных утверждений.* Известно, (см., напр., [1], с. 127; [7], p. 63), что решение краевой задачи (1) определяется единственным образом и является неотрицательной функцией в области G. Пусть $E:=\left\{x=(x_1,\ldots,x_n):\sum\limits_{i=1}^n x_i^2a_i^{-2}\le 1\right\}$. Тогда решение краевой задачи (1) можно искать в форме $u(x,E)=C\left(1-\sum\limits_{i=1}^n x_i^2a_i^{-2}\right)$, где C — некоторая постоянная. Подставляя $u(x,E)$ в (1), находим $C=\left(2\sum\limits_{i=1}^n a_i^{-2}\right)^{-1}$. Для вычисления интегралов от функции $u(x,E)$ применим формулу Лиувилля (см. [8], с. 404)

$$\int_E f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2a_i^{-2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2\pi^{n/2}\prod\limits_{i=1}^n a_i}{\Gamma(n/2)}\int_0^1 f(r^2)r^{n-1}\mathrm{d}r$$

при $f(r)=(1-r)^p$. Таким образом, получаем

$$\int_E u^p(x,E)\mathrm{d}x=\frac{\pi^{n/2}\Gamma(p+1)}{2^p\Gamma(p+n/2+1)}\prod_{i=1}^n a_i\left(\sum_{j=1}^n a_j^{-2}\right)^{-p}. \tag{2}$$

Для $|\nabla u(x,E)|$ имеет место равенство

$$\int_E|\nabla u(x,E)|^{2p}\mathrm{d}x=\left(\sum_{i=1}^n a_i^{-2}\right)^{-2p}\int_E\left(\sum_{i=1}^n x_i^2a_i^{-4}\right)^p\mathrm{d}x.$$

Для произвольных p последний интеграл в квадратурах не выражается. Например, при $n=2$ и $p=-1/2$ интеграл сводится к эллиптическому интегралу 1-го рода. Переходя к обобщенным полярным координатам и вычисляя интеграл по r, получаем

$$\int_E|\nabla u(x,E)|^{2p}\mathrm{d}x=(n+2p)^{-1}\prod_{i=1}^n a_i\left(\sum_{i=1}^n a_i^{-2}\right)^{-2p}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\cdots\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos^2\varphi_1}{a_1^2}+\sum_{i=2}^n\frac{\cos^2\varphi_i}{a_i^2}\prod_{j=1}^{i-1}\sin^2\varphi_j+a_n^{-2}\prod_{i=1}^n\sin^2\varphi_i\right]^p\mathrm{d}\varphi_{n-1}\cdots\mathrm{d}\varphi_1. \tag{3}$$

Для доказательства теоремы 3 необходимо оценить последний $(n-1)$-кратный интеграл, который обозначим через $I(a_1,\ldots,a_n)$. Зависимость от p в обозначениях опускаем, т. к. считаем этот параметр фиксированным.

Ключевым для оценки $I(a_1,\ldots,a_n)$ оказывается случай $n=2$, т. е. случай эллипса.

Лемма. *Справедливы следующие оценки:*

$$I(a_1,a_2)\le\begin{cases}\dfrac{\pi\Gamma(2p+1)}{2^{p-1}\Gamma^2(p+1)}\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}\right)^p, & p>0;\\ \dfrac{\pi\Gamma(2p+1)}{2^{2p-1}\Gamma^2(p+1)}\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}\right)^p, & -\dfrac{1}{2}\le p\le 0.\end{cases}$$

В первом случае неравенство является неточным. Второе неравенство является точным и реализуется только в предельном случае, когда a_1/a_2 (или a_2/a_1) $\to 0$. Имеют место и обратные оценки

$$I(a_1,a_2)\ge\begin{cases}\dfrac{\pi}{2^{2p-1}}\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}\right)^p, & p>0;\\ \dfrac{\pi}{2^{p-1}}\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}\right)^p, & -1<p\le 0.\end{cases}$$

Равенство в последнем неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$.

Доказательство леммы. Пусть $a_1,a_2>0$. Введем вспомогательную переменную $t=(a_2-a_1)(a_2+a_1)^{-1}$ и преобразуем $I(a_1,a_2)$ следующим образом:

$$I(a_1,a_2)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos^2\varphi}{a_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{a_2^2}\right]^p\mathrm{d}\varphi=a_1^{-2p}\int_0^{2\pi}\left[1-\frac{4t}{(1+t)^2}\sin^2\varphi\right]^p\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\left(\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}\right)^{2p}\int_0^{2\pi}|1+te^{i\theta}|^{2p}\mathrm{d}\theta. \quad (4)$$

Положим для определенности, что $a_2\ge a_1$, т. е. $t\in[0,1]$. Тогда переменную t можно интерпретировать как полярный радиус. Так как функция $f(z)=1+z$ является аналитической, согласно теории пространств Харди последний интеграл является монотонно возрастающей функцией от t (напр., [9], с. 46). Для завершения доказательства леммы остается применить числовые неравенства

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}\le\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}\right).$$

Отмеченные в лемме случаи равенства соответствуют $t=0$ и $t=1$, т. е. $a_1=a_2$ и $a_1/a_2=0$, что при отрицательных p согласуется со случаями равенства в числовых неравенствах. □

Для полноты картины покажем, что при $-1<p<-1/2$ оценки сверху $I(a_1,a_2)$, аналогичные неравенствам в лемме 1, невозможны.

Применим результаты работы [10] при $n=1$ к последнему интегралу из (4) и выделим особенность в явном виде

$$\int_0^{2\pi}|1+te^{i\theta}|^{2p}\mathrm{d}\theta=(1-t^2)^{(2p+1)}\int_0^{2\pi}|1+te^{i\theta}|^{-2(p+1)}\mathrm{d}\theta. \quad (5)$$

Рассуждая, как и при доказательстве леммы 1, получим двойное неравенство

$$2\pi\le\int_0^{2\pi}|1+te^{i\theta}|^{-2(p+1)}\mathrm{d}\theta\le\frac{2\pi\Gamma(-(2p+1))}{\Gamma^2(-p)}.$$

Таким образом, из (5) и (4) следует, что $I(a_1,a_2)$ неограниченно возрастает при $a_1/a_2\to 0$ ($t\to 1$) и $p\in(-1,-1/2)$.

Доказательство теоремы 3. Как отмечалось выше, для доказательства будет достаточно оценить $I(a_1,\dots,a_n)$. Применим метод математической индукции. Базой индукции являются первые два неравенства леммы. Поясним идею индукции для $n=3$ и $p>0$. Применяя элементарные тригонометрические тождества, представим $I(a_1,a_2,a_3)$ в следующем виде:

$$I(a_1,a_2,a_3)=\int_0^{\pi}\sin\varphi_1\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\cos^2\varphi_1}{a_1^2}+\frac{\sin^2\varphi_1}{a_2^2}\right)\cos^2\varphi_2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\cos^2\varphi_1}{a_1^2}+\frac{\sin^2\varphi_1}{a_3^2}\right)\sin^2\varphi_2\right]^p \mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_1. \quad (6)$$

Заменим $\sin\varphi_1$ на единицу и применим лемму к внутреннему интегралу по φ_2, а затем к интегралу по φ_1. Получим цепочку неравенств

$$I(a_1,a_2,a_3)\le\frac{\pi\Gamma(2p+1)}{2^{p-1}\Gamma^2(p+1)}\int_0^{\pi}\left[\frac{2\cos^2\varphi_1}{a_1^2}+\left(\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right)\sin^2\varphi_1\right]^p\mathrm{d}\varphi_1\le$$
$$\le\frac{\pi^2\Gamma^2(2p+1)}{2^{2p-1}\Gamma^4(p+1)}\left(\frac{2}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right)^p\le\frac{\pi^2\Gamma^2(2p+1)}{2^{p-1}\Gamma^4(p+1)}\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right)^p.$$

Это завершает доказательство для случая $n=3$.

В общем случае для проведения индукционного шага будет удобно воспользоваться представлением

$$I(a_1,\dots,a_n)=\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\cos^2\varphi_1}{a_1^2}+\frac{\sin^2\varphi_i}{a_i^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{j=1}^{i-1}\sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_i+\left(\frac{\cos^2\varphi_1}{a_1^2}+\frac{\sin^2\varphi_n}{a_n^2}\right)\prod_{j=1}^{n}\sin^2\varphi_j\right]^p\mathrm{d}\varphi_{n-1}\cdots\mathrm{d}\varphi_1.$$

Далее, заметим, что кратный интеграл по переменным $\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1}$ представляет собой $I(a_2',\dots,a_n')$, где $a_i'=a_1^{-2}\cos^2\varphi_1+a_i^{-2}\sin^2\varphi_i$, $i=\overline{2,n}$. Таким образом, применяя индукционное предположение, получаем неравенство

$$I(a_1,\dots,a_n)\le 2[(n-1)!]^p\left[\frac{\pi\Gamma(2p+1)}{2^p\Gamma^2(p+1)}\right]^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right)^p.$$

Окончательно утверждение теоремы 3 следует из формул (2) и (3). □

Доказательство теоремы 1. Вначале установим утверждение теоремы для n-мерного эллипсоида E. Применим неравенство Коши–Буняковского

$$\int_E u^p(x,E)\mathrm{d}x\le\left(\int_E\rho^{2p}(x,E)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E\frac{u^{2p}(x,E)}{\rho^{2p}(x,E)}\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \quad (7)$$

В силу неравенства Харди (напр., [5]) и теоремы 3, последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\int_E\frac{u^{2p}(x,E)}{\rho^{2p}(x,E)}\mathrm{d}x\le\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p}\int_E|\nabla u(x,E)|^{2p}\mathrm{d}x\le K(n,p)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p}\int_E u^p(x,E)\mathrm{d}x.$$

Подставляя последнее неравенство в (7), получим утверждение теоремы 1 для произвольного эллипсоида с несколько лучшей константой.

Теперь пусть G — произвольная выпуклая область, для этой области найдутся такие два эллипсоида Левнера–Джона [11], что $E_1\subset G\subset E_2$ и $a_i\le b_i\le na_i$, $i=\overline{1,n}$, где a_i, b_i — полуоси эллипсоидов E_1 и E_2 соответственно. Из формулы (2) очевидно, для эллипсоидов Левнера–Джона справедливо неравенство

$$\int_{E_2} u^p(x, E_2)\mathrm{d}x \le n^{n+2p} \int_{E_1} u^p(x, E_1)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Если $x \in G \subset G'$, то, очевидно, $\rho(x, G) \le \rho(x, G')$, аналогичное свойство справедливо для функции напряжения [7]. Теперь утверждение теоремы легко вытекает из цепочки неравенств

$$\int_G u^p(x, G)\mathrm{d}x \le n^{n+2p} \int_{E_1} u^p(x, E_1)\mathrm{d}x \le n^{n+2p} K(n,p) \left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p} \times$$
$$\times \int_{E_1} \rho^{2p}(x, E_1)\mathrm{d}x \le n^{n+2p} K(n,p) \left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p} \int_G \rho^{2p}(x, G)\mathrm{d}x. \quad \square$$

Доказательство теоремы 2. Как и при доказательстве теоремы 1, установим утверждение теоремы для произвольного эллипса E. В отличие от (7) для оценки применим неравенство Гёльдера с произвольными показателями q и q_1

$$\int_E u^p(x, E)\mathrm{d}x \le \left(\int_E \rho^{pq}(x, E)\mathrm{d}x\right)^{1/q} \left(\int_E \frac{u^{pq_1}(x, E)}{\rho^{pq_1}(x, E)}\mathrm{d}x\right)^{1/q_1}, \tag{9}$$

где $q, q_1 \ge 1$ и $q^{-1} + q_1^{-1} = 1$. Далее, применим неравенство Харди к последнему интегралу и воспользуемся теоремой 3. Получим

$$\int_E \frac{u^{pq_1}(x, E)}{\rho^{pq_1}(x, E)}\mathrm{d}x \le \left(\frac{pq_1}{pq_1 - 1}\right)^{pq_1} \int_E |\nabla u(x, E)|^{pq_1}\mathrm{d}x \le K(2, pq_1) \left(\frac{pq_1}{pq_1 - 1}\right)^{pq_1} \int_E u^{pq_1/2}(x, E)\mathrm{d}x,$$

где уже предполагаем $pq_1 > 1$, т. е. $q_1 > 1/p$.

В [12] было доказано, что функционал

$$\mathbf{P}_\alpha(G) := \left(\frac{\alpha}{4\pi} \iint\limits_G u^{\alpha-1}(x, G)\mathrm{d}A\right)^{1/\alpha}$$

является монотонно убывающей функцией от α, где G — односвязная область, не совпадающая с кругом, и $\alpha \ge 0$. Так как $pq_1 > 2p$ и по условию теоремы $0 < p \le 1/2$, то, применяя свойство монотонности $\mathbf{P}_\alpha(G)$ для E и подставляя значение $K(2, pq_1)$, получим неравенство

$$\int_E \frac{u^{pq_1}(x, E)}{\rho^{pq_1}(x, E)}\mathrm{d}x \le \frac{8\pi}{pq_1 + 2} \left(\frac{p+1}{4\pi}\right)^{\frac{pq_1+2}{2(p+1)}} \frac{\Gamma(2pq_1 + 1)}{\Gamma^2(pq_1 + 1)} \left(\frac{pq_1}{pq_1 - 1}\right)^{pq_1} \left(\int_E u^p(x, E)\mathrm{d}x\right)^{\frac{pq_1+2}{2(p+1)}}.$$

От q_1 перейдем к q и подставим последнее неравенство в (9). Возведем полученное неравенство в степень $1/p$ и придем к неравенству

$$\|u(x, E)\|_p \left[\frac{\|\rho(x, E)\|_{pq}}{pq - q + 1}\right]^{-\frac{2q(p+1)}{pq+2}} \le (pq)^{\frac{2q(p+1)}{pq+2}} \times$$
$$\times \left(\frac{p+1}{4\pi}\right)^{\frac{pq+2(q-1)}{p(pq+2)}} \left(\frac{16\pi(q-1)^2\Gamma(2pq/(q-1))}{pq(pq+2(q-1))\Gamma^2(pq/(q-1))}\right)^{\frac{2(p+1)(q-1)}{p(pq+2)}},$$

где $0 < p \le 1/2$ и $pq - q + 1 > 0$, т. е. $1 \le q < 1/(1-p)$. Константа в правой части неравенства, как нетрудно видеть, является непрерывной на $\{0 \le p \le 1/2\} \times \{1 \le q \le 2\}$ как функция от p и q. Следовательно, по теореме Вейерштрасса достигает максимума. Привлекая вычислительный пакет "Математика", находим, что максимум равен 4 и достигается при $p = 1/2$, $q = 2$. Таким образом, получаем неравенство

$$\|u(x,E)\|_p \le 4\left[\frac{\|\rho(x,E)\|_{pq}}{pq-q+1}\right]^{\frac{2q(p+1)}{pq+2}}.$$

Пусть теперь G — произвольная выпуклая область на плоскости. Обозначим через E_1 и E_2 эллипсы Левнера–Джона области G. Тогда из монотонности интегралов по области и неравенства (8) находим

$$\frac{\|u(x,G)\|_p}{\|\rho(x,G)\|_{pq}^{\frac{2q(p+1)}{pq+2}}} \le \frac{\|u(x,E_2)\|_p}{\|\rho(x,E_1)\|_{pq}^{\frac{2q(p+1)}{pq+2}}} \le \frac{4^{1+1/p}\|u(x,E_1)\|_p}{\|\rho(x,E_1)\|_{pq}^{\frac{2q(p+1)}{pq+2}}} \le \frac{4^{2+1/2}}{(pq-q+1)^{\frac{2q(p+1)}{pq+2}}}.$$

Это совпадает с утверждением теоремы. □

Доказательство теоремы 4. Достаточно показать, что минимальное значение функционала $I(a_1,\dots,a_n)$ достигается только при $a_1 = \dots = a_n$. Рассмотрим отдельно три случая: $p > 1$; $0 < p < 1$; $-1 < p < 0$.

Далее для краткости записи будет удобно использовать зависимость $I(a_1,\dots,a_n)$ от p, т. е. в формуле (3) $(n-1)$–кратный интеграл обозначим через $I(a_1,\dots,a_n;p)$. Так, например, применяя хорошо известную формулу для вычисления объема n-мерного единичного шара B_1, найдем

$$I(a_1,\dots,a_n;0) = n\int_{B_1} \mathrm{d}x = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{10}$$

В первом случае применим неравенство Гёльдера

$$I(a_1,\dots,a_n;p) \ge I(a_1,\dots,a_n;0)\left(\frac{I(a_1,\dots,a_n;1)}{I(a_1,\dots,a_n;0)}\right)^p. \tag{11}$$

Вычислим интеграл $I(a_1,\dots,a_n;1)$, для этого будет достаточно вычислить интеграл

$$J(i,n) = \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2\varphi_j \cos^2\varphi_i \mathrm{d}\varphi_{n-1}\cdots \mathrm{d}\varphi_1,$$

где $i = \overline{1,n}$. Покажем, что величина $J(i,n)$ не зависит от i, а именно $J(i,n) = \pi^{n/2}\Gamma^{-1}(n/2+1)$. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. Чтобы проверить базу индукции, применим формулу (10) при $n' = n-1$

$$\begin{aligned} J(1,n) = \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\cos^2\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_{n-1}\cdots\mathrm{d}\varphi_1 = \\ = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi(1-\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что утверждение верно для i. Тогда

$$\begin{aligned} J(i+1,n) = \int_0^\pi \sin^n\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \prod_{j=2}^{i} \sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_{i+1}\mathrm{d}\varphi_{n-1}\cdots\mathrm{d}\varphi_1 = J(i,n-1)\int_0^\pi \sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Для завершения вычисления $I(a_1,\dots,a_n;1)$ воспользуемся π-периодичностью $\sin^2\varphi$ и формулой (10) при $n'=n+1$:

$$\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{n}\sin^2\varphi_i\mathrm{d}\varphi_{n-1}\cdots\mathrm{d}\varphi_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^{n}\varphi_1\cdots\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{n-1}\int_0^{\pi}\sin\varphi_n\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n+1}\cdots\mathrm{d}\varphi_1=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Окончательно получаем

$$I(a_1,\dots,a_n;1)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\biggl(\sum_{i=1}^{n}a_i^{-2}\biggr).$$

Таким образом, неравенство (11) перепишется следующим образом:

$$I(a_1,\dots,a_n;p)\geq\frac{2\pi^{n/2}}{n^p\Gamma(n/2)}\biggl(\sum_{i=1}^{n}a_i^{-2}\biggr)^p.$$

Из последнего неравенства и формул (2) и (3) следует утверждение теоремы для $p>1$. Заметим, что случаю равенства соответствует случай равенства в неравенстве Гёльдера, т. е. случай, когда $a_1=\dots=a_n$.

Для $0<p<1$ вначале рассмотрим случай $n=2$. Предположим $a_1\geq a_2$, таким образом, зафиксировано направление обхода. Тогда $t(\varphi)=a_1^{-1}\cos^2\varphi+a_2^{-1}\sin^2\varphi$ является вогнутой функцией на $[0,\pi]$ и $t(0)=t(\pi)=a_1^{-2}$, а следовательно, и $t^p(\varphi)$ тоже вогнутая. Из свойства вогнутости следует неравенство $t^p(\varphi)\geq a_1^{-2p}$. Равенство будет достигаться тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$. Если проинтегрировать последнее неравенство, то и получим требуемое утверждение при $n=2$. Для произвольного n неравенство доказывается методом индукции. Покажем подробно случай $n=3$. Воспользуемся формулой (6) и воспользуемся утверждением при $n=2$. Будем иметь

$$I(a_1,a_2,a_3)\geq 2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\biggl[\frac{\cos^2\varphi}{a_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{a_2^2}\biggr]^p\mathrm{d}\varphi.$$

Здесь равенство достигается только при $a_3=a_2$. Далее, можно параметризовать эллипсоид так, что $a_2\geq a_1$, т. е. a_1 считать минимальным с самого начала. Тогда

$$I(a_1,a_2,a_3)\geq 4\pi\int_0^1\biggl(\frac{1}{a_2^2}+x^2\biggl(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\biggr)\biggr)^p\mathrm{d}x\geq 4\pi\int_0^1\biggl(\frac{1}{a_2^2}\biggr)^p\mathrm{d}x,$$

где равенство реализуется только при $a_1=a_2$. Это завершает доказательство для второго случая.

В третьем случае заметим, что при $n=2$ — это утверждение леммы 1. В остальном доказательство аналогично предыдущему случаю, поэтому оно опускается. Отметим лишь, что достаточно предположить a_1 максимальным среди a_i, $i=\overline{1,n}$. $\square$

Литература

1. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства математической физики.* – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
2. Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – Т. 189. – Вып. 12. – С. 3–12.
3. Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane* // J. Inequal. and Appl. – 2001. – V. 6. – P. 253–260.
4. Bañuelos R., van den Berg M., Carroll T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownian motion* // J. London Math. Soc. (2). – 2002. – V. 66. – P. 499–512.

5. Davies E.B. *A review of Hardy inequalities* // Operation Theory: Advances and Applications. – 1999. – V. 110 – P. 55–67.
6. Bandle C., Flucher M. *Harmonic radius and concentration of energy; hyperbolic radius and Liouville's equations* $\triangle U = e^U$ *and* $\triangle U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$ // SIAM Review. – 1996. – V. 38. – № 2. – P. 191–238.
7. Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications.* – Boston–London–Melbbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 228 p.
8. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. III. – М.–Л.: Физматгиз, 1960. – 656 с.
9. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М.: Мир, 1984. – 496 с.
10. Авхадиев Ф.Г. *Особенности сферических потенциалов* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань. – 2000. – Т. 5. – С. 9–11.
11. John F. *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions* // Studies and Essays presented to R. Courant on his 60th birthday. – N. Y.: Interscience publ. – 1948. – P. 187–204.
12. Салахудинов Р.Г. *Изопериметрическая монотонность некоторых физических и геометрических функционалов* // Тр. по геометрии и анализу. – Новосибирск: Изд-во Инст. Матем. – 2003. – С. 368–375.

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
Казанского государственного
университета

Поступила
14.01.2004