ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 517.53

С.В. ШВЕДЕНКО

ПО ПОВОДУ ТЕОРЕМЫ ШАПИРО И ШИЛДСА О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА

1. Введение

Речь идет о результате Шапиро и Шилдса [1], восходящем по словам авторов к Хейману (хотя их ссылка на [2] не представляется обоснованной) и приводимом здесь в следующей несколько усиленной формулировке.

Теорема. *Если аналитическая функция $f(z)$, $|z| < 1$, имеет ограничение на рост*

$$\log^+ |f(z)| = O((1-|z|)^{-\lambda}), \quad |z| \to 1-0, \tag{1}$$

с константой $\lambda < 1$, то для любой последовательности $\{z_n\}$ нулей этой функции, некасательно сходящейся к некоторой точке ζ, $|\zeta| = 1$, выполняется условие Бляшке

$$\sum_n (1-|z_n|) < +\infty. \tag{2}$$

Как терминологический комментарий надлежит отметить следующее:

a) считается, что каждому включенному в последовательность $\{z_n\}$ нулю функции $f(z)$ соответствует столько же слагаемых в (2), какова его кратность;

b) сходимость последовательности $\{z_n\}$ к точке ζ, $|\zeta| = 1$, считается *некасательной к единичной окружности*, если $|\zeta - z_n| = O(1-|z_n|)$, т. е. при $\{z_n\} \to \zeta$ точки z_n остаются внутри фиксированного угла с вершиной ζ, вписанного в единичную окружность;

c) $\log^+ a = \begin{cases} \log a, & \text{если } a > 1; \\ 0, & \text{если } 0 \le a \le 1. \end{cases}$

Доказательство сформулированной теоремы дано в [1] лишь в предположении $\lambda < 1/2$ относительно показателя в (1); требующий же куда более сложной технической работы случай $1/2 < \lambda < 1$ разобран не был (ему в [1] уделено лишь несколько общих слов). Из-за образовавшегося зазора между заявленным утверждением и фактически доказанной его частью ссылки на него (напр., в [3], [4]) как на *достоверно установленный* факт нельзя считать вполне корректными. Справедливости ради следует сказать, что в [4] авторы, взяв за основу более общий, чем (1), вид ограничения на рост функций, предложили в качестве доказательства теоремы ссылки на полученные ими ранее [5] результаты вкупе с комментарием, как их с этой целью надлежит модифицировать.

Данная статья предполагает, во-первых, дать *прямое* и *элементарное* — без выхода в специальные разделы теории мероморфных функций — *доказательство теоремы*, а во-вторых, показать на примерах, что в ее формулировке оба требования — *строгого* неравенства $\lambda < 1$ и некасательной сходимости последовательности $\{z_n\}$ к единичной окружности — существенны.

2. Доказательство теоремы

Не ограничивая общности, можно считать $\zeta = 1$. Пусть числа ε и δ из интервала $(0,1)$ настолько малы, что

$$(1+\delta)\lambda < 1, \quad \text{а} \quad \varepsilon < 2^{-1-\delta} \cos\frac{\pi}{2+\delta}, \tag{3}$$

и пусть однозначная ветвь аналитической функции

$$z = w + \varepsilon(1-w)^{1+\delta}, \quad |w| < 1, \tag{4}$$

определена условием $|\arg(1-w)| < \pi/2$.

Сравнение направлений и длин векторов, изображающих числа $1-w$ и $z-w$, показывает, что функция (4) отображает единичный круг в себя, а наличие производной $z'(1) = 1$ обеспечивает *конформность* этого отображения в *граничной точке* 1. Это позволяет сделать следующие выводы:

a) соотношение $g(w) = f(z)$ определяет *аналитическую функцию* переменного w, $|w| < 1$;

b) каждая точка z_n (начиная с некоторого номера n) имеет в пересечении единичного круга с фиксированной окрестностью точки 1 *единственный прообраз* w_n, являющийся нулем функции $g(w)$ той же кратности, какова кратность нуля z_n функции $f(z)$;

c) для последовательностей $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ выполняются отношения *слабой эквивалентности*

$$1-|z_n| \asymp |1-z_n| \asymp |1-w_n| \asymp 1-|w_n|. \tag{5}$$

Ввиду соотношений (5) для доказательства теоремы достаточно установить принадлежность функции $g(w)$, $|w| < 1$, *классу Неванлинны* N ([6], с. 18; [7], сс. 60, 75):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |g(\rho e^{it})| dt \le C < +\infty, \quad 0 < \rho < 1.$$

Поскольку интеграл в левой части есть неубывающая функция $\rho \in (0,1)$, а

$$\log^+|g(w)| = \log^+|f(z)| \le C(1-|z|)^{-\lambda}, \quad |w| < 1,$$

для этого в свою очередь достаточно убедиться, что

$$\int_0^{\pi} (1-|z|)^{-\lambda} dt \le C < +\infty \quad \text{при} \quad \rho \to 1-0; \tag{6}$$

всюду предполагается, что z и $w = \rho e^{it}$ связаны соотношением (4), а значение C не зависит от ρ (хотя может меняться от выражения к выражению).

Пусть $\varphi = \varphi(\rho)$ и $\psi = \psi(\rho)$, $0 < \varphi < \psi < \pi/2$, — аргументы точек пересечения луча $\{w : \arg(1-w) = -\pi/(2+\delta)\}$ и окружности $\{w : |w| = \rho\}$, $\sin(\pi/(2+\delta)) < \rho < 1$. Для величин φ и ψ справедливы следующие предельные соотношения при $\rho \to 1-0$:

$$\frac{\varphi(\rho)}{1-\rho} \to \operatorname{tg}\frac{\pi}{2+\delta}, \quad \psi(\rho) \to \frac{\delta\pi}{2+\delta} - 0. \tag{7}$$

Если $t \in [0,\varphi]$, то заведомо $1-|z| > (1-\rho)/2$, поэтому

$$\int_0^{\varphi} (1-|z|)^{-\lambda} dt < C(1-\rho)^{1-\lambda} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 1-0. \tag{8}$$

Если же $t \in [\varphi,\pi]$, то надлежащую оценку снизу величины $1-|z|$ можно получить из соотношения сторон в треугольнике с вершинами w, 0, z. Именно, если обозначить через τ угол при вершине w, то по *теореме косинусов* $|z|^2 = |w|^2 + \varepsilon^2|1-w|^{2(1+\delta)} - 2|w|\varepsilon|1-w|^{1+\delta}\cos\tau$, откуда

$$1-|z| > \frac{1-|z|^2}{2} > \frac{1}{2}\varepsilon|1-w|^{1+\delta}(2\rho\cos\tau - \varepsilon|1-w|^{1+\delta}). \tag{9}$$

Остается установить, что если ε и δ удовлетворяет неравенствам (3), то *равномерно относительно* $\rho \to 1-0$ выполняется оценка

$$1-|z| \geq C|1-w|^{1+\delta}, \quad \varphi \leq t \leq \pi, \tag{10}$$

где по-прежнему $w = \rho e^{it}$ и z связаны соотношением (4).

Для получения оценки (10) отрезок $[\varphi, \pi]$ удобнее разбить на два — $[\varphi, \psi]$ и $[\psi, \pi]$ — и ввести обозначение $\theta = \theta(\rho, t) = -\arg(1-w)$.

Если $t \in [\varphi, \psi]$, то $\pi/(2+\delta) \leq \theta < \pi/2$, поэтому

$$\tau = \pi - t - (1+\delta)\theta \leq \pi - \varphi - (1+\delta)\frac{\pi}{2+\delta} < \frac{\pi}{2+\delta}. \tag{11}$$

В случае $t \in [\psi, \pi]$ можно воспользоваться неравенством $\tau < \arg(1-w) - \arg(0-w)$, правая часть которого при *фиксированном* $\rho < 1$ достигает *максимального* значения, равного $\pi - \pi/(2+\delta) - \psi$, когда $w = \rho e^{i\psi}$ (т. е. при $t = \psi$). Поэтому с учетом второго из соотношений (7)

$$\lim_{\rho\to 1-0} \tau \leq \lim_{\rho \to 1-0}\left(\pi - \frac{\pi}{2+\delta} - \psi\right) = \frac{(1+\delta)\pi}{2+\delta} - \left(\frac{\delta\pi}{2+\delta} - 0\right) = \frac{\pi}{2+\delta} + 0. \tag{12}$$

Объединение (3), (9), (11) и (12) дает требуемую оценку (10), поскольку

$$2\rho\cos\tau - \varepsilon|1-w|^{1+\delta} > 2\rho\cos\frac{\pi}{2+\delta} - \left|\frac{1-w}{2}\right|^{1+\delta}\cos\frac{\pi}{2+\delta} \geq C > 0$$

для $w = \rho e^{it}$, когда $\varphi \leq t \leq \pi$, а $\rho \to 1-0$.

В соответствии с оценкой (10) и первым из неравенств (3) величина

$$\int_\varphi^\pi (1-|z|)^{-\lambda}dt < C\int_0^\pi |1-\rho e^{it}|^{-\lambda(1+\delta)}dt = C\int_0^\pi \left((1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\lambda(1+\delta)}{2}} dt$$

остается *ограниченной* при $\rho \to 1-0$, что вместе с (8) обеспечивает оценку (6), а следовательно, и принадлежность функции $g(w)$ *классу Неванлинны* N.

3. Примеры

Непосредственно проверяется, что если последовательность $\{z_n\}$ точек единичного круга удовлетворяет условию $\sum\limits_n (1-|z_n|)^2 < +\infty$, то произведение

$$\prod_n \left[1 - \left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\overline{z_n}z}\right)^2\right], \quad |z| < 1, \tag{13}$$

сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах единичного круга к аналитической функции $P(z; z_n)$, имеющей (простой) нуль в каждой точке последовательности $\{z_n\}$.

1. Пусть $z_n = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае

$$\log^+|P(z;z_n)| = \log^+\prod_{n=2}^{+\infty}\left|1-\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\overline{z_n}z}\right)^2\right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty}\log\left(1+\left|\frac{1-|z_n|^2}{1-\overline{z_n}z}\right|^2\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-|\overline{z_n}z|}\right)^2 < \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{2n^{-1}}{(1-|z|)+|z|n^{-1}}\right]^2 <$$

$$< \sum_{n \leq \frac{1}{1-|z|}}\left(\frac{2}{|z|}\right)^2 + \frac{4}{(1-|z|)^2}\sum_{n > \frac{1}{1-|z|}}\frac{1}{n^2} < \frac{16}{1-|z|} + \frac{4}{(1-|z|)^2}(1-|z|).$$

Функция $f(z) = P(z; z_n)$ удовлетворяет таким образом условию (1) с $\lambda = 1$, однако *условие Бляшке* (2) для последовательности $\{z_n\}$ ее *положительных* нулей не выполнено.

2. Пусть произведение (13) построено по точкам

$$z_{n,k} = r_n \exp\left(i\pi \operatorname{sgn} k \frac{2|k|-1}{2n}\right), \quad k = \pm 1, \ldots, \pm n, \quad r_n = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Поскольку

$$\sum_{n,k} \left|\frac{1-|z_{n,k}|^2}{1-\overline{z_{n,k}}z}\right|^2 \le \sum_n 2n\left(\frac{2n^{-2}}{1-|z|}\right)^2, \quad |z| < 1,$$

это произведение сходится абсолютно и равномерно *внутри* единичного круга к аналитической функции $P(z; z_{n,k})$ с (простыми) нулями $z_{n,k}$. С учетом того, что при фиксированном n точки $z_{n,k}$ образуют вершины правильного $2n$-угольника (вписанного в окружность радиуса $r_n = 1-n^{-2}$), а также с учетом неравенства $\sin(\varphi/2) > \varphi/\pi$, $0 < \varphi < \pi$, для любой точки z, $|z| < 1$, выполняются соотношения

$$\log^+ |P(z; z_{n,k})| = \log^+ \left[\prod_{n=2}^{+\infty} \prod_{|k|=1}^{n} \left|1 - \left(\frac{1-|z_{n,k}|^2}{1-\overline{z_{n,k}}z}\right)^2\right|\right] \le$$

$$\le \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{|k|=1}^{n} \left|\frac{1-|z_{n,k}|^2}{1-\overline{z_{n,k}}z}\right|^2 \le \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{|k|=1}^{n} \frac{(1-r_n^2)^2}{1+r_n^2|z|^2 - 2r_n|z|\cos\frac{|k|-1}{n}\pi} =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2(1-r_n^2)^2}{(1-r_n|z|)^2 + 4r_n|z|\sin^2\frac{k-1}{2n}\pi} \le$$

$$\le \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2(1-r_n^2)^2 n^2}{(1-r_n|z|)^2 n^2 + 4r_n|z|(k-1)^2}.$$

Разделение внутренней суммы на две — в зависимости от выполнения неравенства $(1 - r_n|z|)^2 n^2 \ge 4r_n|z|(k-1)^2$ или ему противоположного — с сохранением в знаменателе лишь доминирующего слагаемого приводит к оценке

$$\log^+ |P(z; z_{n,k})| \le C \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-r_n^2)n^2}{(1-r_n|z|)n} \le C \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{-3}}{(1-|z|) + |z|n^{-2}}$$

(как и раньше, константа C может меняться от выражения к выражению), из которой после аналогичного разделения суммы окончательно вытекает

$$\log^+ |P(z; z_{n,k})| \le C \log \frac{1}{1-|z|}, \quad |z| \to 1-0.$$

Что же касается нулей $z_{n,k}$ функции $P(z; z_{n,k})$, то

$$\sum_{n,k} (1-|z_{n,k}|) = \sum_{n=2}^{+\infty} 2n(1-r_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} 2n^{-1} = +\infty.$$

Автор признателен рецензенту за библиографические указания.

Литература

1. Shapiro H.S., Shields A.L. *On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces* // Math. Z. – 1962. – V. 80. – P. 217–229.
2. Hayman W.K. *On Nevanlinna's second theorem and extensions* // Rend. Circ. Math. Palermo – 1954. – V. 2. – № 3. – P. 346–392.

3. Beller E. *Zeros of A^p functions and related classes of analytic functions* // Isr. J. Math. – 1975. – V. 22. – № 1. – P. 68–80.
4. Hayman W.K., Korenblum B. *An extension of the Riesz–Herglotz formula* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. – 1976. – V. 2. – P. 175–201.
5. Hayman W.K., Korenblum B. *A critical growth rate for functions regular in a disk* // Mich. Math. J. – 1980. – V. 27. – P. 21–30.
6. Duren P. *Theory of H^p spaces.* – New York–London: Acad. Press, 1970. – 258 p.
7. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М.: Мир, 1984. – 469 с.

Московский инженерно-
физический институт

Поступила
11.11.1999