ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

Посвящается 70-летию профессора В.А. Треногина

УДК 517.988.67

Н.А. СИДОРОВ

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРОСТЫХ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ПОЛНОГО РАНГА И ИТЕРАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОМ АНАЛИЗЕ

Введение

Хорошо известна важная роль геометрии плоскостей, диаграмм и многогранников Ньютона [1], [2] в асимптотическом анализе задач теории ветвления ([1]–[5] и др.). При построении разветвляющихся решений итерационными методами использовались явная и неявная параметризации [6]–[12], а в сложных случаях [10], [13]–[15] — указанные выше геометрические конструкции. В [6], [7], [9]–[12] решающее значение для сходимости методов имели жесткие условия, обеспечивающие выход на главную часть уравнения разветвления (у.р.) уже на первой итерации. В частных случаях указывался способ построения начального приближения и выбора параметризации искомой ветви. В [6], [7], [9], [11], [12] параметр униформизации выбирался непосредственно по виду диаграмм Ньютона коэффициентов проекции QF. Поэтому на каждой итерации решалось одно линейное уравнение. Итерационные методы для более сложных ситуаций в [6]–[12] не были разработаны, т.к. неясно было, как выбирать параметр униформизации ветвей и организовать итерационный процесс в общем случае.

В [13], [14] показано, что существенное расширение класса задач, создание более гибких алгоритмов возможны за счет привлечения N-ступенчатых методов, когда на каждой итерации решается N линейных уравнений и применяются разные параметры униформизации согласно [2]. В [13] предложен N-ступенчатый итерационный метод, сходящийся в окрестности точки ветвления при более слабых условиях, чем другие методы. Метод обладает достоинствами явной и неявной параметризаций [12], т.к. дает определенную свободу выбора параметра униформизации. Однако итерационная схема, предложенная на его основе в ([13], § 2), в общем случае требует предварительного построения элемента $\widehat{x}^0$ из подпространства $E_1^{\infty-n}$, используемого в начальном приближении. Способ построения элемента $\widehat{x}^0$ дан в ([13], лемма 2). Тем не менее, предварительное вычисление $\widehat{x}^0$ усложняет вычисления и саму итерационную схему.

Целью данной работы является не только модификация и расширение возможностей итерационных методов работ [11], [12], [16], но и вывод итерационных формул, удобных для теории приближенных методов и ее приложений. Предложена более удобная итерационная схема с упрощенным выбором начального приближения.

1. Уравнение разветвления и выбор начального приближения

В параграфе приведены необходимые сведения из [1], [2], [12], [13] по выбору параметра униформизации и начального приближения.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства. Рассмотрим уравнение

$$Bx - R(x, \lambda) = 0, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, грант 2000-15.

где $B : D(B) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый фредгольмов оператор с плотной в E_1 областью определения, $\dim N(B) = n \geq 1$, оператор $R(x,\lambda) = R_{01}\lambda + \sum\limits_{i+k\geq 2} R_{ik}(x)\lambda^k$ аналитический в окрестности точки $x = 0$, $\lambda = 0$. Требуется построить решение $x \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Пусть $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i\}_1^n$, $\{z_i\}_1^n$ — соответствующие биортогональные системы из E_1^* и E_2, $P = \sum\limits_1^n \langle\cdot,\gamma_i\rangle\varphi_i$, $Q = \sum\limits_1^n \langle\cdot,\psi_i\rangle z_i$, $\Gamma = \Big(B + \sum\limits_1^n \langle\cdot,\gamma_i\rangle z_i\Big)^{-1}$. Ограниченный оператор Γ называют псевдорезольвентой фредгольмова оператора B [1].

Полагая в уравнении (1)

$$x = \xi\varphi + \Gamma y, \tag{2}$$

где

$$Qy = 0, \quad \xi\varphi = \sum_1^n \xi_i\varphi_i,$$

получим для определения ξ и y систему

$$y = R(\xi\varphi + \Gamma y, \lambda), \tag{3}$$

$$\langle y, \psi_i\rangle = 0, \quad i = 1,\dots,n. \tag{4}$$

На основании теоремы о неявных операторах [4] уравнение (3) имеет единственное малое решение

$$y = \sum_{m\geq 2} y_{m0}(\xi\varphi) + \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 1} y_{mn}(\xi\varphi)\lambda^n. \tag{5}$$

Рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов y_{mn} построены в [13]. Здесь приведем другую, более экономную в вычислениях рекуррентную формулу

$$y_{n-j,j} = \frac{1}{(n-j)!j!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^j\partial\mu^{n-j}}\sum_{i+k=2}^{n}\lambda^k R_{ik}\Big(\sum_{r+s=1}^{n+1-i-k}\Gamma y_{rs}\mu^r\lambda^s\Big)\Big|_{\mu=0,\lambda=0},$$

$j = 0,1,\dots,n$, $n = 2,3,\dots$, где $y_{01} = R_{01}$, $y_{01} \triangleq \xi_1 z_1 + \dots + \xi_n z_n$. Подставляя решение (5) в (4), получим уравнение разветвления

$$L^j(\xi,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m\geq 2} L^j_{mo}(\xi)\lambda + \sum_{m\geq 0}\sum_{\nu\geq 1} L^j_{m\nu}(\xi)\lambda^\nu = 0, \quad j = 1,\dots,n, \tag{6}$$

где

$$L^j_{m\nu} = \langle y_{m\nu}(\xi\varphi),\psi_j\rangle = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} L^j_{m_1,\dots,m_n,\nu}\xi_1^{m_1}\dots\xi_n^{m_n}.$$

Пусть $L(\xi_1,\dots,\xi_{n+1}) = \sum_i L_i\xi^i$, $\xi^i = \xi_1^{i_1}\dots\xi_{n+1}^{i_{n+1}}$, — одна из левых частей системы (6). Для симметрии в обозначениях положено $\lambda = \xi_{n+1}$. Не ограничивая общности, считаем, что $L(\xi_1,\dots,O_i,\dots,\xi_{n+1}) \neq 0$ при $i = 1,\dots,n+1$. В противном случае мы бы сократили соответствующее уравнение в (6) на некоторую степень ξ_i.

Пусть $\operatorname{supp} L = \{i \mid i \in N_+^{n+1},\ L_i \neq 0\}$, N_+ — множество целых положительных чисел.

Определение 1. Гиперплоскость

$$l : (\xi \in R_+^{n+1} \mid (\xi,\alpha) = \Theta), \quad \alpha \in N_+^{n+1}, \quad \Theta \in N_+,$$

назовем опорной для $\operatorname{supp} L$, если:

1) $(\xi,\alpha) \geq \Theta$ при $\xi \in \operatorname{supp} L$;
2) $l \cap \operatorname{supp} L \neq 0$.

Условие 1 [13]. *В* N_+ *найдены числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ *такие, что параллельные гиперплоскости* $l_j : (\xi \in R_+^{n+1} \mid (\xi, \alpha) = \Theta_j)$, $j = 1, \dots, n$, *являются опорными соответственно для* $\operatorname{supp} L^j$, $j = 1, \dots, n$.

Аналитически условие 1 означает, что при $\xi_i = \varepsilon^{\alpha_i} \eta_i$, $i = 1, \dots, n+1$, и $\varepsilon \to 0$

$$L^j = \varepsilon^{\Theta_j} l_j(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) + r_j(\eta, \varepsilon), \tag{7}$$

где

$$l_j = \sum_{(i,\alpha)=\Theta_j} L_i^j \eta^i \not\equiv 0, \quad r_j = o(\varepsilon^{\Theta_j}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Вектор-функцию $l(\eta)$ называют главной частью у. р.

Проблема выбора вектора α решена в [2]. Если $\alpha_1 = \dots = \alpha_m$, $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_{n+1}$, то гиперплоскости l_j симметричны относительно осей $\xi_1, \dots, \xi_m$ и осей $\xi_{m+1}, \dots, \xi_{n+1}$. В такой симметричной ситуации векторы α и Θ легко строятся методом диаграмм Ньютона [1], [16].

Условие 2 [13]. *Система*

$$l_j(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{8}$$

имеет решение $\eta^0 = (\eta^0, \dots, \eta^0_{n+1})$, *причем* $\det \left\| \frac{\partial l_j(\eta^0)}{\partial \eta_i} \right\|_{j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,n+1} \setminus *} \neq 0$.

Решение $\eta^0 \neq 0$ назовем решением полного ранга системы (8), а соответствующую пару $(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$, удовлетворяющую (1), простым решением [17] полного ранга уравнения (1).

Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда на основании теоремы о неявной функции у. р. (6) имеет решение

$$\xi_i = \varepsilon^{\alpha_i}(\eta_i^0 + o(1)), \quad \xi_* = \varepsilon^{\alpha_*}\eta_*^0, \quad i = (1, \dots, n+1) \setminus *,$$

где $\xi_{n+1} \triangleq \lambda(\varepsilon)$. Подставляя это решение в (2) с учетом (5), получим искомое решение полного ранга $x(\varepsilon) \to 0$, $\lambda(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ уравнения (1).

Вектор $\eta^0 = (\varepsilon^{\alpha_1}\eta_1^0, \dots, \varepsilon^{\alpha_{n+1}}\eta_{n+1}^0)$ будет использован в следующем параграфе при построении начального приближения этого решения в итерационном методе.

2. Итерационная схема

Пусть выполнены условия 1, 2. Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x = \sum_1^n \xi_i \varphi_i + \varepsilon^r \Gamma y, \quad \lambda = \varepsilon^{\alpha_{n+1}} \eta_{n+1}(\varepsilon) \triangleq \xi_{n+1} \tag{9}$$

с условием $Qy = 0$. Здесь $\xi_i = \varepsilon^{\alpha_i}\eta_i(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, $r = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$, $\eta_i(0) = \eta_i^0$, $\eta_*(\varepsilon) \equiv \eta_*^0$, $* \in (1, \dots, n+1)$,

$$y(0) = \begin{cases} 0, & r < \alpha_{n+1}; \\ R_{01}\eta_{n+1}(0), & r = \alpha_{n+1}. \end{cases}$$

Отметим, что представление (9) удобнее использованного ранее (см. (19) в [13]), т. к. не содержит дополнительного члена $\widehat{x}^0$, усложнявшего метод. Неизвестные $y(\varepsilon)$ и $\eta_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n+1} \setminus *$, непрерывные в нуле, определим из системы

$$\varepsilon^r y = R(\xi\varphi + \varepsilon^r \Gamma y,\ \xi_{n+1}) \triangleq \Phi(y), \tag{10}$$

$$\langle y, \psi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Отметим, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-r}\Phi(y) = y(0)$, $\eta_* = \eta_*^0$. Следуя [13], преобразуем систему (10), (11) так, чтобы выполнялись условия теоремы о неявном операторе [4] в окрестности точки $y_0 = y(0)$, $\eta_i^0 = \eta_i(0)$, $i = \overline{1, n+1} \setminus *$.

С этой целью, введя итерации в систему (10), (11), перейдем к системе

$$y = \varepsilon^{-r}\underbrace{\Phi(\Phi\ldots(\Phi(y))}_{N}\ldots) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{-r}\Phi^N(y), \tag{12}$$

$$\varepsilon^{-\Theta_j}\left\langle R\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{\alpha_i}\eta_i\varphi_i + \Gamma\Phi^N(y), \varepsilon^{\alpha_{n+1}}\eta_{n+1}\right), \Psi_j\right\rangle = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Здесь $\eta_* = \eta_*^0$,

$$\Phi^N(y) \stackrel{\text{def}}{=} R(\xi\varphi + \Gamma R(\xi\varphi + \cdots + \Gamma R(\xi\varphi + \varepsilon^r\Gamma y, \xi_{n+1}), \ldots,)\xi_{n+1}).$$

Любое решение $(y, \eta_1, \ldots, \eta_{*-1}, \eta_{*+1}, \ldots, \eta_{n+1})$ системы (12), (13) удовлетворяет системе (10), (11) и условию $Qy = 0$.

Систему (12), (13) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$K(u, \varepsilon) = 0, \tag{14}$$

где $K : Y \times R^1 \to Y$, $Y = E_2 \oplus R^n$, $\|u\| \triangleq \|y\| + |\eta|$, $u = (y(\varepsilon), \eta_1(\varepsilon), \ldots, \eta_{*-1}(\varepsilon), \ldots, \eta_{n+1}(\varepsilon))'$, $\eta_*(\varepsilon) \equiv \eta_*^0$.

На основании условий 1, 2 при достаточно большом $N \geq N_0$ оператор $K(u, \varepsilon)$ будет непрерывным в окрестности точки $(u_0, 0)$, где $u_0 = (y(0), \eta^0)$, $K(u_0, 0) = 0$. Используя разложение правой части формул (12), (13) в ряды Тейлора в окрестности точки $\varepsilon = 0$, можно показать, что достаточно взять $N_0 = \max\limits_{1\leq j\leq n}(\Theta_j - \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. Эта оценка является грубой и в более конкретной ситуации легко может быть улучшена. Смотри, например, ниже условие 3, при котором можно взять $N_0 = 1$.

При $N \geq N_0$ оператор $K(u, \varepsilon)$ имеет производную Фреше $K_u(u, \varepsilon)$, непрерывную в точке $(u_0, 0)$,

$$K_u(u_0, 0) = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$D = \left\| \frac{\partial l_j(\eta_0)}{\partial \eta_i} \right\|_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,n+1}\setminus *}}.$$

В силу условия 2 $\det D \neq 0$ и, следовательно, существует ограниченный обратный оператор

$$K_u^{-1}(u_0, 0) = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение (14) удовлетворяет всем условиям теоремы о неявном операторе [4].

Искомое решение $u = (y, \eta)$ можно найти методом последовательных приближений

$$y_m = \varepsilon^{-r}R(\xi^{m-1}\varphi + \Gamma R(\xi^{m-1}\varphi + \cdots + \Gamma R(\xi^{m-1}\varphi + \varepsilon^r\Gamma y_{m-1}, \xi_{n+1}^{m-1}), \ldots,)\xi_{n+1}^{m-1}), \tag{15}$$

$$\eta^m = \eta^{m-1} - D^{-1}\langle R(\xi^{m-1}\varphi + \varepsilon^r\Gamma y_m, \xi_{n+1}^{m-1}), E(\varepsilon)\psi\rangle, \quad m = 1, 2, \ldots\ . \tag{16}$$

Здесь $E\psi \triangleq (\varepsilon^{-\Theta_1}\psi_1, \ldots, \varepsilon^{-\Theta_n}\psi_n)'$, $\xi \triangleq (\varepsilon^{\alpha_1}\eta_1, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n}\eta_n)'$, $\xi_{n+1} = \varepsilon^{\alpha_{n+1}}\eta_{n+1}$, $\eta_* \equiv \eta_*^0$. Начальное приближение (y_0, η^0) определяется формулами

$$y_0 = y(0), \quad \eta^0 = (\eta_1^0, \ldots, \eta_{*-1}^0, \eta_{*+1}^0, \ldots, \eta_{n+1}^0)',$$

где η^0 удовлетворяет системе (8), $(')$ — знак транспонирования.

Преобразуем (15) к более удобному виду. Введем последовательности

$$x_m = \xi^m\varphi + \varepsilon^r\Gamma y_m, \tag{17}$$

$$\lambda_m = \xi_{n+1}^m \triangleq \varepsilon^{\alpha_{n+1}}\eta_{n+1}^m, \tag{18}$$

где $\xi^m\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon^{\alpha_i}\eta_i^m\varphi_i$, $m = 1, 2, \dots$ Введем еще вспомогательные элементы

$$x_{m-1}^0 = \xi^{m-1}\varphi + \varepsilon^r\Gamma y_{m-1} \triangleq x_{m-1}, \tag{19}$$

$$x_{m-1}^i = \xi^{m-1}\varphi + \Gamma R(x_{m-1}^{i-1}, \lambda_{m-1}), \quad i = 1, \dots, N-1. \tag{20}$$

Тогда итерационная схема (15), (16) примет вид

$$\begin{aligned} &y_m = \xi^{-r}R(x_{m-1}^{N-1}, \lambda_{m-1}),\\ &\eta^m = \eta^{m-1} - D^{-1}\langle R(\xi^{m-1}\varphi + \varepsilon^r\Gamma y_m, \lambda_{m-1}), E(\varepsilon)\Psi\rangle, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{21}$$

В качестве начального приближения следует взять $y^0 = y(0)$, $\xi_i^0 = \varepsilon^{\alpha_i}\eta_i^0$, $i = \overline{1, n+1} \setminus *$.
Из изложенного вытекает

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1, 2. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение* $x = x(\varepsilon) \to 0$, $\lambda = \lambda(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где*

$$Px(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{\alpha_i}(\eta_i^0 + o(1))\varphi_i,$$

$\lambda(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha_{n+1}}\eta_{n+1}^0$. *Последовательность* $\{x_m, \lambda_m\}$, *определяемая формулами* (17)–(21), *сходится к этому решению в окрестности нуля.*

Замечание 1. Правые части формулы (21) содержат отрицательные степени ε. Но это устранимые особенности. В случае полиномиальных нелинейностей от них легко избавиться, сократив правые части в (21) на соответствующие степени ε (см. ниже пример). После этого сходимость будет равномерной по ε в окрестности $|\varepsilon| \le \rho$. Если сокращение нельзя сделать явно, то для обеспечения устойчивости согласно [17] можно в отрицательных степенях ε в правых частях (21) сделать замену $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon + \operatorname{sign}\varepsilon\sigma^\nu$, где $0 < \nu < \frac{1}{2p}$, $p = \max\limits_{1\le j\le n}(\Theta_j - \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$, σ — максимальная абсолютная погрешность вычислений. Тогда рассмотренный итерационный метод будет регуляризующим алгоритмом в смысле А.Н. Тихонова.

3. Одноступенчатый вариант схемы (17)–(21)

Условие 3. *Пусть диаграммы Ньютона коэффициентов проекции* QF *имеют параллельные грани* $pi + qk = \Theta_j$, $j = 1, \dots, n$; $p, q, \Theta_j \in N^+$, $R_{0i} = 0$ *при* $i < \frac{p}{q}$, $QR_{\frac{p}{q}} = 0$.

Тогда на основании леммы 3 из [13] условие 1 будет выполнено при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = p$, $\alpha_{n+1} = q$.

Положим $\xi_i = \varepsilon^p\eta_i$, $i = 1, \dots, n$, $\lambda = \varepsilon^q\eta_{n+1}$. При этом система (8) имеет вид

$$l_j \triangleq \sum_{pi+qk=\Theta_j} \Big\langle R_{ik}\Big(\sum_{s=1}^{n}\eta_s\varphi_s + x^0(\eta_{n+1})\Big), \psi_j\Big\rangle\eta_{n+1}^k = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{22}$$

где

$$x^0 = \begin{cases} 0, & \frac{p}{q} \notin N^+;\\ \Gamma R_{0\frac{p}{q}}\eta_{n+1}^{\frac{p}{q}}, & \frac{p}{q} \in N^+. \end{cases}$$

Пусть система (22) имеет решение η^0 полного ранга. Тогда условия теоремы будут выполнены. В итерационных формулах (17)–(21) в этом случае надо положить $N = 1, r = \begin{cases} p, & \text{если } p \le q;\\ q, & \text{если } p > q. \end{cases}$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$Bx = \lambda Ax + F_l(x), \tag{23}$$

где $A \in L(E_1 \to E_2)$, $l \geq 2$. Пусть $QA \neq 0$, $QF_l(\xi\varphi \not\equiv 0.)$ Тогда условие 3 выполняется при $p = 1$, $q = l - 1$, $\Theta_1 = \dots = \Theta_n = l$. Алгебраическая система (22) примет вид

$$l_j(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) \triangleq \eta_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \langle A\varphi_k, \psi_j \rangle \eta_k + \langle F_l(\eta\varphi), \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{24}$$

Пусть η^0 — решение полного ранга системы (24), причем

$$D = \left\| \frac{\partial l_j(\eta^0)}{\partial \eta_i} \right\|_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \det D \neq 0.$$

Тогда можно использовать схему (17)–(21) при $r = 1$, $N = 1$, $y^0 = 0$, $* = n + 1$, $\lambda = \varepsilon^{l-1}\eta^0_{n+1}$.

Соответствующая последовательность $x_m = \varepsilon(\eta^m\varphi + \widehat{x}_m)$, где $\widehat{x}_m$ — единственное решение линейного уравнения

$$\overline{B}\widehat{x}_m = \varepsilon^{l-1}\{\eta^0_{n+1}A(\eta^{m-1}\varphi + \widehat{x}_{m-1}) + F_l(\eta^{m-1}\varphi + \widehat{x}_{m-1})\}$$

с непрерывно обратимым оператором $\overline{B} = B + \sum\limits_{1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$, и $\eta^m = \eta^{m-1} - \langle \eta^0_{n+1}A(\eta^{m-1}\varphi + \widehat{x}_m) + F_l(\eta^{m-1}\varphi + \widehat{x}_m), D^{-1}\Psi \rangle$, $m = 1, 2, \dots$, $\eta^0 = (\eta^0_1, \dots, \eta^0_n)'$, $\widehat{x_0} = 0$, сходится к решению $x(\varepsilon)$ уравнения (23) при $|\varepsilon| < \rho$.

Пусть в этом примере $E_1 = E_2 = H$, операторы B, A самосопряженные $\langle F_l(\eta\varphi), \varphi_i \rangle = \frac{\partial V}{\partial \eta_i}$, $i = 1, \dots, n$, и матрица $\|\langle A\varphi_i, \varphi_k \rangle\|^n_{i,k=1}$ определенно положительная (или определенно отрицательная). Тогда гарантировано существование ненулевых вещественных решений системы (24). А именно, за $(\eta^0_1, \dots, \eta^0_n)$ можно брать точки экстремумов потенциала $V(\eta)$ на компакте $\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} \langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle \eta_i\eta_j = 1$ (или на $\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} \langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle \eta_i\eta_j = -1$), а за η^0_{n+1} — соответствующие множители Лагранжа.

Примеры решения интегральных уравнений одноступенчатым вариантом подобной схемы см. в [13]–[15].

Замечание 2. В общем случае система (24) может не иметь решений полного ранга. Соответствующие разветвляющие решения "неполного ранга" требуют привлечения других методов и пока изучены слабо. В условиях групповой симметрии [18] уравнения (1) в этом случае для построения итерационных схем можно привлечь результаты из [11], [13], [15]. Смотри также п. 3, пример в [13], работы [19], [15].

Заключение

В процессе итераций (17)–(21) в общем случае строятся три последовательности

$$\{\varepsilon^r\Gamma y_m\}, \quad \{\xi^m\varphi\} \quad \text{и} \quad \{\lambda_m\}. \tag{25}$$

Первая из них сходится к проекции $(J - P)x(\varepsilon)$, вторая — к проекции $Px(\varepsilon)$ искомого решения, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = \lambda(\varepsilon)$. В случае $N \geq 2$ при построении y_m требуется решить $N-1$ линейное уравнение с непрерывно обратимым оператором. Вектор ξ^m (λ_m, если $* \neq n + 1$) определяется по вычисленному Γy_m. Таким образом, всего для определения m-х членов последовательностей (25) надо решить N линейных уравнений.

Схема (17)–(21) реализует в итерационном виде развитие идей аналитического метода Ляпунова–Шмидта [1]. В дополнение к этим идеям допускается смена параметра униформизации ветвей. Например, наряду с параметром λ, входящим в уравнение, можно использовать любой из коэффициентов проекции Px искомого решения. Это дает возможность "обходить" некоторые типы точек ветвления и в сочетании с результатами работы [20] расширить область сходимости метода.

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 527 с.
2. Брюно А.Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* – М.: Наука, 1998. – 288 с.
3. Zeidler E. *Nonlinear functional analyses and its Applications.* I: *Fixed-point theorems.* – Transl. from Germ. New York: Springer-Verlag, 1986. – 897 p.
4. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 491 с.
5. Логинов Б.В. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой симметрии.* – Ташкент: ФАН, 1985. – 184 с.
6. Keller N.B. *Numerical solution of bifurcation and nonlinear problems* // Application of bifurcation theory, New York: Academic Press, 1977. – P. 359–384.
7. Moore G. *The numerical treatment of nontrivial bifurcation points* // Numer. funct. anal. and optim. – 1980. – № 2. – P. 44–72.
8. Allgower E.L., Schwetlick H. *A general view of minimally extended system for simple bifurcation points* // Z. angew. math. mech. – 1997. – Bd. 77. – № 2. – S. 83–97.
9. Langford W.F. *Numerical solution of bifurcation problems for ordinary differential equation* // Numer. math. – 1977. – Bd. 28. – № 2. – S. 71–190.
10. Сидоров Н.А. *Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления.* – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1982. – 312 с.
11. Логинов Б.В., Сидоров Н.А. *Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова–Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 5. – С. 681–691.
12. Сидоров Н.А. *Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 2. – С. 129–141.
13. Сидоров Н.А. *N-ступенчатый итерационный метод в теории ветвления решений нелинейных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 2. – С. 383–395.
14. Ермилова Н.В., Марканова Д.Ю. *Итерационные методы разветвляющихся решений в случае квазилинейной главной части уравнения разветвления* // В кн.: Приближенные методы анализа. – Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. пед. ин-та, 1997. – С. 54–63.
15. Сидоров Н.А., Ермилова Н.В., Марканова Д.Ю. *N-ступенчатые итерации, коммутируемость и квазилинейность уравнения разветвления в методе Ляпунова–Шмидта* // В кн.: Приближенные методы анализа. – Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. пед. ин-та, 1997. – С. 75–87.
16. Сидоров Н.А. *О неявной параметризации решений системы разветвления Ляпунова–Шмидта.* – Ред. журн. "Изв. вузов. Математика". – 1998. – 12 с. – Деп. ВИНИТИ № 2475-В98.
17. Сидоров Н.А., Треногин В.А. *Регуляризация простых решений нелинейных уравнений в окрестности точки ветвления* // Сиб. матем. журн. – 1978. – Т. 20. – № 1. – С. 180–183.
18. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 399 с.
19. Сидоров Н.А. *$(T - M)$-коммутируемость, ранг и итерации в теории разветвляющихся решений* // В кн.: Тр. 11-й Байкальск. международн. школы-семинара, 5–12 июля, 1998, секция 4. Численный анализ, обратные и некорректные задачи. Иркутск, 1998. – С. 169–172.
20. Sidorov N.A.,Abdullin V.R. *Interlaced branching equations and invariance in the theory of nonlinear equations* // In: "Proc. of the Conf. Symmetry and Perturbation Theory", Roma, December 16-22, 1998, World Scientific, 1999. – P. 309–313.

Иркутский государственный университет

Поступила 11.02.2000