ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.982

*Г.Ш. СКВОРЦОВА*

# О СЛАБОЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ ФАКТОРПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ

*Введение.* В 1973 г. А.В. Бухвалов и Г.Я. Лозановский показали [1], что ограниченные, выпуклые множества, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере в "хороших" банаховых решетках измеримых функций, обладают рядом свойств, близких к свойствам компактных множеств. В работах [2], [3] предложена "некоммутативная" версия этой теории. Как одно из нетривиальных приложений результатов [1] А.В. Бухвалов отмечает исследования Годфруа слабой секвенциальной полноты факторпространств $L^1$, в частности, его доказательство известной теоремы Муни–Хавина о том, что $L^1/H_0^1$ слабо секвенциально полно [4]. В данной работе получены некоммутативные аналоги некоторых результатов Годфруа.

*Предварительные сведения. Топология локальной сходимости по мере.* Пусть $M$ — полуконечная алгебра Неймана, $M^{\text{pr}}$ — множество всех проекторов из $M$, и $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $M$. Норму оператора $a \in M$ обозначим через $\|a\|_\infty$. Пусть x — замкнутый, плотно определенный оператор в $H$, присоединенный к M, |x| — его модуль, $e_\lambda^{|x|}$ — спектральный проектор оператора |x|, соответствующий отрезку $[0,\lambda]$. Оператор называется вполне измеримым, если $\tau(1-e_\lambda^{|x|}) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$. Через $\mathcal{K}$ обозначим кольцо (относительно сильных алгебраических операций) вполне измеримых операторов. Базисом окрестностей нуля $N(\epsilon,\delta) = \{x \in \mathcal{K} \mid \exists q \in M^{\text{pr}} \ (\|xq\|_\infty \le \epsilon \text{ и } \tau(1-q) \le \delta)\}$, где $\epsilon, \delta > 0$, определяется топология сходимости по мере на $\mathcal{K}$. Положим $K(\epsilon,\delta,p) = \{x \in \mathcal{K} \mid \exists q \in M^{\text{pr}} \ (q \le p, \|qxq\|_\infty \le \epsilon, \tau(p-q) \le \delta)\}$, где $\epsilon,\delta > 0$, $p \in M^{pr}$, $\tau(p) < \infty$.

**Предложение 1.** *$\mathcal{K}$ есть топологическое векторное пространство, в котором семейство $\{K(\epsilon,\delta,p)\}$ образует базис окрестностей нуля.*

Введенную в предложении 1 топологию будем называть топологией локальной сходимости по мере в $\mathcal{K}$. Будем использовать символ $\xrightarrow{\tau}$ для обозначения сходимости в этой топологии. Эта сходимость изучается, например, в [5] и называется там слабо $\tau$-локально сходимостью. Легко показать, что $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ тогда и только тогда, когда $px_\alpha p \to pxp$ по мере для всех $p \in M^{\text{pr}}$, $\tau(p) < \infty$. Заметим, что операция умножения на оператор из $\mathcal{K}$ непрерывна в топологии локальной сходимости по мере.

*Обобщение теоремы Годфруа.* Перенесем конструкцию из [4] на случай пространства $L_1(\tau)$ интегрируемых по Сигалу (см. [6]) относительно следа $\tau$ операторов. Как известно, пространства $L_1(\tau)$ и $M_*$ изометрически изоморфны так же, как $M$ и $L_1(\tau)^*$. Отождествим соответствующие изометрически изоморфные пространства. Пусть $M_s^*$ — множество сингулярных функционалов, тогда $M^* = L_1(\tau) \oplus M_s^*$ ([7]).

Пусть $X$ — банахово пространство и $Y$ — его подпространство. Проектор $\pi$ из $X$ на $Y$ называется $L$-проектором, если $\|x\| = \|\pi(x)\| + \|x - \pi(x)\|$ для всех $x \in X$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00129).

**Теорема 1.** *Пусть $X$ — банахово подпространство $L_1(\tau)$. Если единичный шар $X$ замкнут в топологии локальной сходимости по мере, то факторпространство $L_1(\tau)/X$ слабо секвенциально полно.*

Доказательство этой теоремы естественным образом разбивается на доказательство следующих трех утверждений.

1. Из замкнутости единичного шара $X$ в топологии локальной сходимости по мере следует $X^{**} = X \oplus (X^{**} \cap M_s^*)$.

2. Пусть банахово пространство $Z$ дополняемо в $Z^{**}$, т. е. $Z^{**} = Z \oplus Z_{\mathrm{s}}$, причем $\|z\| = \|z'\| + \|z''\|$ для любых $z' \in Z$, $z'' \in Z_{\mathrm{s}}$, $z = z' + z''$. Если для замкнутого подпространства $Y \subset Z$ имеем $Y^{**} = Y \oplus (Y^{**} \cap Z_{\mathrm{s}})$, то существует $L$-проектор, действующий из $(Z/Y)^{**}$ на $Z/Y$.

3. Пусть $Y$ — банахово пространство такое, что существует $L$-проектор, действующий из $Y^{**}$ на $Y$. Тогда $Y$ слабо секвенциально полно.

Прототипом теоремы 1 является теорема, доказанная Годфруа в [4], где изучались факторпространства пространства $L_1(\mu)$ интегрируемых функций на пространстве с конечной мерой $\mu$. При доказательстве первого утверждения существенно используем полученный ранее [2], [3] некоммутативный аналог теоремы Бухвалова–Лозановского. Доказательство второго утверждения проводится аналогично соответствующей части доказательства теоремы 3 из [4], где в качестве $Z$ рассматривается пространство $L_1(\mu)$. Третье утверждение есть лемма 4 из [4].

Ниже даны примеры применения теоремы 1.

*Пространства, построенные по семейству проекторов.* Пусть множество $P \subset M^{\mathrm{pr}}$. Обозначим $\Gamma(P) = \{x \in L_1(\tau) \mid p^{\perp} x p = 0 \text{ для всех } p \in P\}$. Ясно, что $\Gamma(P)$ — замкнутое подпространство $L_1(\tau)$. Из непрерывности операции умножения на оператор из $\mathcal{K}$ в топологии локальной сходимости по мере и теоремы 1 вытекает

**Теорема 2.** *Факторпространство $L_1(\tau)/\Gamma(P)$ слабо секвенциально полно.*

**Пример.** Пусть $H$ — гильбертово пространство с базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. $M = B(H)$ и $\mathrm{tr}$ — канонический след. $P = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $p_n$ — проектор на линейную оболочку $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Тогда $L_1(\mathrm{tr})$ — пространство ядерных операторов, $\Gamma(P)$ — подпространство ядерных верхнетреугольных операторов, а топология локальной сходимости по мере совпадает с топологией слабой операторной сходимости. По теореме 2 факторпространство $L_1(tr)/\Gamma(P)$ является слабо секвенциально полным.

*Пространство аналитических интегрируемых операторов.* Пусть $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ — ультраслабо непрерывная группа $^*$-автоморфизмов $M$, причем след $\tau$ является $\alpha_t$-инвариантным. Для $f \in L_1(\mathbf{R})$ определено отображение (см., напр., [8]) из $M$ в $M$ по формуле:

$$\alpha_f(x) = \int f(t)\alpha_t(x)dt, \quad x \in M,$$

где интеграл понимается в $^*$-слабом смысле. Используя $\alpha_t$-инвариантность следа $\tau$ и изометрическую изоморфность пространств $L_1(\tau)$ и $M_*$, а также пространств $M$ и $L_1(\tau)^*$, распространим отбражение $\alpha_f(\cdot)$ на пространство $L_1(\tau)$. Для $x \in M \cup L_1(\tau)$ определим спектр Арвесона $\sigma(x) = \cap \ker \widehat{f}$, где $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции $f$, а пересечение берется по тем функциям $f$, что $\alpha_f(x) = 0$. Оператор $x \in M \cup L_1(\tau)$ назовем аналитическим, если $\sigma(x) \subset [0, \infty)$ (см. [8]). Через $H_1$ обозначим пространство аналитических операторов из $L_1(\tau)$, $H_\infty$ — пространство аналитических операторов из $M$ и $H_\infty^0 = \{x \in M \mid \sigma(x) \subset (0, \infty)\}$. Заметим, что если $M = L_\infty(\mathbf{R})$ и $(\alpha_t(x))(s) = x(t+s)$ — группа сдвигов, то данные пространства совпадают с пространствами Харди на прямой. Алгебру $M$ назовем $\mathbf{R}$-финитной (относительно $\alpha_t$), если существует точное нормальное $\alpha_t$-инвариантное условное ожидание $\Phi$ из $M$ в $H_\infty \cap H_\infty^*$, где $H_\infty^* = \{x^* \mid x \in H_\infty\}$. Пусть $\alpha_t(x) = U_t x U_t^*$, где $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ — сильно непрерывная унитарная группа в $H$, с генератором $A$, присоедененным к $M$, т. е. $\{\alpha_t\}_{t \in R}$ — группа внутренних $*$-автоморфизмов $M$. С группой внутренних $*$-автоморфизмов будем связывать $P = \{p_{[\lambda,\infty)}\}_{t\in\mathbf{R}}$ — линейно упорядоченное множество спектральных проекторов оператора $A$. Известно (см. [8]), что

1) $H_1 = \{x \in L_1(\tau) \mid \tau(xy) = 0$ для всех $y \in H^0_\infty\}$,
2) если $M$ является $\mathbf{R}$-финитной, то $H^0_\infty = \{x \in H_\infty \mid \Phi(x) = 0\}$,
3) если $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ — ультраслабо непрерывная группа внутренних $^*$-автоморфизмов $M$ и $P$ — соответствующее линейно упорядоченное множество спектральных проекторов, то $H_\infty = \{x \in M \mid p^\perp xp = 0$ для всех $p \in P\}$.

**Теорема 3.** *Пусть* tr *— канонический след на $B(H)$ и $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ — произвольная ультраслабо непрерывная группа $^*$-автоморфизмов $B(H)$. Тогда $L_1(tr)/H_1$ слабо секвенциально полно.*

**Лемма 1.** *Пусть $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ — ультраслабо непрерывная группа внутренних $^*$-автоморфизмов $\mathbf{R}$-финитной алгебры $M$ и $P$ — соответствующее множество спектральных проекторов. Тогда $H_1 = \Gamma(P)$.*

Не ограничивая общности, будем считать, что $P$ содержит нулевой оператор, $\mathbf{1}$ и замкнуто в сильной операторной топологии. Построим с помощью конечного упорядоченного семейства проекторов $F = \{0 = p_0 < p_2 < \cdots < p_n = \mathbf{1}\} \subset P$, нормальное условное ожидание на $M$ по формуле $\sigma_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x a_i$, где $a_i = p_i - p_{i-1} = p_i p_{i-1}^\perp$ — атом подмножества $F$. Отображение $\sigma_F$ можно продолжить на $\mathcal{K}$. Будем считать, что семейство конечных подмножеств $F \subset P$ упорядочено по включению. Тогда по предложению 6.1.8 из [9] из условий теоремы следует, что для всякого $x \in M$, $\sigma_F(x) \xrightarrow{F} \Phi(x)$ сильно. Докажем сначала, что для $y \in M$, $p \in P$ оператор $pyp^\perp \in H^0_\infty$. Так как $q^\perp pyp^\perp q = 0$ для всех $q \in F$, то $pyp^\perp \in H_\infty$. Можно найти такое $F_0$, что для всех $F \supset F_0$ имеем $\sigma_F(pyp^\perp) = 0$. Так как $\sigma_F(pyp^\perp) \xrightarrow{F} \Phi(pyp^\perp)$, то $\Phi(pyp^\perp) = 0$. Докажем теперь, что $H_1 \subset \Gamma(P)$. Пусть $x \in H_1$ и $p \in P$. Из доказанного $\tau(xpyp^\perp) = \tau(p^\perp xpy) = 0$ для всех $y \in M$. Значит, $p^\perp xp = 0$, т. е. $x \in \Gamma(P)$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in \Gamma(P)$, $y \in H^0_\infty$ произвольны. Так как $\sigma_F(x) \xrightarrow{F} \Phi(x)$ ультраслабо, то для всякого $\epsilon > 0$ найдется семейство $F \subset P$ такое, что $|\tau(xy)| = |\tau(\sigma_F(xy))| = |\tau(\sigma_F(x)\sigma_F(y))| = |\tau(x\sigma_F(y))| < \epsilon$. Значит, $\tau(xy) = 0$.

**Теорема 4.** *В условиях леммы 1 факторпространство $L_1(\tau)/H_1$ слабо секвенциально полно.*

**Теорема 5.** *Пусть $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ — ультраслабо непрерывная группа внутренних $^*$-автоморфизмов алгебры $M$ с точным нормальным конечным следом $\tau$. Тогда факторпространство $L_1(\tau)/H_1$ слабо секвенциально полно.*

*Пространство интегрируемых операторов, построенное по подалгебре.* Пусть $N$ — подалгебра Неймана алгебры $M$ и $\tau_N$ — ограничение следа $\tau$ на $N$. Пусть след $\tau_N$ также полуконечен и $\mathcal{K}_N$ — пространство вполне измеримых операторов относительно $\tau_N$. Очевидно, $L_1(\tau_N)$ является замкнутым подпространством $L_1(\tau)$. Отображение ограничения $\phi \mapsto \phi|_N$ ($\phi \in M_*$) задает линейное отображение $\Phi : L_1(\tau) \to L_1(\tau_N)$. Ограничение отображения $\Phi$ на $L_1(\tau) \cap M$ единственным образом продолжается до точного нормального условного ожидания из $M$ в $N$, сохраняющего след, и само отображение $\Phi$ называют условным ожиданием из $L_1(\tau)$ в $L_1(\tau_N)$.

**Лемма 2.** *Единичный шар пространства $L_1(\tau_N)$ замкнут в $\mathcal{K}$ в топологии локальной сходимости по мере относительно $\tau$.*

Пусть $x_\alpha \in L_1(\tau_N), \|x_\alpha\| < 1$ и $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, где $x \in \mathcal{K}$. Из аналога теоремы Фату ([2], предложение 3) следует $x \in L_1(\tau)$.

Если след $\tau$ конечен, то в $\mathcal{K}_N$ топологии сходимости локально по мере относительно следов $\tau$ и $\tau_N$ совпадают с топологией сходимости по мере относительно следа $\tau_N$. Так как $\mathcal{K}_N$ полно в топологии сходимости по мере, то $x \in \mathcal{K}_N$.

Пусть теперь след $\tau$ бесконечен. Тогда найдется сеть $p_\beta \in N^{\mathrm{pr}}$, $\tau_N(p_\beta) < \infty$, такая, что $p_\beta \nearrow \mathbf{1}$. Тогда для каждого $\beta$ сеть $p_\beta x_\alpha p_\beta \to p_\beta x p_\beta$ в топологии сходимости по мере относительно следа $\tau$. Так как $p_\beta x_\alpha p_\beta \in \mathcal{K}_N$, то аналогично случаю конечного следа $p_\beta x p_\beta \in \mathcal{K}_N$. Несложно доказать, что $p_\beta x p_\beta \to x$ в $\sigma(L_1(\tau), M)$-топологии. Заметим, что отображение $\Phi$ является $\sigma(L_1(\tau), M)$–$\sigma(L_1(\tau_N), N)$-непрерывным отображением. Следовательно, $p_\beta x p_\beta = \Phi(p_\beta x p_\beta) \to \Phi(x)$ в $\sigma(L_1(\tau_N), N)$-топологии. Так как из сходимости в $\sigma(L_1(\tau_N), N)$-топологии в пространстве $L_1(\tau_N)$ следует сходимость в $\sigma(L_1(\tau), M)$-топологии в пространстве $L_1(\tau_N)$, то сеть $p_\beta x p_\beta \to \Phi(x)$ в $\sigma(L_1(\tau), M)$-топологии. Таким образом, $x = \Phi(x) \in L_1(\tau_N)$.

**Теорема 6.** *Факторпространство $L_1(\tau)/L_1(\tau_N)$ слабо секвенциально полно.*

Автор выражает глубокую признательность О.Е. Тихонову за полезные обсуждения постановок задач и результатов исследований, а также А.М. Бикчентаеву, ознакомившему автора с неопубликованным доказательством непрерывности операции умножения на оператор в топологии локальной сходимости по мере.

## Литература

1. Бухвалов А.В., Лозановский Г.Я. *О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 212. – № 6. – С. 1273–1275.
2. Скворцова Г.Ш., Тихонов О.Е. *Выпуклые множества в некоммутативных $L^1$-пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере* // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 8. – С. 48–55.
3. Скворцова Г.Ш. *Некоммутативный аналог теоремы Бухвалова–Лозановского о выпуклых подмножествах $L_1$* // Казанск. ун-т. Казань, 2000. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.05.2000. – № 1489-В00.
4. Godefroy G. *Sous-espaces bien disposès de $L^1$-applications* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 286. – № 1. – P. 227–249.
5. Ciach L.J. *Some remarks on convergence in measure and on dominated sequence of operators measurable wits respect to a semifinite von Neumann algebra* // Col. Math. – 1988. – V. LV. – № 1. – P. 109–121.
6. Segal I.E. *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. Math. – 1953. – V. 57. – P. 401–157.
7. Takesaki M. *Theory of Operator Algebras.* I. – Springer-Verlag, 1979. – 415 p.
8. Loebl R.I., Muhli P.S. *Analyticity and flows in von Neumann algebras* // J. Func. Anal. – 1978. – V. 29. – № 2. – P. 214–252.
9. Arveson W.B. *Analyticity in operator algebras* // Amer. J. Math. – 1967. – V. 89. – № 3. – P. 578–642.

*Казанский государственный университет*

*Поступила* 12.02.2002