ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 517.938

В.А. ЮРКО

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАЗНОСТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Введение

В статье исследуется задача Коши для бесконечных интегрируемых динамических систем, связанных с обратной спектральной задачей для разностных несамосопряженных операторов вида

$$(ly)_n = \sum_{\mu=0}^{q+1} a_{n,\mu-q} y_{n+\mu-q}, \quad a_{n1} \neq 0, \;\; a_{n,-q} = 1, \;\; q \geq 1. \tag{1}$$

Интегрируемые динамические системы, связанные с разностными операторами второго порядка ($q = 1$), такие, как цепочка Тоды, ленгмюровская цепочка и другие, достаточно полно изучены в работах многих авторов (см. [1]–[5] и библиографию к ним). В этих работах применялся метод обратной задачи теории рассеяния, когда a_{n0}, $a_{n1} - 1$ "малы" на бесконечности. В [6] исследовалась задача Коши для полубесконечной цепочки Тоды в более широком классе ограниченных при каждом значении времени коэффициентов. Интегрируемые динамические системы, связанные с разностными операторами высших порядков ($q > 1$), изучены весьма мало, т. к. постановка и решение обратной задачи в этом случае сталкивается с трудностями, особенно в случае неограниченных на бесконечности коэффициентов.

Данное исследование было стимулировано, с одной стороны, работами [7], [8], в которых впервые были указаны важные интегрируемые динамические системы, связанные с двучленными разностными операторами вида (1) при $q > 1$, когда $a_{n,-j} = 0$ при $j = \overline{0, q-1}$ (напр., системы $\dot a_n = a_n\big(\prod\limits_{k=1}^{q} a_{n+k} - \prod\limits_{k=1}^{q} a_{n-k}\big)$), а с другой стороны, — работами [9], [10], в которых исследовалась обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков и был предложен метод решения обратной задачи по заданной матрице Вейля оператора.

При фиксированном $q \geq 1$ рассмотрим следующую задачу Коши для полубесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot a_{nj}(t) = a_{n1}(t) a_{n+1,j-1}(t) - a_{n+j-1,1}(t) a_{n,j-1}(t), \tag{2}$$

$$a_{nj}(0) = a^0_{nj}. \tag{3}$$

Здесь $-q+1 \leq j \leq 1$; $n \geq q$ при $j = 1$; $n \geq q - j$ при $j \leq 0$; $a_{n,-q} = 1$, $a_{q-1,1} = 0$, $a_{q+j-1,-j} = 0$ при $j = \overline{1, q-1}$; a^0_{nj} — комплексные числа, $a^0_{n1} \neq 0$. В частности, при $q = 1$ система (2) представляет собой цепочку Тоды. Система (2) является разностным аналогом уравнений типа КдФ и равносильна уравнению Лакса $\dot L = [A, L]$, где $L = [L_{nj}]_{n,j\geq q}$, $A = [A_{nj}]_{n,j\geq q}$, $A_{nj} = a_{n1}\delta_{n,j-1}$, $L_{nj} = a_{n,j-n}$; $a_{nj} = 0$ при $j > 1$ и $j < -q$, δ_{ni} — символ Кронекера. Таким образом, интегрирование задачи Коши (2), (3) связано с исследованием спектральных свойств и решением

Работа выполнена при частичной поддержке гранта № 96-1.7-4 ГК РФ по высшему образованию (конкурсный центр фундаментального естествознания).

обратной задачи для разностных операторов вида (1). Отметим, что никаких ограничений на рост коэффициентов a_{nj} оператора l на бесконечности не накладывается, и поэтому даже при $q = 1$ полученные результаты могут представлять интерес, т.к. они обобщают и усиливают результаты работы [6].

В данной статье в § 1 исследуются разностные операторы вида (1). В качестве основной спектральной характеристики вводится матрица Вейля, которая является аналогом хорошо известной функции Вейля для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля. Получено решение обратной задачи нахождения коэффициентов a_{nj} оператора l по заданной матрице Вейля. В § 2 найдена эволюция матрицы Вейля во времени в силу системы (2), доказана интегрируемость эволюционных дифференциальных уравнений для компонент матрицы Вейля и приведен алгоритм решения задачи Коши (2), (3) методом обратной спектральной задачи. В § 3 получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2), (3) в классах аналитических и мероморфных функций.

Отметим, что аналогичные результаты могут быть получены и для системы (2) на всей оси. Данный метод позволяет исследовать также и более общие динамические системы, когда матрицы L и A имеют более сложную структуру.

1. Разностные операторы высших порядков

При фиксированном $q \geq 1$ рассмотрим уравнение

$$(ly)_n \equiv \sum_{\mu=0}^{q+1} a_{n,\mu-q} y_{n+\mu-q} = \lambda y_n, \quad n \geq q, \tag{4}$$

где $y = [y_n]_{n\geq 0}$, a_{nj} — комплексные числа, $a_{n,-q} = 1$, $a_{n1} \neq 0$ при $n \geq q$; $a_{n,-j} = 0$ при $n - q + 1 \leq j \leq q - 1$, $q \leq n \leq 2q - 2$. В этом параграфе строится матрица Вейля для несамосопряженного оператора l, исследуются ее свойства и рассматривается обратная задача восстановления коэффициентов оператора по матрице Вейля. Получен алгоритм решения обратной задачи, необходимые и достаточные условия ее разрешимости, доказана единственность.

Введем обозначения. Пусть A_R (M_R) — множество аналитических (мероморфных) в круге $|t| < R$ функций; $A = \bigcup_{R>0} A_R$, $M = \bigcup_{R>0} M_R$; A' — множество последовательностей $\{\alpha_k\}_{k\geq 1}$ таких, что существует $\delta > 0$ (свое для каждой последовательности), при котором $\alpha_k = O((k/\delta)^k)$. Запись $\{f_k(t)\}_{k\geq 1} \in A$ (A^0) означает, что существует $R > 0$ такое, что $f_k(t) \in A_R$ $(f_k(t) \neq 0$, $|t| < R)$ при всех k.

Пусть Λ — множество многочленов вида

$$F(\lambda) = \sum_{k=-i}^{j} F_k \lambda^k$$

$(i, j \geq 0$ свои для каждого многочлена). Обозначим через $\mathcal{F}$ множество линейных функционалов на Λ. Элементы $\mathcal{F}$ будем называть обобщенными функциями (ОФ). Если $P \in \mathcal{F}$, то числа $P_{k+1} = (\lambda^k, P)$ называются моментами P. Здесь $(\cdot, P)$ обозначает действие P. Ясно, что ОФ $P \in \mathcal{F}$ своими моментами определяется однозначно по формуле $(F(\lambda), P) = \sum_k F_k P_{k+1}$, $F(\lambda) \in \Lambda$. ОФ $P \in \mathcal{F}$ удобно записывать в виде формального ряда

$$P(\lambda) = \sum_k P_k / \lambda^k.$$

ОФ $P \in \mathcal{F}$ можно умножать на элементы Λ по формуле $(F(\lambda), G(\lambda)P) = (F(\lambda)G(\lambda), P)$, $F(\lambda), G(\lambda) \in \Lambda$. Это соответствует формальному умножению ряда на $G(\lambda)$. Через $\mathcal{F}_l$ обозначим множество ОФ $P \in \mathcal{F}$, для которых $P_k = 0$ при $k \le l$. Если $\{P_k\}_{k\ge1} \in A'$, то можно определить ОФ $\sigma(\lambda, t) = e^{\lambda t} P(\lambda)$ с моментами

$$\sigma_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{k+j} \frac{t^j}{j\,!}.$$

Пусть $\Phi_n(\lambda) = [\Phi_n^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^{\top}$, $n \ge 0$, — решение уравнения (4) при условиях

$$\Phi_n^i(\lambda) = \delta_{i,n+1} \quad (n = \overline{0, q-1}); \quad \Phi_n^i(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Phi_{kn}^i \in \mathcal{F}_0. \tag{5}$$

Здесь $\top$ — знак транспонирования (т. е. $[\Phi_n^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^{\top}$ — вектор-строка). Решения $\Phi_n^i(\lambda)$ будем называть решениями Вейля оператора l.

Подставляя (5) в (4), получаем соотношения

$$\Phi_{k+1,n}^i = \sum_{\mu=0}^{q+1} a_{n,\mu-q} \Phi_{k,n+\mu-q}^i, \quad n \ge q, \ \ i = \overline{1,q}, \ \ k \ge 0, \tag{6}$$

$$\Phi_{0n}^i = 0, \quad n \ge q, \tag{7}$$

$$\Phi_{0n}^i = \delta_{i,n+1}, \quad \Phi_{kn}^i = 0, \ \ k \ge 1, \ \ n = \overline{0, q-1}. \tag{8}$$

Отсюда последовательно при $k = 0, 1, 2, \ldots$ находим Φ_{kn}^i. Таким образом, решение Вейля $\{\Phi_n(\lambda)\}_{n\ge1}$ существует, единственно и может быть построено с помощью соотношений (6)–(8). В частности,

$$\Phi_{kn}^i = 0 \quad \text{при} \quad n \ge q(k+1). \tag{9}$$

Обозначим $s = [n/q]$, где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Тогда $n = qs + m$, $0 \le m \le q-1$, и соотношения (6), (9) принимают вид

$$\Phi_{k+1,qs+m}^i = \sum_{\mu=0}^{q+1} a_{qs+m,\mu-q} \Phi_{k,q(s-1)+m+\mu}^i, \quad s \ge 1, \ \ k \ge 0, \ \ i = \overline{1,q}, \ \ m = \overline{0, q-1}, \tag{10}$$

$$\Phi_{k,qs+m}^i = 0 \quad \text{при} \quad k < s \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\Phi_{qs+m}^i(\lambda) = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Phi_{k,qs+m}^i \in \mathcal{F}_s.$$

Из (10) при $k = s-1$ вычисляем

$$\Phi_{s,qs+m}^i = \sum_{\mu=0}^{i-1-m} a_{qs+m,\mu-q} \Phi_{s-1,q(s-1)+m+\mu}^i, \quad m \le i-1, \tag{12}$$

$$\Phi_{s,qs+i-1}^i = 1, \quad \Phi_{s,qs+m}^i = 0, \quad i \le m. \tag{13}$$

Введем матрицу $\mathfrak{M}(\lambda) = [\mathfrak{M}^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^{\top}$ по формуле $\mathfrak{M}^i(\lambda) = \Phi_q^i(\lambda)$. Матрицу $\mathfrak{M}(\lambda)$ будем называть матрицей Вейля оператора l. Ясно, что

$$\mathfrak{M}^i(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \mathfrak{M}_k^i \in \mathcal{F}_1, \quad \mathfrak{M}_1^i = \delta_{i1}, \quad i = \overline{1,q}.$$

Обратная задача ставится следующим образом: по заданной матрице Вейля $\mathfrak{M}(\lambda)$ построить оператор l.

Перейдем к исследованию данной обратной задачи. Пусть $P_n(\lambda)$, $Q_n^i(\lambda)$, $i=\overline{1,q}$, $n\ge 0$, — решения уравнения (4) при начальных условиях $P_n(\lambda)=\delta_{nq}$, $Q_n^i(\lambda)=\delta_{n+1,i}$, $n=\overline{0,q}$. Тогда

$$P_{k+q}(\lambda)=\sum_{i=0}^{k} c_{ik}\lambda^i, \quad k\ge 0, \ \ c_{kk}\ne 0, \ \ c_{00}=1. \tag{14}$$

Подставляя (14) в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при λ^i, находим

$$\sum_{\mu=0}^{q+1} a_{k+q,\mu-q}c_{i,k+\mu-q}=c_{i-1,k}, \quad i=\overline{0,k+1}.$$

Здесь доопределено $c_{ik}=0$ при $i<0$ и $i>k$. Отсюда получаем рекуррентные формулы для определения коэффициентов a_{nj} через c_{ik}:

$$a_{nj}=(c_{n+j-q,n+j-q})^{-1}\Big(c_{n+j-q-1,n-q}-\sum_{\mu=j+1}^{1} a_{n\mu}c_{n+j-q,n+\mu-q}\Big), \tag{15}$$

где $-q+1\le j\le 1$; $n\ge q$ при $j=1$; $n\ge q-j$ при $j\le 0$. В частности, $a_{n1}=(c_{n+1-q,n+1-q})^{-1}c_{n-q,n-q}$.

Обозначим $R_n(\lambda)=[R_n^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}$; $R_{qs+m}^i(\lambda)=\delta_{i,m+1}\lambda^s$, $m=\overline{0,q-1}$.

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$(1,P_{k+q}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_n(\lambda))=\delta_{nk}, \quad 0\le n\le k, \tag{16}$$

$$(1,P_{k+q}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_n(\lambda))=0, \qquad 0\le k<n\le q-1. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим $Q_n(\lambda)=[Q_n^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^{\top}$, $z_n(\lambda)=\Phi_n(\lambda)-Q_n(\lambda)-P_n(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)$, $n\ge 0$. Ясно, что $\{z_n(\lambda)\}_{n\ge 0}$ — решение уравнения (4) и при этом $z_0(\lambda)=z_1(\lambda)=\dots=z_q(\lambda)=0$. Отсюда вытекает, что $z_n(\lambda)=0$ при всех $n\ge 0$ и, следовательно,

$$\Phi_n(\lambda)=Q_n(\lambda)+P_n(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda), \quad n\ge 0. \tag{18}$$

Далее, используя (18), имеем при $n=\overline{0,q-1}$, $k\ge 0$

$$(1,P_{k+q}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_n(\lambda))=(1,\Phi_{k+q}(\lambda)R_n(\lambda))=(1,\Phi_{k+q}^{n+1}(\lambda))=\Phi_{1,k+q}^{n+1}$$

и, следовательно, в силу (11)–(13) получаем соотношения (17) и (16) при $n=\overline{0,q-1}$. Воспользуемся теперь методом математической индукции. Предположим, что (16) доказано для $n=\overline{0,\mu-1}$; $\mu\ge q$. Тогда при $k\ge\mu$ имеем

$$(1,P_{k+q}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_\mu(\lambda))=(1,\lambda P_{k+q}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_{\mu-q}(\lambda))=$$
$$=\sum_{\xi=0}^{q+1} a_{k+q,\xi-q}(1,P_{k+\xi}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_{\mu-q}(\lambda))=(1,P_k(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_{\mu-q}(\lambda))=\delta_{k\mu}. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть* $T(\lambda)=[T^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^{\top}$, $T^i(\lambda)\in\mathcal{F}_1$, *и* $(1,P_{k+q}(\lambda)T(\lambda)R_n(\lambda))=0$ *при* $k\ge 0$, $n=\overline{0,q-1}$. *Тогда* $T(\lambda)=0$.

В самом деле, как и при доказательстве леммы 1, методом математической индукции получаем $(1,P_{k+q}(\lambda)T(\lambda)R_n(\lambda))=0$ при всех $k,n\ge 0$. Отсюда и из (14) вытекает равенство $(1,\lambda^iT(\lambda)R_n(\lambda))=0$ при всех $i,n\ge 0$ и, следовательно, $T(\lambda)=0$.

Обозначим $\Delta_k=\det[\mu_{in}]_{i,n=\overline{0,k}}$, $\mu_{in}=(1,\lambda^i\mathfrak{M}(\lambda)R_n(\lambda))$, $i,n\ge 0$. В силу леммы 1 $\mu_{in}=0$ при $0\le i<n\le q-1$, $\mu_{00}=1$ или, что то же самое, $\mathfrak{M}_1^1=1$, $\mathfrak{M}_k^i=0$ при $1\le k<i\le q$. Кроме того, нетрудно вычислить

$$\mathfrak{M}_i^i=\prod_{j=0}^{i-2} a_{q+j,1}, \quad i=\overline{2,q}.$$

Подставляя (14) в (16), получаем

$$\sum_{i=0}^{k} c_{ik}\mu_{i\nu} = \delta_{\nu k}, \quad 0 \le \nu \le k. \tag{19}$$

При фиксированном $k \ge 0$ (19) — линейная алгебраическая система относительно c_{ik} с определителем Δ_k. Покажем, что $\Delta_k \ne 0$ при всех $k \ge 0$. Предположим, что при некотором $k \ge 1$ $\Delta_j \ne 0$ $(j = \overline{0, k-1})$, $\Delta_k = 0$. Так как $\Delta_{k-1} \ne 0$, то ранг расширенной матрицы системы (19) равен $k+1$, что противоречит совместности системы (19). Так как $\Delta_0 = 1$, то отсюда вытекает, что $\Delta_k \ne 0$ при всех $k \ge 0$. Решая системы (19), получаем

$$c_{ik} = \frac{(-1)^{k-i}}{\Delta_k} \det[\mu_{j\nu}]_{j=\overline{0,k}\setminus i;\ \nu=\overline{0,k-1}}, \quad i = \overline{0,k}. \tag{20}$$

В частности, $c_{kk} = \Delta_{k-1}/\Delta_k$, $c_{00} = 1$.

Обозначим через M^0 множество матриц вида $\mathfrak{M}(\lambda) = [\mathfrak{M}^i(\lambda)]^{\top}_{i=\overline{1,q}}$, $\mathfrak{M}^i(\lambda) \in \mathcal{F}_1$, для которых $\mu_{00} = 1$, $\mu_{in} = 0$ $(0 \le i < n \le q-1)$.

Теорема 1. *Для того чтобы матрица $\mathfrak{M}(\lambda) \in M^0$ была матрицей Вейля оператора l вида* (4)*, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_k \ne 0$ при всех $k \ge 0$. При этом оператор l определяется матрицей Вейля однозначно и может быть найден по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. Дана матрица $\mathfrak{M}(\lambda)$.

1) Строим c_{ik} $(0 \le i \le k)$ по формулам (20).
2) Вычисляем a_{nj} по формулам (15).

Необходимость теоремы доказана выше. Докажем достаточность. Пусть задана матрица $\mathfrak{M}(\lambda) \in M^0$ такая, что $\Delta_k \ne 0$ при всех $k \ge 0$. Построим c_{ik}, a_{nj} согласно алгоритму 1. Тем самым построен оператор l вида (4). Построим также многочлены $P_n(\lambda)$ по формуле (14) при $n \ge q$; $P_n(\lambda) = 0$ при $n = \overline{0, q-1}$. Покажем, что многочлены $P_n(\lambda)$ удовлетворяют уравнению (4). Действительно, т. к. $c_{kk} \ne 0$, то

$$\lambda P_k(\lambda) = \sum_{j=q}^{k+1} \gamma_{jk} P_j(\lambda), \quad \gamma_{k+1,k} \ne 0. \tag{21}$$

Далее, по построению числа c_{ik} удовлетворяют соотношениям (19). Отсюда и из (14) получаем соотношения (16). Используя (16) и (21), последовательно при $\mu = q, q+1, \dots, k-q$ находим

$$\delta_{\mu,k-q} = (1, P_k(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_\mu(\lambda)) = (1, \lambda P_k(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_{\mu-q}(\lambda)) = \sum_{j=\mu}^{k+1} \gamma_{jk}(1, P_j(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_{\mu-q}(\lambda)) = \gamma_{\mu k}.$$

Таким образом,

$$\lambda P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{q+1} \widetilde{a}_{k,j-q} P_{k+j-q}(\lambda),$$

т. е. $P_n(\lambda)$ удовлетворяют уравнению $(\widetilde{l}y)_n = \lambda y_n$ с некоторыми коэффициентами $\widetilde{a}_{nj}$. Следовательно,

$$P_{k+q}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{c}_{ik}\lambda^i, \quad k \ge 0.$$

Сравнивая с (14), получаем $\widetilde{c}_{ik} = c_{ik}$ $(0 \le i \le k)$ и в силу (15) $\widetilde{a}_{nj} = a_{nj}$. Таким образом, многочлены $P_n(\lambda)$ удовлетворяют уравнению (4).

Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}}(\lambda)$ — матрица Вейля для построенного оператора l. Тогда по лемме 1

$$(1, P_{k+q}(\lambda)\widetilde{\mathfrak{M}}(\lambda)R_n(\lambda)) = \delta_{kn}, \quad 0 \le n \le k,$$
$$(1, P_{k+q}(\lambda)\widetilde{\mathfrak{M}}(\lambda)R_n(\lambda)) = 0, \qquad 0 \le k < n \le q-1.$$

Сравнивая эти соотношения с (16), (17) и используя лемму 2, получаем $\widetilde{\mathfrak{M}}(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda)$ $\Box$.

Следствие 1. Для того чтобы матрица $\mathfrak{M}(\lambda) \in M^0$ была матрицей Вейля для оператора l с вещественными коэффициентами, $a_{n1} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы μ_{in} были вещественными и $\Delta_k > 0$ при всех $k \ge 0$.

Пример. Пусть $q = 1$. Тогда

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}\mathfrak{M}_k \in \mathcal{F}_1, \quad \mathfrak{M}_1 = 1, \;\; \mu_{in} = \mathfrak{M}_{n+i+1}.$$

В случае, если $a_{n1} > 0$, a_{n0} вещественны, существует по крайней мере одна спектральная функция оператора l такая, что

$$\mathfrak{M}_{k+1} = (\lambda^k, \mathfrak{M}(\lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda), \quad k \ge 0.$$

Таким образом, числа $\{\mathfrak{M}_k\}_{k\ge1}$ являются моментами спектральной функции. Поэтому следствие 1 при $q = 1$ совпадает с теоремой о разрешимости проблемы моментов [11].

2. Интегрирование динамической системы методом обратной задачи

Рассмотрим задачу Коши (2), (3). Пусть $\mathring{\mathfrak{M}}(\lambda) = [\mathring{\mathfrak{M}}^i(\lambda)]^{\top}_{i=\overline{1,q}}$ — матрица Вейля оператора l^0 вида (4), построенного по начальным данным $\{a^0_{nj}\}$; $\{\mathring{\mathfrak{M}}^i_j\}_{j\ge1}$ — моменты $\mathring{\mathfrak{M}}^i(\lambda)$. Предположим, что существует аналитическое в точке $t = 0$ решение задачи Коши (2), (3) $\{a_{nj}(t)\} \in A$. Рассмотрим соответствующий разностный оператор $l = l(t)$ вида (4). Пусть $\Phi_n(t,\lambda)$, $\mathfrak{M}(t,\lambda)$ — решение Вейля и матрица Вейля для $l(t)$. Из (2) при $j = 1$, в частности, вытекает, что $a_{n1}(t) \ne 0$ и, следовательно, по теореме 1 $\Delta_k(t) \ne 0$, $k \ge 0$. Получим эволюционные уравнения для компонент матрицы Вейля $\mathfrak{M}(t,\lambda)$.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\dot{\mathfrak{M}}^1 = (\lambda - a_{q0})\mathfrak{M}^1 - 1, \tag{22}$$
$$\dot{\mathfrak{M}}^i = (\lambda - a_{q0})\mathfrak{M}^i - a_{q+i-2,1}\mathfrak{M}^{i-1}, \quad i = \overline{2,q}. \tag{23}$$

Доказательство. По построению решения Вейля $\Phi^i = [\Phi^i_n]_{n\ge q}$, $i = \overline{1,q}$, удовлетворяют уравнениям

$$L\Phi^i + \alpha^i = \lambda\Phi^i, \quad i = \overline{1,q}, \tag{24}$$

где $\alpha^i = [\delta_{n,i+q-1}]_{n\ge q}$. Дифференцируя (24) по t, получаем $\dot{L}\Phi^i + L\dot{\Phi}^i = \lambda\dot{\Phi}^i$. Так как $\{a_{nj}(t)\}$ — решения системы (2), то $\dot{L} = [A, L]$ и, следовательно,

$$L(\dot{\Phi}^i - A\Phi^i) = \lambda(\dot{\Phi}^i - A\Phi^i) + A\alpha^i, \quad i = \overline{1,q}. \tag{25}$$

Обозначим $\psi^i = \dot{\Phi}^i - A\Phi^i$, $\psi^i = [\psi^i_n]_{n\ge q}$. Вычисляем $\psi^i_n = \dot{\Phi}^i_n - a_{n1}\Phi^i_{n+1}$, $n \ge q$. Ясно, что $\psi^i_n \in \mathcal{F}_0$. Соотношения (25) принимают вид

$$L\psi^i = \lambda\psi^i + A\alpha^i, \quad i = \overline{1,q}. \tag{26}$$

Удобно доопределить ψ^i_n при $n = \overline{0,q-1}$ следующим образом

$$\psi^1_n = 0, \quad \psi^i_n = -a_{q+i-2,1}\Phi^{i-1}_n, \quad i = \overline{2,q}. \tag{27}$$

Тогда в силу (26) имеем

$$\sum_{\mu=0}^{q+1} a_{n,\mu-q}\psi^i_{n+\mu-q} = \lambda\psi^i_n, \quad n \ge q, \quad i = \overline{1,q}.$$

Так как $\psi^i_n \in \mathcal{F}_0$ и удовлетворяют начальным условиям (27) при $n = \overline{0,q-1}$, то в силу единственности решений Вейля получаем, что соотношения (27) верны также и при $n \ge q$. Тем самым приходим к эволюционным уравнениям для решений Вейля $\dot{\Phi}^1_n = a_{n1}\Phi^1_{n+1}$, $\dot{\Phi}^i_n = a_{n1}\Phi^i_{n+1} - a_{q+i-2,1}\Phi^{i-1}_n$, $i = \overline{2,q}$, $n \ge q$. В частности, при $n = q$ имеем

$$\dot{\mathfrak{M}}^1 = a_{q1}\Phi^1_{q+1}, \quad \dot{\mathfrak{M}}^i = a_{q1}\Phi^i_{q+1} - a_{q+i-2,1}\mathfrak{M}^{i-1}, \quad i = \overline{2,q}. \tag{28}$$

Так как $a_{q1}\Phi^1_{q+1} = (\lambda - a_{q0})\Phi^1_q - 1$, $a_{q1}\Phi^i_{q+1} = (\lambda - a_{q0})\Phi^i_q$, $i = \overline{2,q}$, то из (28) получаем соотношения (22) и (23). $\square$

Так как

$$\mathfrak{M}^i(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}^i_k}{\lambda^k} \in \mathcal{F}_1,$$

то равенства (22), (23) равносильны соотношениям для моментов

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{M}}^1_k &= \mathfrak{M}^1_{k+1} - a_{q0}\mathfrak{M}^1_k, \\ \dot{\mathfrak{M}}^i_k &= \mathfrak{M}^i_{k+1} - a_{q0}\mathfrak{M}^i_k - a_{q+i-2,1}\mathfrak{M}^{i-1}_k, \quad i = \overline{2,q}. \end{aligned} \tag{29}$$

Отсюда, в частности, вычисляем

$$\mathfrak{M}^1_1 = 1, \quad \mathfrak{M}^i_k = 0 \ \ (1 \le k < i \le q), \quad \mathfrak{M}^i_i = \prod_{j=0}^{i-2} a_{q+j,1}, \quad i = \overline{2,q}. \tag{30}$$

Проинтегрируем эволюционные уравнения (22), (23) при начальных условиях $\mathfrak{M}^i(0,\lambda) = \overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i(\lambda)$. Отметим, что в (22), (23), кроме $\mathfrak{M}^i(t,\lambda)$, неизвестными являются также и функции $a_{q0}(t)$, $a_{q+i-2,1}(t)$, $i = \overline{2,q}$.

Обозначим

$$B(t) = \exp\Big(\int_0^t a_{q0}(s)ds\Big).$$

Тогда из (22), (23) получаем

$$B(t)\mathfrak{M}^1(t,\lambda) = e^{\lambda t}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^1(\lambda) - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}B(\tau)d\tau, \tag{31}$$

$$B(t)\mathfrak{M}^i(t,\lambda) = e^{\lambda t}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i(\lambda) - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}B(\tau)a_{q+i-2,1}(\tau)\mathfrak{M}^{i-1}(\tau,\lambda)d\tau, \ \ i = \overline{2,q}. \tag{32}$$

Интеграл в (31) является целой аналитической по λ функцией. Поэтому $B(t)(1,\mathfrak{M}^1(t,\lambda)) = (1, e^{\lambda t}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^1(\lambda))$. Так как в силу (30) $(1,\mathfrak{M}^1(t,\lambda)) = \mathfrak{M}^1_1(t) = 1$, то отсюда получаем формулу $B(t) = (1, e^{\lambda t}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^1(\lambda))$ или

$$B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^1_{j+1}\frac{t^j}{j\,!}. \tag{33}$$

Тот же результат можно получить, исходя из (29). В самом деле, из (29) вытекает

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{M}^1_k(t)B(t)) = \mathfrak{M}^1_{k+1}(t)B(t)$$

и, следовательно, $\mathfrak{M}^1_k(t) = B^{(k-1)}(t)/B(t)$, $B^{(k-1)}(0) = \overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^1_k$. В частности, имеем $\{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^1_k\}_{k\ge 1} \in A'$.

Воспользуемся теперь соотношениями (32). Так как в силу (30) $(\lambda^{i-2},\mathfrak{M}^i(t,\lambda))=\mathfrak{M}^i_{i-1}(t)=0$, $i=\overline{2,q}$, то из (32) следует

$$(\lambda^{i-2},e^{\lambda t}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i(\lambda))=\int_0^t B(\tau)a_{q+i-2,1}(\tau)(\lambda^{i-2},e^{\lambda(t-\tau)}\mathfrak{M}^{i-1}(\tau,\lambda))d\tau.$$

Отсюда, учитывая (30), получаем

$$\frac{d}{dt}(\lambda^{i-2},e^{\lambda t}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i(\lambda))=B(t)a_{q+i-2,1}(t)(\lambda^{i-2},\mathfrak{M}^{i-1}(t,\lambda))=$$

$$=B(t)a_{q+i-2,1}(t)\mathfrak{M}^{i-1}_{i-1}(t)=B(t)a_{q+i-2,1}(t)\prod_{j=0}^{i-3}a_{q+j,1}(t).$$

Следовательно,

$$a_{q+i-2,1}(t)=\Bigl(B(t)\prod_{j=0}^{i-3}a_{q+j,1}(t)\Bigr)^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i_{j+i}\frac{t^j}{j\,!},\quad i=\overline{2,q},\tag{34}$$

и при этом $\{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i_{j+i}\}_{j\geq 0}\in A'$. Используя формулы (34), последовательно при $i=2,3,\dots,q$ вычисляем функции $a_{q+i-2,1}(t)$, а затем из (31), (32) находим $\mathfrak{M}^i(t,\lambda)$, $i=\overline{1,q}$. Так как $\Delta_k(t)\neq 0$, $k\geq 0$, то, решая обратную задачу изложенным в § 1 методом, вычисляем $\{a_{nj}(t)\}$. Таким образом, получаем следующий алгоритм решения задачи Коши (2), (3) методом обратной спектральной задачи.

Алгоритм 2. Даны $\{a^0_{nj}\}$, $a^0_{n1}\neq 0$.

1) Строим $\{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i_j\}_{j\geq 1}$, $i=\overline{1,q}$.
2) Вычисляем $B(t)$, $a_{q+i-2,1}(t)$, $i=\overline{2,q}$, по формулам (32), (34).
3) Находим $\mathfrak{M}^i(t,\lambda)$, $i=\overline{1,q}$, по формулам (31), (32) и вычисляем $\Delta_k(t)$, $k\geq 0$, по формулам $\Delta_k(t)=\det[\mu_{in}(t)]_{i,n=\overline{0,k}}$, $\mu_{in}(t)=(1,\lambda^i\mathfrak{M}(t,\lambda)R_n(\lambda))$.
4) Решая обратную задачу с помощью алгоритма 1, строим функции $\{a_{nj}(t)\}$.

Замечание. Алгоритм 2 работает и в случае, когда $a_{nj}(t)\in M$, т. е. в классе мероморфных функций.

3. Необходимые и достаточные условия существования решения

Будем искать решение задачи Коши (2), (3) в классе M. Очевидно, что если решение задачи в классе M существует, то оно единственно. Сформулируем необходимые и достаточные условия существования решения задачи (2), (3) в классе мероморфных функций.

Теорема 3. *Для того чтобы задача Коши* (2), (3) *имела решение* $a_{nj}(t)\in M$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i_j\}_{j\geq 1}\in A'$, $i=\overline{1,q}$. *При этом искомое решение может быть построено по алгоритму* 2. *Кроме того,* $a_{nj}(t)\in M_R$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{N}_i(t)\equiv\sum_{j=0}^{\infty}\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i_{j+i}\frac{t^j}{j\,!}\in M_R,\quad i=\overline{1,q}.$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия разрешимости в более узких классах A и A_R.

Теорема 4. *Для того чтобы задача Коши* (2), (3) *имела решение* $\{a_{nj}(t)\}\in A$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\{\overset{\circ}{\mathfrak{M}}{}^i_j\}_{j\geq 1}\in A'$, $i=\overline{1,q}$; $\{\Delta_k(t)\}_{k\geq 0}\in A^0$. *Кроме того,* $a_{nj}(t)\in A_R$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{N}_i(t)\in A_R$, $\mathfrak{N}_i(t)\neq 0$, $\Delta_k(t)\neq 0$, $|t|<R$, $i=\overline{1,q}$, $k\geq 0$.

Доказательство теорем 3 и 4. Необходимость доказана в § 2.

Достаточность. По заданным начальным данным $\{a^0_{nj}\}$ последовательно построим $\overset{\circ}{\mathfrak{M}}(\lambda)$, $B(t)$, $a_{q+i-2,1}(t)$, $i=\overline{2,q}$, $\mathfrak{M}(t,\lambda)$, $\Delta_k(t)$, $\{a_{nj}(t)\}$ согласно алгоритму 2. По построению функции $a_{nj}(t)$ принадлежат соответствующим классам функций, указанным в формулировках теорем, и $\mathfrak{M}(t,\lambda)$ является матрицей Вейля оператора $l(t)$. Кроме того, $a_{nj}(0)=a^0_{nj}$.

Покажем, что построенные функции $\{a_{nj}(t)\}$ являются решениями системы (2). Для этого рассмотрим матрицу $\Omega=[\Omega_{nj}]_{n,j\ge q}$, определяемую формулой $\Omega=\dot{L}-[A,L]$, где $A=[A_{nj}]_{n,j\ge q}$, $L=[L_{nj}]_{n,j\ge q}$, $A_{nj}=a_{n1}\delta_{n,j-1}$, $L_{nj}=a_{n,j-n}$; $a_{nj}=0$ при $j>1$ и $j<-q$. Ясно, что $\Omega_{nj}=0$ при $j>n+1$ и $j<n-q+1$. Доопределим $\Omega_{nj}=0$ при $j<q$.

Пусть $\{\Phi^i_n(t,\lambda)\}$ — решения Вейля для $l(t)$. Обозначим $\psi^i=\dot{\Phi}^i-A\Phi^i$, $\psi^i=[\psi^i_n]_{n\ge q}$, $\Phi^i=[\Phi^i_n]_{n\ge q}$. Тогда $\psi^i_n=\dot{\Phi}^i_n-a_{n1}\Phi^i_{n+1}$, $n\ge q$. Доопределим ψ^i_n при $n=\overline{0,q-1}$ по формуле

$$\psi^1_n=0,\quad \psi^i_n=-a_{q+i-2,1}\Phi^{i-1}_n,\quad i=\overline{2,q}. \tag{35}$$

Так как по построению имеют место соотношения (22), (23), то $\dot{\Phi}^1_q=a_{q1}\Phi^1_{q+1}$, $\dot{\Phi}^i_q=a_{q1}\Phi^i_{q+1}-a_{q+i-2,1}\Phi^{i-1}_q$, $i=\overline{2,q}$, и, следовательно,

$$\psi^1_q=0,\quad \psi^i_q=-a_{q+i-2,1}\Phi^{i-1}_q,\quad i=\overline{2,q}, \tag{36}$$

т. е. (35) верно и при $n=q$.

Далее, дифференцируя равенство $L\Phi^i+\alpha^i=\lambda\Phi^i$, $i=\overline{1,q}$, где $\alpha^i=[\delta_{n,i+q-1}]_{n\ge q}$, по t и используя соотношение $\dot{L}=[A,L]+\Omega$, получаем

$$L\psi^i-\lambda\psi^i-A\alpha^i+\Omega\Phi^i=0,\quad i=\overline{1,q}. \tag{37}$$

Соотношения (37) с учетом (35) при $n=\overline{0,q-1}$ можно переписать в виде

$$\sum_{\mu=0}^{q+1}a_{n,\mu-q}\psi^i_{n+\mu-q}-\lambda\psi^i_n+\sum_{\xi=0}^{q}\Omega_{n,n-q+1+\xi}\Phi^i_{n-q+1+\xi}=0,\quad n\ge q,\ \ i=\overline{1,q}. \tag{38}$$

Используя метод математической индукции, покажем, что при $k\ge q$ справедливы соотношения

$$\Omega_{k\xi}=0,\quad \xi=\overline{k-q+1,\,k+1}, \tag{39}$$

$$\psi^1_k=0,\quad \psi^i_k=-a_{q+i-2,1}\Phi^{i-1}_k,\quad i=\overline{2,q}. \tag{40}$$

В самом деле, в силу (35), (36) соотношения (40) верны при $k=\overline{0,q}$. Зафиксируем $n\ge q$ и предположим, что (40) верно при $k\le n$. Тогда равенства (38) принимают вид

$$\begin{cases} a_{n1}\psi^1_{n+1}+\sum\limits_{\xi=0}^{q}\Omega_{n,n-q+1+\xi}\Phi^1_{n-q+1+\xi}=0,\\ a_{n1}\psi^i_{n+1}+\sum\limits_{\xi=0}^{q}\Omega_{n,n-q+1+\xi}\Phi^i_{n-q+1+\xi}+a_{q+i-2,1}\Big(\lambda\Phi^{i-1}_n-\sum\limits_{\mu=0}^{q}a_{n,\mu-q}\Phi^{i-1}_{n+\mu-q}\Big)=0,\quad i=\overline{2,q}. \end{cases} \tag{41}$$

Обозначим $s=[n/q]$, т. е. $n=qs+m$, $0\le m\le q-1$. Тогда соотношения (41) можно записать следующим образом:

$$a_{qs+m,1}\psi^1_{qs+m+1}+a_{q+i-2,1}J^{i-1}_{m,s}+I^i_{m,s}=0,\quad i=\overline{1,q}, \tag{42}$$

где

$$J^0_{m,s}=0,\quad J^i_{m,s}=\lambda\Phi^i_{qs+m}-\sum_{\mu=0}^{q}a_{qs+m,\mu-q}\Phi^i_{qs+m+\mu-q},\quad i=\overline{1,q-1},\tag{43}$$

$$I^i_{m,s}=\sum_{\xi=0}^{q}\Omega_{qs+m,(s-1)q+m+\xi+1}\Phi^i_{(s-1)q+m+\xi+1},\quad i=\overline{1,q}.\tag{44}$$

Условимся, что одним и тем же символом $\varkappa_l(\lambda)$ будем обозначать различные ОФ из класса $\mathcal{F}_l$.

Преобразуем $J^i_{m,s}$, $i=\overline{1,q-1}$, используя (43), (10)–(13)

$$J^i_{m,s}=\lambda\Phi^i_{qs+m}-\sum_{\mu=q-m}^{q}a_{qs+m,\mu-q}\Phi^i_{qs+m+\mu-q}-\sum_{\mu=0}^{q-m-1}a_{qs+m,\mu-q}\Phi^i_{(s-1)+q+\mu+m}=$$
$$=\frac{1}{\lambda^{s-1}}\left(\Phi^i_{s,qs+m}-\sum_{\mu=0}^{q-m-1}a_{qs+m,\mu-q}\Phi^i_{s-1,(s-1)q+m+\mu}\right)+$$
$$+\frac{1}{\lambda^{s}}\left(\Phi^i_{s+1,qs+m}-\sum_{\mu=0}^{q}a_{qs+m,\mu-q}\Phi^i_{s,(s-1)q+\mu+m}\right)+\varkappa_{s+1}(\lambda).$$

В силу (12), (13) коэффициент при $1/\lambda^{s-1}$ равен 0. Действительно, при $i\geq m+1$

$$\Phi^i_{s,qs+m}-\sum_{\mu=0}^{q-m-1}a_{qs+m,\mu-q}\Phi^i_{s-1,(s-1)q+\mu+m}=\Phi^i_{s,qs+m}-\sum_{\mu=0}^{i-m-1}a_{qs+m,\mu-q}\Phi^i_{s-1,(s-1)q+\mu+m}=0,$$

а при $i\leq m$ каждое слагаемое в сумме, составляющей коэффициент при $1/\lambda^{s-1}$, равно нулю.

Далее в силу (10) коэффициент при $1/\lambda^s$ равен $a_{qs+m,1}\Phi^i_{s,qs+m+1}$. Таким образом,

$$J^i_{m,s}=\frac{1}{\lambda^s}a_{qs+m,1}\Phi^i_{s,qs+m+1}+\varkappa_{s+1}(\lambda),\quad i=\overline{1,q-1},\ \ m=\overline{0,q-1},\ \ s\geq 1.\tag{45}$$

Так как $\psi^i_n=\dot{\Phi}^i_n-a_{n1}\Phi^i_{n+1}$, то согласно (11), (13) имеем

$$\psi^i_{qs+m+1}\in\mathcal{F}_s,\ i\geq m+3;\quad \psi^i_{qs+m+1}\in\mathcal{F}_{s+1},\ i\leq m+2;\quad \psi^i_{qs+m+1}\in\mathcal{F}_{s+2},\ i=1,\ m=q-1.\tag{46}$$

Теперь из (42) найдем $I^i_{m,s}=-a_{qs+m,1}\psi^i_{qs+m+1}-a_{q+i-2,1}J^{i-1}_{m,s}$ и воспользуемся соотношениями (45), (46), (13). Получим

$$I^i_{m,s}\in\mathcal{F}_s,\ \ i\geq m+3;\quad I^i_{m,s}\in\mathcal{F}_{s+1},\ \ i\leq m+2;\quad I^1_{q-1,s}\in\mathcal{F}_{s+2}.$$

С другой стороны, воспользуемся соотношениями (44). Вычисления следует проводить отдельно для $m=\overline{0,q-2}$ и $m=q-1$. Пусть сначала $0\leq m\leq q-2$. Тогда, используя (44), (11), (13), после вычислений имеем

1) $I^{m+2}_{m,s}=\Omega_{qs+m,(s-1)q+m+1}(1/\lambda^{s-1}+\varkappa_s(\lambda))+\sum_{\xi=1}^{q-1}\Omega_{qs+m,(s-1)q+m+\xi+1}\varkappa_s(\lambda)+$
$+\Omega_{qs+m,qs+m+1}(1/\lambda^s+\varkappa_{s+1}(\lambda))$ при $i=m+2$;

2) $I^i_{m,s}=\sum_{\xi=0}^{i-m-3}\Omega_{qs+m,(s-1)q+m+\xi+1}\varkappa_{s-1}(\lambda)+\Omega_{qs+m,(s-1)q+i-1}(1/\lambda^{s-1}+\varkappa_s(\lambda))+$
$+\sum_{\xi=i-m-1}^{q}\Omega_{qs+m,(s-1)q+m+\xi+1}\varkappa_s(\lambda)$ при $i>m+2$;

3) $I^i_{m,s}=\sum_{\xi=0}^{q+i-m-3}\Omega_{qs+m,(s-1)q+m+\xi+1}\varkappa_s(\lambda)+\Omega_{qs+m,qs+i-1}(1/\lambda^s+\varkappa_{s+1}(\lambda))+\sum_{\xi=i}^{m+1}\Omega_{qs+m,qs+\xi}\varkappa_{s+1}(\lambda).$
при $1\leq i\leq m+1$.

В случае $m=q-1$ после аналогичных вычислений получим

1) $I^1_{q-1,s}=\Omega_{qs+q-1,qs}(1/\lambda^s+\varkappa_{s+1}(\lambda))+\sum\limits_{\xi=1}^{q-1}\Omega_{qs+q-1,qs+\xi}\varkappa_{s+1}(\lambda)+\Omega_{qs+q-1,(s+1)q}(1/\lambda^{s+1}+\varkappa_{s+2}(\lambda))$ при $i=1$,

2) $I^i_{q-1,s}=\sum\limits_{\xi=0}^{i-2}\Omega_{qs+q-1,qs+\xi}\varkappa_s(\lambda)+\Omega_{qs+q-1,qs+i-1}(1/\lambda^s+\varkappa_{s+1}(\lambda))+\sum\limits_{\xi=i}^{q}\Omega_{qs+q-1,qs+\xi}\varkappa_{s+1}(\lambda)$ при $i>1$.

Сравнивая полученные соотношения с (47), приходим к равенствам $\Omega_{n\xi}=0$ при $\xi=\overline{n-q+1,\,n+1}$. Тем самым соотношения (39) верны при $k=n$. Но тогда равенства (41) принимают вид

$$a_{n1}\psi^1_{n+1}=0,$$
$$a_{n1}\psi^i_{n+1}=-a_{q+i-2,1}\left(\lambda\Phi^{i-1}_n-\sum_{\mu=0}^{q}a_{n,\mu-q}\Phi^{i-1}_{n+\mu-q}\right)=-a_{q+i-2,1}a_{n1}\Phi^{i-1}_{n+1},\quad i=\overline{2,q},$$

и, следовательно, соотношения (40) верны при $k=n+1$.

Таким образом, равенства (39), (40) справедливы при всех $k\ge q$. В частности, это означает $\Omega=0$, т.е. $\dot L=[A,L]$ и, следовательно, функции $\{a_{nj}(t)\}$ являются решениями системы (2). $\square$

Литература

1. Toda M. *Waves in nonlinear lattices* // Progr. Theoret. Phys. – 1970. – V. 45. – P. 174–200.
2. Манаков С.В. *О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах* // ЖЭТФ. – 1974. – Т. 67. – Вып. 2. – С. 543–555.
3. Toda M. *Theory of nonlinear lattices.* – Berlin: Springer-Verlag, 1981.
4. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи* / Под ред. С.П. Новикова. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
5. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* – М.: Мир, 1987. – 478 с.
6. Березанский Ю.М. *Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 281. – № 1. – С. 16–19.
7. Богоявленский О.И. *Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1987. – Т. 51. – № 4. – С. 737–766.
8. Богоявленский О.И. *Интегрируемые динамические системы, связанные с уравнением* КдВ // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1987. – Т. 51. – № 6. – С. 1123–1141.
9. Юрко В.А. *Восстановление дифференциальных операторов высших порядков* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 1540–1550.
10. Юрко В.А. *Восстановление несамосопряженных дифференциальных операторов на полуоси по матрице Вейля* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 3. – С. 431–456.
11. Ахиезер Н.И. *Классическая проблема моментов.* – М.: Наука, 1961.

Саратовский государственный университет

Поступила 12.05.1996