ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 517.946

Г.А. СВИРИДЮК, Н.А. МАНАКОВА

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЗАДАЧИ КОШИ–ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОСКОЛКОВА НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В области $\Omega\times\mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \tag{0.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{0.2}$$

для неклассического уравнения в частных производных

$$(1 - \varkappa\Delta)u_t = \nu\Delta u - |u|^{q-2}u + f, \quad q \geq 2. \tag{0.3}$$

Уравнение (0.3) описывает динамику давления неньютоновой жидкости, фильтрующейся в пористой среде [1]. В [2] задача (0.1)–(0.3) рассмотрена при условии положительности параметров $\varkappa$, ν, отвечающих за упругие и вязкие свойства жидкости соответственно. Однако в [3] показано, что отрицательные значения параметра $\varkappa$ не противоречат физическому смыслу. Поэтому целью данной статьи является изучение разрешимости задачи (0.1)–(0.3) при условии $\varkappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\nu \in \mathbb{R}_+$.

Поскольку при $\varkappa \in \mathbb{R}_-$ оператор при производной по t в уравнении (0.3) уже не будет, вообще говоря, положительно определенным, то придется использовать иные, чем в [2], методы. Наш подход заключается в редукции задачи (0.1)–(0.3) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.4}$$

для полулинейного операторного дифференциального уравнения соболевского типа [4]

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \tag{0.5}$$

где оператор L может не быть непрерывно обратимым, в частности, его ядро $\ker L \neq \{0\}$. Затем, опираясь на результаты теории относительно σ-ограниченных операторов [5], расщепим уравнение (0.5) на сингулярную и регулярную составляющие, каждую из которых изучим по отдельности. Основная цель статьи — изучение *морфологии* (т. е. структуры, строения, устройства) фазового пространства уравнения (0.5) [6].

Статья содержит четыре части. В первых двух приводятся известные результаты из [5], [7], необходимые нам в дальнейшем. В третьей части приводится редукция задачи (0.1)–(0.3) к задаче (0.4), (0.5). В последней части изучается фазовое пространство.

Изучения проводятся в вещественных банаховых пространствах, но при рассмотрении "спектральных" вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением "против часовой стрелки" и ограничивают область, лежащую "слева" при таком движении. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены соответственно "единичный" и "нулевой" операторы, области определения которых ясны из контекста.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования России, шифр РД 02-1.1-82 и грантом губернатора Челябинской области для молодых ученых № 03-01-б.

1. Относительно σ-ограниченный оператор

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линейны и непрерывны). Введем L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Определение 1.1. Оператор M называется *σ-ограниченным относительно* оператора L (или просто *(L,σ)-ограниченным*), если

$$\exists a > 0 \ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ \ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Пусть $\rho^L(M) \neq 0$, через $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ обозначим соответственно *правую* и *левую L-резольвенты* оператора M.

Лемма 1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}) \tag{1.1}$$

являются проекторами.

Здесь контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{Im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{Im} Q$. Обозначим через M_k (L_k) сужение оператора M (L) на подпространство $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\, \mathfrak{F}^k), k = 0, 1;$

(ii) *существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0, \mathfrak{U}^0)$;

(iii) *существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1, \mathfrak{U}^1)$.

Положим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0) (\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{U}^0))$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие. В условиях теоремы 1.1 при любом $\mu \in \mathbb{C}$ $(|\mu| > a)$

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} S^k L_1^{-1} Q.$$

Определение 1.2. Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой*, если $H \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой*, если $\forall q \in \mathbb{N}$ $H^q \neq \mathbb{O}$.

В дальнейшем устранимую особую точку будем называть *полюсом порядка нуль*.

Немного отходя от стандарта, будем называть $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ *собственным вектором* оператора L, упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ — *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad q = 0, 1, \dots, \quad \varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Цепочка может быть бесконечной (в частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker L \cap \ker M$), однако она обязательно конечна, если в ней найдется вектор φ_p такой, что либо $\varphi_p \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{Im} L$. Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его *высотой*, а порядковый номер последнего вектора в конечной цепочке — *длиной* этой цепочки.

Теорема 1.2. *Пусть оператор L фредгольмов* $(\operatorname{ind} L = 0)$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

(i) *оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M*;

(ii) *длины всех цепочек M-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L ограничены некоторым числом $p \in \mathbb{N}$.*

2. Квазистационарные траектории

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $N \in C^k(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Рассмотрим задачу (0.4), (0.5). *Решением* задачи (0.4), (0.5) назовем вектор-функцию $u \in C^k((-T, T); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую (0.4), (0.5) при некотором $T \in \mathbb{R}_+$.

Пример. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathbb{R}^2_{(\xi,\eta)}$, операторы L, M и N зададим формулами

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \mathbb{I}, \quad N : u \to \begin{pmatrix} \xi \\ \xi - \eta^2 \end{pmatrix}, \quad u \in (\xi, \eta).$$

Положим $u_0 = (0, 0)$, тогда задача (0.4), (0.5) имеет два решения: $u_1 = (0, 0)$ и $u_2 = (t/2, t^2/4)$.

Простейший пример устанавливает некорректность задачи (0.4), (0.5) в общем случае. Поэтому введем новое понятие решения задачи (0.4), (0.5). Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, тогда уравнение (0.5) преобразуется в систему

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u), \tag{2.1}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QN(u), \tag{2.2}$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$.

Определение 2.1. Решение $u = u(t)$ задачи (0.4), (0.5) называется *квазистационарной траекторией уравнения* (0.5), *проходящей через точку* u_0, если $H\dot{u}^0(t) \equiv 0$ при всех $t \in (-T, T)$.

Нетрудно видеть, что любое стационарное решение будет квазистационарной траекторией, однако обратное неверно. В примере квазистационарной траекторией, проходящей через точку u_0, является только стационарное решение.

В дальнейшем ограничимся поиском только квазистационарных траекторий. Для этого введем множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$. Из (2.1) и теоремы 1.1 вытекает, что если $u = u(t)$ — квазистационарная траектория уравнения (0.5), то она с необходимостью лежит в множестве $\mathfrak{M}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in (-T, T)$.

Пусть точка $u_0 \in \mathfrak{M}$. Обозначим через $\mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{U}$ некоторую окрестность этой точки. Введем множество $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{O}_0 \cap \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_0^1 = P[\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}] \subset \mathfrak{U}^1$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке u_0 является *банаховым C^k-многообразием*, если существует C^k-диффеоморфизм $\delta : \mathfrak{O}_0^1 \to \mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$ такой, что $\delta^{-1} = P$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым C^k-многообразием, моделируемым подпространством* $\mathfrak{U}^1$, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке. (Нетрудно заметить некоторое несущественное в данном случае отличие от стандарта [7].) Связное банахово C^k-многообразие $\mathfrak{M}$ называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Теорема 2.1. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Пусть множество $\mathfrak{M}$ в точке u_0 является банаховым C^k-многообразием. Тогда для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственная квазистационарная траектория уравнения* (0.5), *проходящая через точку u_0.*

Приведем схему доказательства. Пусть $u_0^1 = Pu_0$, в окрестности $\mathfrak{O}_0^1$ точки u_0^1 уравнение (2.2) имеет вид $\dot{u}^1 = F(u^1)$, где оператор $F = S + L_1^{-1}QN\delta \in C^k(\mathfrak{O}_0^1; \mathfrak{U}^1)$. Существование единственного решения $u^1 \in C^k((-T, T); \mathfrak{U}^1)$ задачи Коши $u^1(0) = u_0^1$ при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ — классический результат [7]. Искомая квазистационарная траектория имеет вид $u(t) = \delta(u^1(t)) + u^1(t)$, $t \in (-T, T)$.

Замечание 2.1. Если ∞ — существенно особая точка, то теорема 2.1 неверна даже в случае $N \equiv \mathbb{O}$ [5].

3. Постановка задачи

Редуцируем задачу (0.1)–(0.3) к задаче (0.4), (0.5). Для этого положим $\mathfrak{U} = \overset{0}{W}{}_2^1 \cap L^q$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Наделение $\mathfrak{U}$ нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}} = \|\cdot\|_{\overset{0}{W}{}_2^1} + \|\cdot\|_{L^q}$ превращает $\mathfrak{U}$ в банахово пространство. Заметим, что в силу теоремы вложения Соболева $\mathfrak{U} \equiv \overset{0}{W}{}_2^1$ при $n \geq 3$ и $2 \leq q \leq 4/(n-2)+2$. В качестве пространства $\mathfrak{F}$ возьмем $W_2^{-1} + L^{q'}, q^{-1} + (q')^{-1} = 1$, наделенное сильной топологией пространства, сопряженного к $\mathfrak{U}$. Операторы L, M и N определим формулами

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (uv + \varkappa u_{x_i} v_{x_i})dx, \quad \langle Mu, v\rangle = -\nu \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} dx, \quad \langle N(u), v\rangle = -\int_\Omega |u|^{q-2} uv\, dx,$$

где $u, v \in \mathfrak{U}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в L^2. (Заметим, что всюду выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.) По построению операторы L, M принадлежат $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$.

Теорема 3.1. (i) *Оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка нуль.*
(ii) *Оператор N принадлежит $C^1(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.*

Доказательство. (i) Обозначим через $\{\lambda_k\}$ занумерованное по невозрастанию с учетом кратности множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированное в смысле L^2 множество соответствующих собственных функций. В силу гладкости границы $\partial\Omega$ множество $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\overline{\Omega})$.

Если $\varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}$, то существуют операторы $L^{-1}, M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, и утверждение очевидно. Пусть $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$, тогда $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l : \varkappa^{-1} = \lambda_l\}$.

Возьмем вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$, $\varphi = a_l \varphi_l$, $a_l \in \mathbb{R}$. Тогда $M\varphi = \nu\varkappa^{-1} a_l \varphi_l \notin \operatorname{Im} L$, т. е. вектор φ не имеет M-присоединенных векторов. Отсюда в силу теоремы 1.2 следует утверждение.

(ii) Пусть $u \in L^q$. Тогда для производной Фреше N'_u оператора N в точке u и в силу неравенства Гёльдера имеем

$$|\langle N'_u v, w\rangle| = (q-1)|\int_\Omega |u|^{q-2} vw\, dx| \leq (q-1)\|u\|_{L^q}^{q-2} \|v\|_{L^q} \|w\|_{L^q}. \quad \square$$

Таким образом, L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\nu\lambda_k}{1 - \varkappa\lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \varkappa^{-1} = \lambda_l\} \right\}.$$

В силу этого по формулам (1.1) можно построить проекторы

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\varkappa^{-1} = \lambda l} \langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k, \quad Q = \mathbb{I} - \sum_{\varkappa^{-1} = \lambda l} \langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k. \tag{3.1}$$

Возьмем точку $f \in \mathfrak{F}$ и построим множество

$$\mathfrak{M}_f = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } \ \varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle (Mu + N(u) + f), \varphi_l\rangle = 0, \ \varkappa^{-1} = \lambda_l\}. \end{cases}$$

Теорема 3.2. (i) *Пусть $\varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}$. Тогда для любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathfrak{F}$, $u_0 \in \mathfrak{U}$ и некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u \in C^1((-T, T); \mathfrak{U})$ задачи* (0.1)–(0.3).

(ii) *Пусть $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$. Тогда для любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathfrak{F}$, некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ и некоторой точки $u_0 \in \mathfrak{M}_f$ такой, что в ней множество $\mathfrak{M}_f$ является банаховым C^1-многообразием, существует единственное решение $u \in C^1((-T, T); \mathfrak{M}_f)$ задачи* (0.1)–(0.3).

Доказательство. (i) В этом случае множество $\mathfrak{M}_f$ с очевидностью является простым банаховым C^1-многообразием, поэтому утверждение вытекает из теорем 3.1 и 2.1.

(ii) В этом случае необходимо отметить, что любое решение $u \in C^1((-T,T);\mathfrak{U})$ задачи (0.1)–(0.3) с необходимостью будет лежать в множестве $\mathfrak{M}_f$ ($u(t) \in \mathfrak{M}_f$ $\forall t \in (-T,T)$) и поэтому будет квазистационарной траекторией. Остается сослаться на теоремы 3.1 и 2.1. $\square$

4. Фазовое пространство

Вернемся к абстрактному уравнению (0.5). Вектор-функцию $u \in C^k((-T,T);\mathfrak{U})$, $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, удовлетворяющую ему, назовем *решением* уравнения (0.5).

Определение 4.1. Множество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (0.5), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (0.5) лежит в $\mathfrak{B}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{B}$ при всех $t \in (-T,T)$;

(ii) для любой точки $u_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное решение задачи (0.4), (0.5).

Как следует из теоремы 3.2, множество $\mathfrak{M}_f$ при всех $f \in \mathfrak{F}$, $\varkappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ является фазовым пространством уравнения (0.3) при условии (0.2). Если $\varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}$, то $\mathfrak{M}_f \equiv \mathfrak{U}$. Изучим морфологию множества $\mathfrak{M}_f$ в случае $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$. Для этого введем терминологию, формализованную в [8].

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, оснащенное дуальной парой рефлексивных банаховых пространств, т. е. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}^*$. Оператор $A \in C^1(\mathfrak{B};\mathfrak{B}^*)$ называется *s-монотонным*, если $[A'_u v, v] > 0$ для всех $u, v \in \mathfrak{B}\setminus\{0\}$ (здесь $[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}$), и сильно коэрцитивным, если

$$\lim_{\|v\|_{\mathfrak{B}}\to\infty} \frac{[A(u+v),v]}{\|v\|_{\mathfrak{B}}} = +\infty$$

при всех $u \in \mathfrak{B}$. Нетрудно заметить, что сильно коэрцитивный оператор является коэрцитивным. В [8] показано, что любой s-монотонный оператор является строго монотонным, а любой сильно монотонный гладкий оператор – s-монотонным (см. терминологию в [9]).

Установим сначала, что $\mathfrak{M}_f \neq 0$. Для этого положим $\mathfrak{U}^0 = \ker L$, $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l\rangle = 0, \varkappa^{-1} = \lambda_l\}$. Очевидно, $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{Im} P$, где P из (3.1).

Лемма 4.1. *При любых $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathfrak{F}$, $u^1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственный вектор $u^0 \in \mathfrak{U}^0$ такой, что $u^0 + u^1 \in \mathfrak{M}_f$.*

Доказательство. Фиксируем $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $f \in \mathfrak{F}$ и построим оператор $A = -M - N - f$. В силу теоремы 3.1 оператор A принадлежит пространству $C^1(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. По построению пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ являются дуальной парой рефлексивных банаховых пространств, оснащающих гильбертово пространство L^2.

Оператор A s-монотонен. Действительно, при любых $u, v \in L^q$ имеем

$$-\langle N'_u v, v\rangle = (q-1)\int_\Omega |u|^{q-2}v^2 dx.$$

Оператор A сильно коэрцитивен. Действительно, при любых $u, v \in L^q$ имеем

$$-\langle N(u+v), v\rangle = \int_\Omega |u+v|^{q-2}(u+v)v\,dx \geq$$
$$\geq \|u+v\|^q_{L^q} + \langle N(u+v), u\rangle \geq \|u+v\|^{q-1}_{L^q}(\|u+v\|_{L^q} - \|u\|_{L^q}).$$

Здесь для оператора $-M$ s-монотонность и сильная коэрцитивность очевидны, вектор f несуществен.

Теперь фиксируем $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$, $u^1 \in \mathfrak{U}^1$ и построим оператор $A_0 : \ker L \to \ker L$ следующим образом: $A_0 u^0 = \operatorname{col}(\langle A(u^0+u^1), \varphi_l\rangle\varphi_l)$, где $\varkappa^{-1} = \{\lambda_l\}$, $u^0 = a_l\varphi_l$. Ввиду доказанного оператор A_0 s-монотонен и коэрцитивен. В силу теоремы Вишика–Минти–Браудера (см., напр., [9]) уравнение $A_0 u^0 = 0$ имеет единственное решение. $\square$

Теорема 4.1. *При любых* $\varkappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathfrak{F}$ *фазовым пространством уравнения* (0.3) *при условии* (0.2) *служит простое банахово* C^1*-многообразие* $\mathfrak{M}_f$, *моделируемое пространством* $\mathfrak{U}^1$.

Доказательство. Если $\varkappa^{-1} \notin \{\lambda_k\}$, то $\mathfrak{M}_f \equiv \mathfrak{U}$ и утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.2 (i). Если $\varkappa^{-1} \in \{\lambda_k\}$, то в силу s-монотонности оператора A_0 и теоремы о неявной функции множество $\mathfrak{M}_f$ является простым банаховым C^1-многообразием. В силу теоремы 3.2 (ii) множество $\mathfrak{M}_f$ — фазовое пространство. □

Замечание 4.1. Рассмотрим линейное уравнение

$$L\dot{u} = Mu. \tag{4.1}$$

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — контур такой, как в (1.1). Тогда, как показано в [5], существует единственная разрешающая группа уравнения (4.1), которая, к тому же, имеет вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, единицей этой группы является проектор P. Поэтому можно определить образ $\operatorname{Im} U^\bullet$ группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$, положив $\operatorname{Im} U^\bullet = \operatorname{Im} P = \mathfrak{U}^1$. Отсюда следует, что простое банахово C^1-многообразие моделируется образом разрешающей группы линейного уравнения.

Литература

1. Осколков А.П. *Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
2. Осколков А.П., Ахматов М.М., Щадиев Р.Д. *Нелокальные задачи для уравнений фильтрации неньютоновых жидкостей в пористых средах* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1991. – Т. 189. – С. 82–100.
3. Амфилохиев В.Б., Вайткунский Я.И., Мазаева Н.П., Хозорковский Я.С. *Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений* // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. – 1975. – Т. 96. – С. 3–9.
4. Свиридюк Г.А. *Задача Коши для линейных операторных уравнений типа Соболева с положительным оператором при производной* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 10. – С. 1823–1826.
5. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
6. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. *Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева* // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31. – № 5. – С. 109–119.
7. Ленг С. *Введение в теорию дифференциальных многообразий.* – Волгоград: Платон, 1997. – 384 с.
8. Свиридюк Г.А. *Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 55–61.
9. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 426 с.

Челябинский государственный университет

Поступила 22.04.2002