И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.518

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ГРУППОЙ ДИЭДРА

Введение. Пусть D — круговой сектор, ограниченный отрезками l_1 и l_3 прямых $\operatorname{Re} z = \mp \operatorname{Im} z$ соответственно и дугой l_2 окружности $|z| = 1$, $|\arg z| < \pi/4$. Если из замыкания $\overline{D}$ удалить часть положительно ориентированной границы ∂D, то получим фундаментальную область частного случая конечной группы диэдра ([1], гл. 7, § 6). Порождающие преобразования группы $\sigma_1(z) = iz$, $\sigma_2(z) = z^{-1}$ индуцируют гомеоморфизм $\alpha(t) : \partial D \to \partial D$,

$$\alpha(t) = \overline{t}; \ \Leftrightarrow \alpha(t) = \{\sigma_j(t), t \in l_j\}, \quad \sigma_3 = \sigma_1^{-1}; \quad \alpha(\alpha(t)) \equiv t,$$

изменяющий ориентацию границы ∂D. Производная $\alpha'(t)$ разрывна в вершинах $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \sqrt{2}/2 \mp i\sqrt{2}/2$.

Основной целью работы является изучение аппроксимирующих свойств трех систем: системы рациональных функций

$$\psi_k(z) = \theta_k(-z) - \theta_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\theta_k(z) = i(iz - \sqrt{2}/2)^{-k-1} - z^{-2}(z^{-1} - \sqrt{2}/2)^{-k-1}$; системы интегралов типа Коши

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_0} \beta_m(t)(z - t)^{-1} dt, \quad z \notin \overline{D_0}, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $\beta_m(t) = (\alpha(t) - \sqrt{2}/2)^m$; системы целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.)

$$F_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_0} \beta_m(t) \exp(zt) dt, \tag{3}$$

ассоциированных по Борелю с интегралами (2). Область D_0 ограничена дугами окружностей $|z \pm \sqrt{2}i/2| = \sqrt{2}/2$ и отрезком $\operatorname{Re} z = \sqrt{2}/2$, причем $D_0 \subset D$ и $\alpha(t) : \partial D_0 \to |t - \sqrt{2}/2| = \sqrt{2}/2$. В трех сегментах, дополняющих область D_0 до области D, доопределим функцию $\alpha(z)$ аналитическим продолжением $\alpha(t)$ с соответствующей гладкой компонентой границы ∂D. Статья содержит две части. В § 1 получены два основных результата.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(z) \in A(D_0)$ *и* $\Phi^+(t) \in C^2(\partial D_0)$, *причем*

$$\Phi(t_j) = 0, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{4}$$

Тогда

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(z), \quad z \in \overline{D_0}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_0} \Phi^+(t) f_k^-(t) dt. \tag{6}$$

Ряд (5) *сходится абсолютно и равномерно на замыкании* $\overline{D_0}$.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega(z) \in A[cD_0]$. *Тогда*

$$\Omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z), \quad z \in cD_0, \tag{7}$$

где

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_0} \Omega(t)\psi_k(t)dt. \tag{8}$$

Ряд (7) *сходится абсолютно и равномерно на замыкании* cD_0.

Относительно свойств нормированных и счетнонормированных пространств аналитических функций $A[cD]$, $\widetilde{A}(D)$, $A(D)$ см. [2].

В § 2 исследуются свойства системы ц. ф. э. т. (3). Построена система функций, биортогонально сопряженная к системе (3) на координатных осях. Рассмотрена возникающая в связи с этим соответствующая проблема моментов. Получены формулы суммирования ряда (5).

1. Системы (1) и (2) биортогональны на ∂D, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \psi_k(t) f_m(t)dt = \delta_{m,k}. \tag{9}$$

В самом деле, перепишем соотношения (9) в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-\sqrt{2}/2|=\sqrt{2}/2} \alpha'(t)\psi_k(\alpha(t))(t-\sqrt{2}/2)^m dt = \delta_{m,k},$$

используя замену переменной интегрирования. Но $-t^{-2}\psi_k(t^{-1}) = i\psi_k(it)$, и последний интеграл вычисляется с помощью вычетов. Биортогональная сопряженность этих систем сохраняется и на ∂D_0 с заменой функций (2) на их граничные значения $f_m^-(t)$ (формулы Сохоцкого).

Поясним, каким образом "угадана" биортогональность систем (1) и (2). В ([3], § 1) были получены результаты, позволяющие трансформировать заданные биортогональные системы с помощью некоторых линейных операторов. Пусть $\varphi_m(z) = (z-\sqrt{2}/2)^m$ и $b_k(z) = (z-\sqrt{2}/2)^{-k-1}$. Введем операторы

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{k=1}^{4} f(\sigma_k(z)); \quad (\widetilde{V}b)(z) \equiv \sum_{k=1}^{4} (\sigma_k^{-1}(z))' b(\sigma_k(z)),$$

где $\sigma_4(z) = -z^{-1}$. Тогда системы функций

$$f_m(z) : (Vf_m)(z) = \varphi_m(z), \quad z \in D, \tag{10}$$

и $\psi_k(z) \equiv (\widetilde{V}b_k)(z)$ также биортогональны на ∂D. При этом уравнение (10) решается в замкнутом виде (см. далее доказательство теоремы 2) в классе функций, голоморфных вне D, исчезающих на бесконечности, и $f_m^-(t) \in C(\partial D)$.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Имеем (6) $\Longleftrightarrow \alpha_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_0} \Phi^+(t)\beta_k(t)dt$. Дважды интегрируя по частям, с учетом (4) получим

$$\alpha_k = (k+1)^{-1}(k+2)^{-1}\Big\{\Big(\frac{\Phi^+(t)}{\alpha'(t)}\Big)'\beta_{k+2}(t)\Big|_{\partial D_0} - \int_{\partial D_0}\Big(\frac{\Phi^+(t)}{\alpha'(t)}\Big)''\beta_{k+2}(t)(\alpha'(t))^{-1}dt\Big\}.$$

Поскольку $|\alpha'(t)| = 1$ и $|\alpha''(t)| \le 2$, а $|\beta_k(t)| < A_1 2^{-k/2}$, то с учетом ограниченности первой и второй производных функции $\Phi^+(t)$ имеем $\forall k\ \exists \beta : |\alpha_k| \le \beta(k+1)^{-1}(k+2)^{-1}2^{-k/2}$, значит, ряд сходится абсолютно и равномерно в замыкании $\overline{\partial D_0}$. Положим

$$\psi(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(z) \Longrightarrow \int_{\partial D_0} \psi^+(t)\beta_k(t)dt = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{|t-\sqrt{2}/2|=\sqrt{2}/2} \alpha'(t)\psi^+(\alpha(t))(t-\sqrt{2}/2)^k dt = 0.$$

Тогда ([4], с. 74) функция $\alpha'(t)\psi^+(\alpha(t))$ голоморфна в круге $|z-\sqrt{2}/2| < \sqrt{2}/2$, следовательно, $\psi^+(t)$ и $\alpha'(t)\psi^+(\alpha(t))$ одновременно голоморфно продолжимы в D с ∂D. В самом деле, функция $\psi_1^+(t) = \psi^+(t) + \alpha'(t)\psi^+(\alpha(t))$ голоморфна в D и $\psi_1^+(t) = \alpha'(t)\psi_1^+(\alpha(t))$. С помощью принципа локально-конформного склеивания [5] задача Карлемана сводится к задаче линейного сопряжения, откуда $\psi_1(z) \equiv 0$, т. е. $\psi(z) \equiv 0$.

Замечание 1. Ограничения (4) являются неизбежными, поскольку $\forall k, \forall j = \overline{1,3} : \psi_k(t_j) = 0$.

Приступим к выводу теоремы 2. Используя формулы Сохоцкого и интегрируя по частям особый интеграл, имеем

$$f_m^-(t) = \frac{\beta_m(t)}{2} - \frac{m}{2\pi i}\int_{\partial D_0} \alpha'(\tau)\beta_{m-1}(\tau)\ln(\tau - t)d\tau,$$

т. е. $\forall m\ \exists \beta_1 : \max\limits_{t\in\partial D_0} |f_m^-(t)| \le \beta_1 m 2^{-m/2}$, т. к. $\int_{\partial D_0} |ln(\tau - t)||d\tau| < A_2$, где A_2 — некоторая постоянная. С другой стороны, коэффициенты (8) — это коэффициенты ряда Тейлора с центром в точке $z_0 = \sqrt{2}/2$ функции $(V\Omega)(z) = \Omega(iz) + \Omega(-iz) + \Omega(z^{-1}) + \Omega(-z^{-1})$, радиус сходимости которого $R > \sqrt{2}/2$. Поэтому ряд (7) сходится абсолютно и равномерно в замыкании cD_0. Введем функцию

$$\Omega_1(z) = \Omega(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z),$$

удовлетворяющую по своему определению функциональному уравнению

$$(V\Omega_1)(z) = 0, \quad z \in D.$$

Решение этого функционального уравнения будем искать в виде интеграла типа Коши

$$\Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \varphi(\tau)(\tau - z)^{-1}d\tau, \quad z \notin \overline{D}, \tag{11}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau) = a^+(\tau) - \Omega_1^-(\tau)$. Можно считать, не ограничивая общности, что

$$\varphi(\tau) + \varphi(\alpha(\tau)) = 0, \quad \tau \in \partial D. \tag{12}$$

Дело в том, что плотность интеграла (11) определена с точностью до голоморфно продолжимого в D слагаемого $a^+(\tau)$, которое можно подобрать так, чтобы выполнялось (12). Тогда, положив $\sigma_4(z) = -z^{-1}$, получим

$$F(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \varphi(\tau)E(z,\tau)d\tau = 0, \quad z \in D; \quad E(z,\tau) = \sum_{j=1}^{4}(\tau - \sigma_j(z))^{-1}.$$

Справедлив аналог формулы Сохоцкого $F^+(t) = -\varphi(\alpha(t))/2 + F(t)$, откуда

$$(T\varphi)(t) = F^+(t) - F^+(\alpha(t)) = \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \varphi(t)K(t,\tau)d\tau = 0,$$

где $K(t,\tau) = E(t,\tau) - \alpha'(\tau)E(\alpha(t),\alpha(\tau))$. Но

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \notin l_2; \\ \tau^{-1}, & \tau \in l_2, \end{cases} \Longrightarrow \varphi(\tau) \equiv 0 \Longrightarrow \Omega_1 \equiv 0.$$

Замечание 2. Полученный результат позволяет снять ограничения (4), но равенство (5) выполняется уже только, если $\overline{K}$ — компакт в D_0, причем ряд (5) сходится там и абсолютно и равномерно. Доказательство основано на стандартном приеме — разложении ядра Коши в биортогональный ряд ([6], гл. IV, § 6).

2. Результаты § 1 позволяют перейти к изучению свойств системы ц. ф. э. т. (3). Очевидно, $2\pi i F_m(z) = i^m \exp(-iz/\sqrt{2}) G_1^{(m)}(z) + (-i)^m \exp(zi/\sqrt{2}) G_2^{(m)}(z) + \Gamma_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots$, где

$$\begin{aligned} G_1(z) &= z^{-1}(\exp(z/\sqrt{2}) - \exp(iz/\sqrt{2})); \\ G_2(z) &= -iG_1(-iz); \\ \Gamma_m(z) &= \int_{l_2} (\tau^{-1} - \sqrt{2}/2)^m \exp(z\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Эти интегралы вычисляются по рекуррентным формулам

$$\Gamma_{m+1}(z) = (m^{-1}z - \sqrt{2})\Gamma_m(z) - 2^{-1}\Gamma_{m-1}(z) - m^{-1}(i/\sqrt{2})^m \times \\ \times \exp(z/\sqrt{2})\Big((-1)^m \exp\left(\frac{iz}{\sqrt{2}}\right) - \exp\left(-\frac{iz}{\sqrt{2}}\right)\Big), \quad m = 1, 2, \ldots;$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0(z) &= 2iz^{-1} \exp(z/\sqrt{2}) \sin(z/\sqrt{2}); \\ \Gamma_1(z) &= \widetilde{\Gamma}(z) - \sqrt{2}/2\Gamma_0(z). \end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{\Gamma}'(z) = \Gamma_0(z)$ и $\widetilde{\Gamma}(0) = \pi i/2$. Поскольку

$$(Vf_m)(z) = (z - \sqrt{2}/2)^m, \quad z \in D,$$

то, переходя к соответствующим верхним функциям, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_m(t) \exp(-tz^{-1} \operatorname{sgn} t) dt + \int_{-\infty i}^{\infty i} F_m(t) \exp(-tiz \operatorname{sgn}(it)) dt = 2\pi i (z - \sqrt{2}/2)^m, \quad |z - \sqrt{2}/2| < \varepsilon,$$

где число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Следовательно, функции

$$\widetilde{F}_m(z) = (2\pi i m!)^{-1} F_m(z)$$

удовлетворяют условиям

$$L(\widetilde{F}_m(t), k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}_m(t) \frac{d^k}{dz^k}(-tz^{-1} \operatorname{sgn} t)|_{z=\sqrt{2}/2} dt + \\ + \int_{-\infty i}^{\infty i} \widetilde{F}_m(t)(-ti \operatorname{sgn}(ti))^k \exp(-ti \operatorname{sgn}(it)/\sqrt{2}) dt = \delta_{m,k}.$$

Теперь теорему 2 запишем в другой форме.

Теорема 3. *Пусть $F(z)$ — ц. ф. э. т. и ассоциированная с ней по Борелю нижняя функция $f(z) \in A[cD_0]$. Тогда*

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \widetilde{F}_m(z), \tag{13}$$

где

$$\mu_m = L(F, m). \tag{14}$$

Ряд (13) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в C.

Формулу (13) можно трактовать как решение интерполяционной задачи (14) в классе ц. ф. э. т. $F(z)$, описываемых в теореме 3. В более общем случае введем функцию

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m}{m!}(z - \sqrt{2}/2)^m$$

и потребуем, чтобы $g(z) \in \widetilde{A}(D)$. Последнее заведомо выполнено, если радиус сходимости степенного ряда $R > \sqrt{2}/2$. Будем говорить, что $F(z) \in B$, если 1) сопряженной индикаторной диаграммой $F(z)$ является сектор D; 2) нижняя функция $f(z)$ непрерывно продолжима на ∂D. Проблему моментов (14) в классе B с помощью преобразования Бореля сведем к функциональному уравнению

$$(Vf)(z) = g(z), \quad z \in D,$$

разрешимому в замкнутой форме,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g^+(\alpha(t))(z-t)^{-1}dt; \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g^+(\alpha(t))\exp(zt)dt.$$

В заключение вернемся к исследованию свойств системы рациональных функций (2). Предположим, что выполнены все условия теоремы 1. У ряда (5) множество точек сходимости распадается на четыре связные компоненты, вырезаемые кругами $|z \pm i\sqrt{2}/2| \leq \sqrt{2}/2$ из полосы $|\operatorname{Re} z| < \sqrt{2}/2$. В области $D_1 = -D_0$ сумма ряда (5) равна $-\Phi(-z)$. Суммой ряда (5) вне указанных кругов будет функция

$$\Phi(z) = \int_{\partial D_0} \Phi^+(\tau)\widetilde{K}(z,\tau)d\tau,$$

где $\widetilde{K}(z,\tau) = \beta_1(\tau)\big((iz-\sqrt{2}/2)^{-1}(z+i\alpha(t))^{-1} - (iz+\sqrt{2}/2)^{-1}(z-i\alpha(t))^{-1} - z^{-2}(z^{-1}-\sqrt{2}/2)^{-1}(z^{-1} - \alpha(t))^{-1} + z^{-2}(z^{-1}+\sqrt{2}/2)^{-1}(z^{-1}+\alpha(t))^{-1}\big)$.

Литература

1. Голубев В.В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Хавин В.П. *Пространства аналитических функций* // Итоги науки и техн. Матем. анализ 1964 г. – М.: ВИНИТИ, 1966. – С. 76–164.
3. Гарифьянов Ф.Н. *Трансформации биортогональных систем и некоторые их приложения.* I // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 5–16.
4. Голубев В.В. *Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции.* – М.: ГИТТЛ, 1961. – 455 с.
5. Зверович Э.И. *Метод локально конформного склеивания* // ДАН СССР. – 1972. – Т. 205. – № 4. – С. 766–770.
6. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.

Казанская государственная
сельскохозяйственная академия

Поступила
07.12.1998