ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 514.146

С.А. ЛАКТИОНОВ

О КОМПЛЕКСАХ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ОДНОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

В данной работе исследуются такие классы комплексов K_0 2-плоскостей в P_n [1], в каждой плоскости которых имеется единственная критическая прямая L_1^β [2]. Эта прямая инвариантно связана с плоскостью комплекса и поэтому при изменении параметров комплекса она описывает некоторое семейство прямых. С помощью этого семейства выясняется строение комплексов K_0, обладающих такими прямыми.

Пусть комплекс K_0 в репере $\{A_I\}$, $I=0,1,2,\dots,n$ определяется системой уравнений [1]

$$\Lambda_p^{\alpha i}\omega_i^p=0,\quad \alpha=1,2,\dots,n-2;\quad i=0,1,2;\quad p=3,4,\dots,n. \tag{1}$$

Прямые L_1^β, $\beta=1,2,\dots,n-2$ комплекса K_0 [1] будут в этом случае принадлежать кривой $(n-2)$-го класса q, имеющей уравнение

$$\det\|\Lambda_p^{\alpha i}a_i\|=0, \tag{2}$$

где a_i — тангенциальные координаты прямой L_1 в плоскости комплекса $L=(A_0A_1A_2)$.

Будем исследовать такие комплексы K_0, в каждой плоскости которых имеется только одна прямая L_1^β, $2\le\beta\le n-3$. Исключение для крайних случаев $\beta=1$ и $\beta=n-2$ сделано в силу того, что прямые L_1^1 не существуют в единственном числе, а прямые L_1^{n-2} появляются только в случае, когда понижается ранг R_i матрицы $\|\Lambda_p^{\alpha i}\|$.

Прямой L_1^β отвечает плоскость основного соответствия $l_{2+\beta}$ [2]. Учитывая единственность прямой L_1^β, проведем фиксацию репера: $L_1^\beta=(A_0A_1)$, $l_{2+\beta}=(L,\ A_3A_4\cdots A_{\beta+2})$. Тогда получаем $\Lambda_3^{\alpha 2}=\Lambda_4^{\alpha 2}=\dots=\Lambda_{\beta+2}^{\alpha 2}=0$, $\alpha=1,2,\dots,n-2$, и система (1) принимает вид

$$\Lambda_p^{\alpha j}\omega_j^p+\Lambda_q^{\alpha 2}\omega_2^q=0,\quad j=0,1;\quad q=\beta+3,\beta+4,\dots,n,\quad p=3,4,\dots,n, \tag{3}$$

причем

$$R\|\Lambda_q^{\alpha 2}\|=n-2-\beta. \tag{4}$$

Из (4) следует, что $(n-2-\beta)$ уравнений системы (3) можно разрешить относительно форм ω_2^q и затем исключить эти формы из остальных β уравнений. Нумеруя полученные при этом уравнения так, чтобы в первых β уравнениях формы ω_2^q не содержались, перепишем систему (3) в виде

$$\Lambda_p^{\gamma j}\omega_j^p=0,\quad \omega_2^q+\Lambda_p^{q-2,j}\omega_j^p=0,\quad \gamma=1,2,\dots,\beta. \tag{5}$$

Первые β уравнений системы (5) представим так

$$\Lambda_r^{\gamma j}\omega_j^r+\Lambda_q^{\gamma j}\omega_j^q=0,\quad r=3,4,\dots,\beta+2. \tag{6}$$

Тогда в уравнении (2) слагаемое со старшим порядком переменной a_2 будет равно

$$(a_2)^{n-2-\beta}\det\|\Lambda_r^{\gamma j}a_j\|. \tag{7}$$

В силу (7) уравнение

$$\det\|\Lambda_r^{\gamma j}a_j\| = 0 \tag{8}$$

определяет полюса $(n-2-\beta)$-го порядка для критической прямой $L_1^\beta = (A_0A_1)$ относительно кривой q (2). Это уравнение является уравнением порядка β относительно $t = a_0{:}a_1$, поэтому оно либо имеет β корней с учетом их кратностей, либо обращается в тождество. Далее остановимся на рассмотрении только одного случая, а именно, когда все корни уравнения (8) действительные и различные.

В силу предположения о корнях уравнения (8) матрица $\|\Lambda_r^{\gamma j}a_j\|$ может быть приведена к диагональному виду (см. [3], [4]), а выбирая подходящим образом точки A_0 и A_1 на прямой (A_0A_1), можно привести ее к виду:

$$\underbrace{\left\|\begin{matrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0+a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0+\Lambda_1 a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0+\Lambda_{\beta-3}a_1 \end{matrix}\right\|}_{\beta} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}\beta\,. \tag{9}$$

Тогда из (9) и (6) следует, что система (5) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} &\omega_0^3 = \Lambda_q^{1\,j}\omega_j^q, \quad \omega_1^4 = \Lambda_q^{2\,j}\omega_j^q, \quad \omega_0^5 + \omega_1^5 = \Lambda_q^{3\,j}\omega_j^q, \\ &\omega_0^6 + \Lambda_1\omega_1^6 = \Lambda_q^{4\,j}\omega_j^q, \dots, \\ &\omega_0^{\beta+2} + \Lambda_{\beta-3}\omega_1^{\beta+2} = \Lambda_q^{\beta\,j}\omega_j^q, \\ &\omega_2^q + \Lambda_p^{q-2}\omega_j^p = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1. *Комплекс K_0 2-плоскостей в проективном пространстве P_n, $n \geq 6$, задаваемый уравнениями (10), при $\beta = 2$ представляет собой совокупность двумерных плоскостей, определяемых произвольным $(2n-4)$-параметрическим семейством прямых $l_1(2n-4)$ так, что каждая плоскость L комплекса проходит произвольным образом через одну из прямых l_1 семейства $l_1(2n-4)$ и содержится в соответствующей для этой прямой внешней ассоциированной плоскости.*

Теорема 2. *Комплекс K_0 2-плоскостей в проективном пространстве P_n, $n \geq 6$, задаваемый соотношениями (10), при $3 \leq \beta \leq n-3$ представляет собой совокупность β-параметрических конусов 2-плоскостей, вершинами которых являются прямые произвольного $(2n-4-\beta)$-параметрического семейства прямых $l_1(2n-4-\beta)$.*

Отметим, что случаи $\beta = 2$ и $3 \leq \beta \leq n-3$ отличаются тем, что распределение Δ_β, задающее подмногообразие Пфаффа $L(\Psi_\beta)$, вдоль которого прямая L_1^β является характеристикой [2], при $\beta = 2$ не будет вполне интегрируемым, а при $3 \leq \beta \leq n-3$ оно вполне интегрируемо.

Литература

1. Лактионов С.А. *О комплексах* K_0 *2-плоскостей в* P_n *с тремя прямыми* L_1^β // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 6. – С.75–76.
2. Кругляков Л.З. *О комплексах* K_b *многомерных плоскостей в проективном пространстве* // Геометрич. сб. – Томск, 1982. – Вып. 23. – С. 28–38.
3. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
4. Лактионов С.А. *Основы алгебраической классификации семейств прямых в* P_n. – Сиб. металлургич. ин-т. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.90, № 1632-В90. – Новокузнецк, 1989. – 17 с.

Сибирский металлургический институт

Поступила
08.05.1992