ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 512.54

К. РОЗЕНБАУМ

ИНДУЦИРОВАННЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МОДУЛИ

Введение

Пусть G — конечная группа порядка n и ∂ — матричное представление группы G над полем K характеристики, не равной 2. Пусть задана инволюция $*$ в групповом кольце KG группы G над полем K, т.е. антиавтоморфизм порядка 2, оставляющий на месте элементы поля K. Тройка $(M, *, \Phi)$ называется симплектическим модулем, если M — модуль представления группы G, $*$ — инволюция в групповом кольце KG и $\Phi : M \times M \to K$ — невырожденная знакопеременная билинейная форма со значениями в поле K, инвариантная относительно инволюции $*$, т.е.

$$\Phi(x\alpha, y) = \Phi(x, y\alpha^*) \tag{1}$$

для всех $x, y \in M$ и всех $\alpha \in KG$.

В [1] доказано, что если $\operatorname{Char} K \dagger n$, то симплектический модуль $(M, *, \Phi)$ распадается в ортогональную прямую сумму простых симплектических подмодулей $(M_0, *, \Phi_0)$. Имеются два типа простых симплектических модулей. Во-первых, модуль представления M_0 группы G над полем K неприводим. В этом случае M_0 является самосопряженным модулем представления, т.е. $M_0 \cong \operatorname{Hom}(M_0, K)$, где действие операторов $a \in KG$ на $\operatorname{Hom}_K(M_0, K)$ определяется формулой

$$(ha)(x) = h(xa^*) \tag{2}$$

для всех $x \in M_0$, $h \in \operatorname{Hom}_K(M_0, K)$, $a \in KG$. Во-вторых, модуль представления M_0 является прямой суммой двух сопряженных между собой неприводимых модулей представления группы G над полем K

$$M_0 = M_{01} + M_{02}, \tag{3}$$

где $M_{01} \cong \operatorname{Hom}_K(M_{02}, K)$ и $M_{02} \cong \operatorname{Hom}_K(M_{01}, K)$. В этом случае ограничение билинейной формы Φ на подмодули M_{01} и M_{02} вполне изотропно и $(M_0, *, \Phi)$ является нейтральным симплектическим модулем. В теории симплектических модулей прежде всего возникает вопрос об описании (с точностью до изоморфизма) всех структур симплектических модулей, которые можно ввести на данном модуле представления группы G. В случай абсолютной неприводимости модуля представления M группы G над полем K в [2] получен результат: пусть δ — абсолютно неприводимое представление группы G над полем K, характеристика которого не делит порядок n группы G, и $*$ — инволюция в групповом кольце группы G над полем K. Пусть, далее, Sp — след представления δ, $e_1, e_2, \dots, e_n$ — любой базис группового кольца KG и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — дуальный базис относительно следа регулярного представления группы G, тогда имеет место формула

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp}(e_i b_i^*) = \begin{cases} -1, \\ +1, \\ \ \ 0. \end{cases} \tag{4}$$

Значение -1 получается тогда и только тогда, когда модуль представления M самосопряжен и допускает введение структуры симплектического модуля. Значение $+1$ получается в случае, когда M самосопряжен и над ним существует симметрическая невырожденная билинейная форма, инвариантная относительно инволюции $*$. Наконец, 0 означает, что модуль M не самосопряжен.

В данной работе распространяется хорошо известный метод индуцирования представления группы на симплектические модули. Оказывается, что симплектическая (как и симметрическая) структура подмодуля переносится на индуцированный модуль представления. В частности, когда присутствующие модули абсолютно неприводимы, значения -1 и $+1$ переносятся с подмодуля к индуцированному. В третьем случае, однако, ситуация совсем другая: значение 0 может переходить в -1, $+1$ или 0. В случае метациклической группы $G = \langle a, b : a^n = 1,\ b^m = a^t,\ \ bab^{-1} = a^r\rangle$ порядка nm с определяющими соотношениями $(r,m) = 1, m|t(r+1)$, $r^2 \equiv \equiv 1 \mod m$ дается ответ на вопрос, когда абсолютно неприводимый несамосопряженный модуль представления после индуцирования переходит в симплектический модуль. Запишем произвольный K-базис модуля представления M в виде столбца $n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^\top$. Тогда для элемента $g \in G$ под ng понимается столбец из элементов $e_i g$. Квадратная матрица A_g с элементами из поля K, определенная равенством $ng = A_g n$, дает матричное представление $\delta : g \to A_g$ группы G над полем K. Всякая билинейная форма Φ на M своими значениями $\Phi(e_i, e_k)$ на элементах базиса n определяет матрицу формы Φ. В терминах матриц наши понятия принимают следующий вид: тройка $(M, *, \Phi)$ является симплектическим модулем, если для матриц представления A_g, соответствующих модулю M, и для матрицы C формы Φ выполняется условие $A_g C = C A_{g^*}^{\mathrm{T}}$ для всех $g \in G$, где $C^{\mathrm{T}} = -C$ и $\det C \neq 0$. Два симплектических модуля $(M, *, \Phi_1)$ и $(M, *, \Phi_2)$ изоморфны между собой тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица B такая, что $A_g B = B A_g$ для всех $g \in G$ и $C_2 = B C_1 B^{\mathrm{T}}$.

1. Индуцированные симплектические модули

Пусть H — подгруппа конечной группы G. Инволюция $*$ в групповом кольце KG группы G над полем K называется распадающейся относительно подгруппы H, если ограничение $*|_H$ является инволюцией в групповом кольце подгруппы H над полем K. Если δ — базис группового кольца KG, состоящий из элементов группы G (вначале пишутся элементы подгруппы H), то распадающаяся относительно подгруппы H инволюция $*$ равенством $\delta^* = I\delta$ определяет матрицу инволюции

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ I_3 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Инволюция $*$ называется вполне распадающейся, если, кроме того, $I_3 = 0$.

В [1] доказано, что в случае абелевой конечной группы G и поля K, характеристика которого не делит порядок n группы G, каждая инволюция $*$ в групповом кольце KG, распадающаяся относительно данной подгруппы H, распадается вполне. Пусть $\alpha = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g g = \sum\limits_{h\in H} \alpha_h + \sum\limits_{g\in G/H} \alpha_g g$ — любой элемент группового кольца KG. Под проекцией группового кольца KG на групповое кольцо KH понимаем отображение $\alpha \to \alpha$, определенное равенством

$$\alpha \downarrow = \sum_{h\in H} \alpha_h h.$$

Проекция, очевидно, является линейным отображением группового кольца KG на групповое кольцо KH. Оно однако не является гомоморфизмом относительно умножения.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, H — подгруппа группы G и K — поле. Тогда для $a, b \in KG$ имеем $(ab)\downarrow = a\downarrow \cdot\, b\downarrow$, если $a \in KH$ или $b \in KH$.*

Доказательство. Пусть $a = \sum\limits_{h \in H} \alpha_h \cdot h + \sum\limits_{g \in G/H} \alpha_g g \in KG$ и $b = \sum\limits_{h \in H} \beta_h h$. Тогда

$$(a \cdot b) \downarrow = \left[\left(\sum_{h \in H} \alpha_h \cdot h \right) \left(\sum_{h \in H} \beta_h \cdot h \right) + \left(\sum_{g \in G/H} \alpha_g \cdot g \right) \left(\sum_{h \in H} \beta_h \cdot h \right) \right] \downarrow =$$

$$= \left[\left(\sum_{h \in H} \alpha_h \cdot h \right) \left(\sum_{h \in H} \beta_h \cdot h \right) \right] \downarrow + \left[\left(\sum_{g \in G/H} \alpha_g \cdot g \right) \left(\sum_{h \in H} \beta_h \cdot h \right) \right] \downarrow = \left(\sum_{h \in H} \alpha_h \cdot h \right) \left(\sum_{h \in H} \beta_h \cdot h \right) = a \downarrow \cdot b \downarrow .$$

Аналогично доказывается утверждение леммы в случае $a \in KH$, $b \in KG$. □

Роль вполне распадающихся инволюций подчеркивает следующая

Лемма 2. *Инволюция $*$ в групповом кольце KG конечной группы G над полем K вполне распадается относительно подгруппы H тогда и только тогда, когда она перестановочна с проекцией $\downarrow$ группового кольца KG на групповом кольце KH, т.е. когда для всех элементов $a \in KG$ выполняется условие $(a \downarrow)^* = (a^*) \downarrow$.*

Доказательство. 1. Пусть $*$ — распадающаяся инволюция в KG, удовлетворяющая условию $(a \downarrow)^* = (a^*) \downarrow$ для всех элементов $a \in KG$. Ввиду линейности инволюции $*$ и проекции $\downarrow$ достаточно доказать лемму 2 для элементов $g \in G$, образующих базис δ группового кольца KG. Начиная в столбце δ с элементов из подгруппы H, получим

$$\delta^* = I\delta \quad \text{и} \quad \delta \downarrow = B\delta,$$

где

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ I_3 & I_2 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие $(a \downarrow)^* = (a^*) \downarrow$ для всех $g \in KG$ влечет за собой матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ I_3 & I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ I_3 & I_2 \end{pmatrix},$$

откуда получаем $I_3 = 0$, т.е. инволюция $*$ вполне распадается.

2. Обратно, если инволюция вполне распадается, то она, очевидно, перестановочна с проекцией $\downarrow$. □

Если инволюция $*$ в групповой алгебре KG вполне распадается относительно подгруппы H группы G, то она называется продолжением (ограничением на KH) инволюции $*$ в KH.

Примером инволюции в групповой алгебре KG является стандартная инволюция, индуцированная отображением $g \to \chi(g)g^{-1}$, где χ означает линейный характер (представления степени 1) группы G со значениями в K. Пусть χ_0 — характер подгруппы H группы G и χ — продолжение характера χ_0 до характера группы G, тогда инволюция $*$ в KH, определенная равенством

$$b = \sum_{g \in H} \beta_h \cdot h \longrightarrow b^* = \sum_{h \in H} \beta_h \cdot \chi_0(h) \cdot h^{-1}$$

для всех $b \in KH$, продолжается до инволюции в KG (которая также обозначается через $*$) посредством

$$a = \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g \longrightarrow a^* = \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot \chi(g) \cdot g^{-1}$$

для всех $a \in KG$.

Лемма 3. *Пусть $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_r$ — разложение конечной группы G на правые смежные классы по подгруппе H. Допустим, что инволюция $*$ в групповом кольце KH продолжается до инволюции $*$ в групповом кольце KG. Тогда имеет место формула*

$$\sum_{j=1}^{r}[(g_i^{-1})^* \cdot g_j^{-1}] \downarrow (g_j \cdot g_k^*) \downarrow = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. Положим $g_k^* = \sum\limits_{t=1}^{r} g_t^{-1} a_{tk}$, где $a_{tk} \in KH$. Тогда, используя лемму 1, получим

$$(g_j g_k^*) \downarrow = \sum_{t=1}^{r} (g_j g_t^{-1} a_{tk}) \downarrow = (a_{jk}) \downarrow = a_{jk}.$$

Аналогично положим $(g_i^{-1})^* = \sum\limits_{t=1}^{r} (b_{it} g_t$, где $b_{it} \in KH$, и получим

$$[(g_i^{-1})^* g_j^{-1}] \downarrow = \sum_{t=1}^{r} (b_{it} g_t g_j^{-1}) \downarrow = (b_{ij}) \downarrow = b_{ij}.$$

Наше выражение, таким образом, принимает вид

$$\sum_{j=1}^{r}[(g_i^{-1})^* g_j^{-1}] \downarrow (g_j g_k^*) \downarrow = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} a_{jk} \ \in KH.$$

Простая выкладка дает

$$[(g_i^{-1})^* g_k^*] \downarrow = \left[\left(\sum_{t=1}^{r} b_{it} g_t \right) \left(\sum_{s=1}^{r} g_s^{-1} a_{sk} \right) \right] \downarrow = \sum_{t,s} (b_{it} g_t g_s^{-1} a_{sk}) \downarrow = \sum_{t,s} (b_{it} g_t g_s^{-1}) \downarrow a_{sk}.$$

По лемме 1 последнее выражение равно $\sum\limits_{i=1}^{r} b_{it} a_{tk}$. Согласно лемме 2 имеем

$$((g_i^{-1})^* g_k^*) \downarrow = [(g_k g_i^{-1}) \downarrow]^* = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \qquad \square$$

Рассмотрим теперь (не обязательно неприводимое) представление подгруппы H над полем K посредством $h \to B_h$. Из разложения $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_r$ группы G на правые смежные классы по подгруппе H строится хорошо известное индуцированное представление группы G по формуле $g \to A_g$, где $A_g = (A_{ih})$,

$$A_{ih} = \begin{cases} B_{g_i g g_k^{-1}}, & \text{если } g_i g g_k^{-1} \in H; \\ 0, & \text{если } g_i g g_k^{-1} \notin H. \end{cases}$$

Пусть M_0 — модуль представления подгруппы H, тогда индуцированный модуль представления группы G имеет вид $M = M_0 \otimes_{KH} KG$. Метод индуцирования представлений групп переносится на строение симплектических модулей.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, H — подгруппа группы G и K — произвольное поле. Рассмотрим инволюцию $*$ в групповом кольце KH, которая продолжается до (также обозначенной через $*$) инволюции в групповом кольце KG. Если модуль представления M_0 подгруппы H является симплектическим модулем $(M_0, *, \Phi)$ с невырожденной знакопеременной и инвариантной относительно $*$ билинейной формой Φ_0, то индуцированный модуль представления допускает введение симплектической формы Φ по формуле*

$$\Phi(x \otimes g_1,\ y \otimes g_2) = \Phi_0(x, y(g_2 g_1^*) \downarrow)$$

для всех $x, y \in M_0$ и для всех $g_1, g_2 \in G$.

Доказательство. Легко видеть, что Φ является K-билинейной формой на M. Докажем, что она симплектическая.

1. Знакопеременность. Используя лемму 2, знакопеременность и инвариантность формы Φ_0, получим

$$\Phi(x\otimes g_1,\ y\otimes g_2)=\Phi_0(x,y(g_2g_1^*)\downarrow)=-\Phi_0(y(g_2g_1^*)\downarrow,x)=-\Phi_0(y,x(g_2g_1^*)\downarrow^*)=$$
$$=-\Phi_0(y,x(g_1g_2^*)\downarrow)=-\Phi(y\otimes g_2,\ x\otimes g_1).$$

2. Невырожденность. Пусть $g_1,g_2,\dots,g_r$ — система представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H и $h\to B_h$ — представление подгруппы H, модулем представления которой является M_0. Пусть, далее, D — матрица формы Φ_0, тогда

$$C=(B_{(g_ig_k^*)\downarrow})(E\otimes D)=(C_{ik})$$

является матрицей формы индуцированного модуля представления $M=M_0\otimes_{KH}KG$, где $C_{ik}=B_{(g_ig_k^*)\downarrow}D$. По лемме 3 матрица C невырожденная, т.к. имеет обратную.

3. Инвариантность относительно инволюции. Для любого элемента $a\in KG$ имеем

$$\Phi((x\otimes g_1)a,\ y\otimes g_2)=\Phi(x\otimes g_1a,\ y\otimes g_2)=\Phi_0(x,y(g_2a^*g_1^*)\downarrow)=\Phi(x\otimes g_1,\ (y\otimes g_2)a^*).$$

Заметим, что индуцированная билинейная форма Φ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора представителей правых смежных классов группы C по подгруппе H. $\square$

Теорема 1 обобщает соответствующие результаты работы [4] об индуцированных симплектических модулях относительно стандартной инволюции.

Отметим, что аналогичный результат имеет место для симметрических модулей, т.е. для модулей представлений M, в которых определена невырожденная симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно инволюции $*$ в групповом кольце KG.

Пусть M_0 — модуль представления подгруппы H группы G над произвольным полем K и $*$ — инволюция в групповом кольце KH, которая продолжается до инволюции в групповом кольце KG. Если над M_0 существует билинейная форма Φ_0 такая, что $(M,*,\Phi_0)$ является симметрическим модулем, то индуцированный модуль представления $M=M_0\otimes_{KH}KG$ также является симметрическим модулем.

Следствие. 1. Пусть $(M_0,*,\Phi_0)$ — симплектический модуль, где M_0 — абсолютно неприводимый модуль представления подгруппы H конечной группы G над полем K, характеристика которого не делит порядок группы G. Пусть, далее, индуцированный модуль представления $M=M_0\otimes_{KG}KG$ также абсолютно неприводим, тогда формула (1) дает значение -1 и для M_0, и для M. Значение -1 при индуцировании симплектического модуля сохраняется.

2. Если при таких же предположениях $(M_0,*,\Phi_0)$ — симметрический модуль, то индуцированный модуль представления также симметрический, т.е. значение $+1$ формулы (1) при индуцировании переходит опять в $+1$.

Если абсолютно неприводимый модуль представления M_0 несамосопряжен, то после индуцирования несамосопряженность может не сохраниться.

2. Случай метациклической группы

В работе [5] Мархольд и Цинк обсуждают вопрос, когда несамосопряженный абсолютно неприводимый модуль представления некоторой подгруппы конечной группы G методом индуцирования переходит в самосопряженный абсолютно неприводимый модуль представления. Рассматриваемые там инволюции стандартные. В случае метациклической группы мы обобщаем их результат на произвольные инволюции.

Неприводимые представления метациклической группы $G = \langle a, b : a^n = 1,\ b^m = a^t,\ bab^{-1} = a^r \rangle$ над полем комплексных чисел C хорошо известны. Пусть $a^j, a^{rj}, \ldots, a^{r^{s-1}j}$ — класс сопряженных элементов группы G и ζ — первообразный корень степени n из 1. Число s определяется как минимальное натуральное число, для которого $r^s j \equiv j \mod n$. Тогда

$$\partial : a \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \zeta^{r^{s-1}j} \end{pmatrix}, \quad b \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где $\eta = \sqrt[\frac{m}{s}]{\zeta^{jt}}$, является неприводимым представлением метациклической группы G над полем комплексных чисел C. Оно является индуцированным представлением представления $\alpha : a \to \zeta^j$, $b^s \to \eta$ степени 1 подгруппы $H = \langle a, b^s \rangle$. Все неприводимые представления метациклической группы G над полем комплексных чисел C имеют такой вид.

Чтобы описать все инволюции в групповом кольце CN циклического нормального делителя $N = \langle a \rangle$ над полем комплексных чисел C целесообразно в CN перейти к базису n, состоящему из ортогональных идемпотентов

$$e_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{-jk} a^k$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Данная инволюция $*$ в CN равенством $e_j^* = e_{\pi(j)}$ определяет подстановку $\pi \in S_n$, где $\pi^2 = (1)$, и наоборот. Инволюция $*$ в CN, определенная подстановкой π, имеет продолжение до инволюции $*$ в CG вида $b^* = bc$, где $c \in CN$ тогда и только тогда, когда элемент c удовлетворяет условиям

$$c^* c^{(r)} = 1, \quad c \cdot c^{(r)} \cdots c^{r^{m-1}} = (a^*)^i a^{-i}, \tag{5}$$

где $c^{(r)} = bab^{-1}$. На языке базиса, состоящего из ортогональных идемпотентов, эти условия эквивалентно выражаются следующими условиями для коэффициентов α_j элемента $c = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$;

$$\alpha_{\pi(j)} \cdot \alpha_{rj} = 1, \quad \alpha_j \cdot \alpha rj \cdots \alpha_{r^{m-1}j} = \zeta^{(\pi(j)-j)t}. \tag{6}$$

Лемма 4. *Если подстановка π, определяющая инволюцию $*$ в групповом кольце CN циклического нормального делителя N порядка n над полем C комплексных чисел, удовлетворяет условиям $\pi(rj) \equiv r\pi(j) \mod n$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, то существует элемент $c \in CN$, продолжающий инволюцию CN до инволюции $*$ в CG равенством $b^* = bc$.*

Доказательство. Разделим множество $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ на три части

$$\begin{aligned} M_1 &= \{j : \pi(j) = j \vee \pi(j) = r^{m/2} \mod n\}, \\ M_2 &= \{j : \pi(j) \equiv r^{m/2} \mod m \wedge \pi(j) \neq j\}, \\ M_3 &= M \setminus (M_1 \cup M_2). \end{aligned}$$

Определим

$$c_1 = \sum_{j \in M_1} e_j, \quad c_2 = \sum_{j \in M_2} \zeta^{\frac{1}{m}(\pi(j)-j)t}, \quad c_3 = \sum_{j \in M_3} \alpha_j c_j, \quad \text{где} \quad \alpha_j = \zeta^{-\frac{2}{m}jt},$$
$$\alpha_{\pi(j)} = \zeta^{-\frac{2}{m}\pi(j)t}, \quad \alpha_{rj} = \zeta^{\frac{2}{m}\pi(j)t} \quad \text{и} \quad \alpha_{r\pi(j)} = \zeta^{\frac{2}{m}jt}.$$

Тогда коэффициенты элемента $c = c_1 + c_2 + c_3$ удовлетворяют условиям (5), (6), т.е. инволюция $*$ в CN продолжается до инволюции $*$ в CN посредством $b^* = bc$. $\square$

Замечание 1. Достаточное условие леммы 4 в случае $m = 2$, т.е. для метациклической группы $G = \langle a, b : a^n = 1,\ b^2 = a^t,\ bab^{-1} = a^r\rangle$, является также и необходимым. В случае $m > 2$ это неверно.

Замечание 2. Если стандартная инволюция $h \to h^* = \chi_0(h)h^{-1}$ в CN, определенная подстановкой $\pi \in S_n$, продолжается до стандартной инволюции $g \to g^* = \chi(g)g^{-1}$ в CG (т.е. если характер χ_0 подгруппы N продолжается до характера χ метациклической группы G), то π удовлетворяет условиям $\pi(rj) = r\pi(j)$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Однако продолжение $b \to b^* = \chi(b)b^{-1}$ не обязательно является продолжением, построенным в доказательстве леммы 4.

Замечание 3. Пусть выполняется условие леммы 4 и U — подгруппы группы G, содержащая нормальный делитель N, тогда ограничение инволюции $*$ в CU (построенной в лемме 4) на CN является инволюцией в CU.

Рассмотрим в дальнейшем только такие инволюции в CN и их продолжения в CG, которые описываются в лемме 4. Поскольку модуль представления M метациклической группы, над которым имеем структуру симплектического модуля, как векторного пространства над полем C комплексных чисел, имеет четную размерность s и $s|m$, то естественно предположить, что и число m, встречающееся в определении метациклической группы $G = \langle a, b : a^n = 1,\ b^2 = a^t,\ bab^{-1} = a^r\rangle$, четное.

Теорема 2. *Пусть G — метациклическая группа и ∂ — неприводимое представление степени s над полем C комплексных чисел вида*

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta^{rj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta^{r^{s-1}j} \end{pmatrix} = A_a, \qquad b \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A_b,$$

где $\eta = \sqrt[\frac{m}{s}]{\zeta^{jt}}$. Пусть, далее, $*$ — инволюция в CN, определяющая подстановка π которой удовлетворяет условиям $\pi(rj) \equiv r\pi(j) \mod n$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, продолжена до инволюции в CG посредством $b^* = bc$, где $c \in CN$. Пусть, наконец, модуль M_0 представления $d : a \to \zeta^j$, $b^s \to \eta$ подгруппы $H = \langle a, b^s\rangle$, которое индуцирует представление ∂, не самосопряжен относительно инволюции $*$. Тогда для индуцированного модуля представления $M = M_0 \otimes_{CH} CG$ группы G имеет место: модуль M относительно инволюции $*$ в CG самосопряжен тогда и только тогда, когда самосопряжен подмодуль $M_1 = M_0 \otimes_{CU} CG$ подгруппы $U = \langle a, b^{s/2}\rangle$. В частности, $(M, *, \Phi)$ является симплектическим модулем тогда и только тогда, когда M_1 — симплектический модуль. Аналогично $(M, *, \Phi)$ — симплектический модуль тогда и только тогда, когда уже над M_1 существует невырожденная симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно инволюции $*$ (в CU). Наконец, M несамосопряжен тогда и только тогда, когда M_1 несамосопряжен.

Доказательство проведем на языке матриц. Ввиду транзитивности индуцирования представлений имеем $\partial' = \mathrm{ind}_H^G = \mathrm{ind}_U^G(\mathrm{ind}_H^U d)$. Значит, матричное представление ∂ эквивалентно представлению $\partial : a \to A'_a$, $b \to A'_b$, где

$$A'_a = \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \zeta^{r^{\frac{s}{2}}j} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \zeta^{rj} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \zeta^{r^{\frac{s}{2}-1}j} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \zeta^{r^{\frac{s}{2}+1}j} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \zeta^{r^{s-1}j} \end{pmatrix},$$

$$A'_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \eta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неособенную матрицу B, для которой $A_aB = BA'_a$ и $A_bB = BA'_b$, можно выбрать в виде $B = (b_{ik})$, где $b_{i,2i-1} = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, \frac{s}{2}$, $b_{\frac{s}{2}+i,2i} = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, \frac{s}{2}$, а все остальные $b_{ik} = 0$.

Ограничение представления ∂' на подгруппу $U = \langle a, b^{\frac{s}{2}} \rangle$ распадается на $\frac{s}{2}$ G-сопряженных между собой неприводимых представлений степени 2 подгруппы U вида

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta^{r^k j} & 0 \\ 0 & \zeta^{r^{\frac{s}{2}+k} j} \end{pmatrix}, \qquad b^{\frac{s}{2}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, \dots, \frac{s}{2} - 1.$$

1. Пусть теперь $(M, *, \Phi)$ — симплектический модуль, т.е. для некоторой матрицы $C = (c_{ik})$ имеем $A_aC = CA^T_{a^*}$, $A_bC = CA^T_{b^*}$, где $C^T = -C$ и $\det C \neq 0$. Так как

$$A_{a^*} = \begin{pmatrix} \zeta^{\pi(j)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta^{\pi(rj)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta^{\pi(r^{s-1}j)} \end{pmatrix},$$

то первая строчка матричного уравнения $A_aC = CA^T_{a^*}$ дает $j \cong \pi(r^k j) \mod n$ для некоторого k, и из $\zeta^j c_{1,k+1} = c_{1,k+1}\zeta^{\pi(r^k j)}$ следует $c_{1,k+1} \neq 0$. Вторая строчка аналогично приводит (т.к. $\pi(r)j \cong r\pi(j) \mod n$) к неравенству $c_{2,k+2} \neq 0$ для этого же k. В общем случае $c_{i,k+i} \neq 0$.

Так как матрица C кососимметрическая, то с одной стороны имеем $c_{k+i,i} = -c_{i,k+i}$, с другой стороны — $c_{k+i,i} = c_{k+i,2k+i}$, откуда следует $2k = s$. Матрица C поэтому имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{\frac{s}{2}} \\ -c_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & -c_{\frac{s}{2}} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ -C_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, получим $\pi(j) = r^{\frac{s}{2}} j$. Матричное уравнение $A^T_{b^*} = C^{-1}A_bC$, т.е.

$$A^T_{b^*} = \begin{pmatrix} 0 & -C_1^{-1} \\ C_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -C_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}$$

дает

$$B_1 = B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \eta B_2.$$

Отсюда

$$(A_b^T)^{\frac{s}{2}} = -\begin{pmatrix} 0 & \eta E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Ограничение симплектического модуля $(M, *, \Phi)$ на группы $U = \langle a, b^{\frac{s}{2}} \rangle$ приводит к тому, что коградиентная матрица $C' = BCB^T$ имеет вид

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & & & \\ -c_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & c_2 & & & \\ & & -c_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & c_{\frac{s}{2}} \\ & & & & & -c_{\frac{s}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ограничение симплектического модуля $(M, *, \Phi)$ на группу U распадается в ортогональную прямую сумму симплектических подмодулей. В частности, модуль представления M_1 подгруппы U над полем комплексных чисел C, соответствующий представлению

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{r^{\frac{s}{2}j}} \end{pmatrix}, \qquad b \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$$

является симплектическим модулем $(M_1, *, \Phi_1)$.

2. Обратно, пусть $(M_1, *, \Phi_1)$ — симплектический модуль, тогда по теореме 1 индуцированный модуль представления $M = M_1 \otimes_{CU} CG$ также является симплектическим модулем.

Аналогичный результат имеет место для симметрических модулей. Так как самосопряженный относительно инволюции $*$ модуль представления M_1 по лемме Шура допускает либо кососимметрическую, либо симметрическую невырожденную инвариантную билинейную форму, то теорема 2 полностью доказана. Заметим, что теорема 2 не верна для любой инволюции $*$ в CN, которая продолжается до инволюции $*$ в CG так, чтобы ограничение на CU также было инволюцией.

Пример. Рассмотрим метациклическую группу

$$G = \langle a, b : a^{20} = 1,\ b^4 = 1,\ bab^{-1} = a^3 \rangle$$

порядка 80. Подстановка $\pi = (1,3)(7,9)$ в групповом кольце CN определяет инволюцию, которая не удовлетворяет условию леммы 4. Однако она продолжается до инволюции в CG, если положить $b^* = -b$. Рассмотрим неприводимое представление

$$\partial : a \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta & & & \\ & \zeta^3 & & \\ & & \zeta^9 & \\ & & & \zeta^7 \end{pmatrix} = A_a, \qquad b \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} = A_b$$

группы G степени 4. Так как для матрицы

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем $A_a C = C A_{a^*}^T$ и $A_b C = C A_{b^*}^T$, то соответствующий модуль представления симплектический. Однако модуль представления подгруппы $U = \langle a, b^2 \rangle$ с неприводимым представлением

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^9 \end{pmatrix}, \qquad b^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не является симплектическим модулем. Относительно ограничения инволюции $*$ в CG на CU, которое определяется равенством $(b^2)^* = b^2$, он даже несамосопряжен.

Литература

1. Боревич З.И. *О симплектических пространствах с группами операторов* // Матем. записки. – 1970. – Т. 733. – С. 36–50.
2. Боревич З.И., Девятко Г.И. *Об одной формуле Фробениуса-Мура* // Алгебра и теория чисел. Темат. межвуз. сб. – Орджоникидзе. – 1978. – Т. 3. – С. 3–8.
3. Rosenbaum K. *Uber eine Vertraglichkeitsbedingungen beim Induzieren symplektischer Moduln* // Wiss. Zeitschr. PH Erfurt, Math.-Nat. Reine. 17. – 1981. — Heft 1. – P. 140–143.
4. Rosenbaum K. *Induzierte symplektische Moduln* // Banach Center Publications. – 1981. – V. 9. – P. 321–328.
5. Mahrhold K., Zink E.W. *Selbstkonjugierte irreduzible Darstellungen von Gruppenerweit* // Math. Nachr. – 1986. – V. 127. – P. 223–264.

Педагогическая высшая школа
(*Германия, г. Эрфурт*)

Поступила
26.08.1995