ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.983

С.П. ТОРОПОВА

СВЯЗЬ ПОЛУГРУПП С ОСОБЕННОСТЬЮ И ИНТЕГРИРОВАННЫХ ПОЛУГРУПП

Введение

Многие задачи математической физики, в частности, задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений могут быть записаны в форме задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = x, \tag{1}$$

в некотором банаховом пространстве X. Существует связь между решением задачи (1) и теорией полугрупп линейных ограниченных операторов. Известно, что для широкого класса операторов A семейство операторов $\{U(t),\ t \geq 0\}$ таких, что $u(t) = U(t)x$, образует полугруппу. В зависимости от свойств оператора A получаются полугруппы с различными свойствами и, следовательно, различные решения задачи (1) (классическое решение на $D \subseteq D(A)$ исходной задачи или ее обобщенное решение на X, классическое решение проинтегрированной задачи). Наилучшим по отношению к разрешимости уравнения (1) является случай, когда оператор A порождает сильно непрерывную при $t \geq 0$ полугруппу (т. е. полугруппу класса C_0). В этом случае задача Коши равномерно корректна на $D(A)$, т. е. для любого $x \in D(A)$ существует единственное решение, устойчивое равномерно по $t \in [0, T]$ относительно начальных данных: $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| \leq M\|x\|$.

В последнее время наряду с теорией полугрупп класса C_0 для исследования корректности задачи (1) широко используется теория интегрированных и C-полугрупп (см., напр., [1]). В [2], [3] указаны множества начальных данных, для которых существует единственное решение задачи (1) с оператором A, порождающим n раз интегрированную полугруппу и C-полугруппу соответственно, и показано, что найденные решения устойчивы относительно начальных данных x по более сильной норме, чем норма исходного пространства.

Наряду с упомянутыми полугруппами существуют полугруппы, которые являются сильно непрерывными при $t > 0$, но имеют особенность в окрестности нуля. К таким полугруппам относятся полугруппы роста α. При исследовании корректности задачи (1) с оператором, порождающим полугруппу роста α, возникает вопрос о связи таких полугрупп с полугруппами, для которых уже получены результаты о корректности разного рода задачи (1).

В данной работе показано, что генератор полугруппы роста α при $0 < \alpha < 1$ является генератором интегрированной полугруппы, а при $\alpha \geq 1$ генератором C-полугруппы; приведен пример семейства матричных операторов $A(\gamma)$, зависящих от некоторого параметра $\gamma > 0$ и порождающих полугруппу роста $\alpha(\gamma) \geq 0$.

В обзоре [1] авторами была высказана гипотеза о том, что генератор полугруппы роста $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, является генератором n раз интегрированной полугруппы. Полученные результаты о связи полугрупп роста α и интегрированных полугрупп, примененные к семейству операторов $A(\gamma)$, помогают понять, что выдвинутая гипотеза верна только при дополнительном условии

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Российской Федерации, грант № 97-0-1.7-72 и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00142.

существования регулярной точки у оператора A. В работе показано, что при одних значениях параметра γ оператор $A(\gamma)$ порождает C-полугруппу с оператором C, равным резольвенте оператора $A(\gamma)$ и порождает интегрированную полугруппу; при других значениях параметра γ оператор $A(\gamma)$ порождает C-полугруппу, но имеет пустое резольвентное множество и не порождает интегрированную полугруппу. Кроме того, в работе приведены примеры параболических по Шилову систем линейных дифференциальных уравнений, операторы решения которых образуют полугруппы роста $\alpha \geq 0$.

Наряду с полугруппами, определенными и имеющими особенность на вещественной полуоси $\mathbf{R}^+$, важными для приложений являются полугруппы, определенные в некотором секторе комплексной плоскости, содержащем $\mathbf{R}^+$, которые голоморфны в этом секторе, но имеют особенность при подходе к границе голоморфности. В работе показано, что если оператор A порождает голоморфную полугруппу $\{U(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ угла $\pi/2$, которая удовлетворяет оценке $\|U(z)\| \leq M\left(\frac{|z|}{\operatorname{Re} z}\right)^\alpha$, то для всех целых $r > \alpha$ оператор iA порождает r раз интегрированную полугруппу. На основе этого можно сделать вывод о существовании и устойчивости решения задачи (1) с оператором iA. Примером полугруппы, удовлетворяющей данным оценкам, служит голоморфная полугруппа $\{G(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ угла $\pi/2$, порождаемая оператором Лапласа Δ в пространствах $L^p(\mathbf{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. При различных значениях $1 \leq p < \infty$, указанная полугруппа имеет различные особенности. От порядка этой особенности зависит свойство оператора Шредингера $i\Delta$ порождать ту или иную полугруппу. Известно, что этот оператор порождает полугруппу класса C_0 только в пространстве $L^2(\mathbf{R}^N)$. На основе полученных результатов, в работе показано, что в остальных пространствах $L^p(\mathbf{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, оператор Шредингера $i\Delta$ порождает интегрированную полугруппу.

1. Связь полугрупп роста α и интегрированных полугрупп

Определение 1 ([4]). Пусть $\alpha > 0$. Семейство линейных ограниченных операторов $\{T(t), t \geq 0\}$ называется *полугруппой роста* α, если выполняются следующие условия:

(T1) $T(t+s) = T(t)T(s)$ для всех $t, s \geq 0$, $T(0) = I$;
(T2) для всех $x \in X$ функция $T(t)x$ непрерывна при $t > 0$;
(T3) $X_0 = \bigcup\limits_{t>0} T(t)[X]$ плотно в X;
(T4) если $T(t)x = 0$ для всех $t > 0$, то $x = 0$;
(T5) $\|t^\alpha T(t)\|$ ограничена при $t \to 0$.

Число $\omega = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} \log \|T(t)\|$ называется *типом* полугруппы $\{T(t),\ t \geq 0\}$. В [5] показано, что ω является либо конечным положительным числом, либо равно $-\infty$.

Определение 2 ([4]). Оператор $Ax = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}[T(t)x - x]$, $D(A) = \{x \in X : \exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}[T(t)x - x]\}$, называется *инфинитезимальным генератором* полугруппы $\{T(t),\ t \geq 0\}$ роста α.

В [4] показано, что генератор полугруппы роста $\alpha > 0$ замыкаем и плотно определен. Замыкание оператора A называется *полным инфинитезимальным генератором* (далее просто генератором).

Лемма 1. *Пусть оператор A порождает полугруппу $\{T(t),\ t \geq 0\}$ роста $0 < \alpha < 1$. Тогда резольвентное множество оператора A непусто и $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$.*

Доказательство. Из условия (T5) в определении 1 следует, что для некоторого $M > 0$

$$\|t^\alpha T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t > 0.$$

Введем оператор

$$R(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt. \tag{2}$$

При $\lambda > \omega$ оператор $R(\lambda)$ определен для всех $x \in X$ и, используя оценки на полугруппу, отметим, что он удовлетворяет оценке

$$\|R(\lambda)x\| \le M \int_0^\infty e^{(\omega-\lambda)t} t^{-\alpha} \|x\| dt \le \frac{M\|x\|}{(\lambda-\omega)^{1-\alpha}} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt, \quad x \in X.$$

При $0 < \alpha < 1$ последний интеграл является сходящимся и

$$\|R(\lambda)\| \le \frac{M}{(\lambda-\omega)^{1-\alpha}} \Gamma(1-\alpha), \quad \lambda > \omega.$$

Покажем, что при $\lambda > \omega$ оператор $R(\lambda)$ совпадает с резольвентой генератора A, т. е.

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, &\quad x \in D(A), \\ (\lambda I - A)R(\lambda)x = x, &\quad x \in X. \end{aligned}$$

Пусть $x \in D(A)$, тогда

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda I - A)x = \lambda R(\lambda)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(T(h)x - x\right) dt = \\ = \lambda R(\lambda)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(T(h+t)x - T(t)x\right) dt = \\ = \lambda R(\lambda)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)x = \lambda R(\lambda)x + x - \lambda R(\lambda)x = x. \end{aligned}$$

Используя замкнутость оператора A, аналогично показываем, что $(\lambda I - A)R(\lambda)x = x$ для $x \in D(A)$. В силу $\overline{D(A)} = X$ для любого $x \in X$ существует такая последовательность $\{x_n\} \in D(A)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $(\lambda I - A)R(\lambda)x_n = x_n$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $(\lambda I - A)R(\lambda)x = x$, $x \in X$. Таким образом, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$. $\square$

Теорема 1. *Пусть оператор A является генератором полугруппы $\{T(t),\ t \ge 0\}$ роста $0 < \alpha < 1$, тогда оператор A порождает один раз интегрированную полугруппу.*

Доказательство. По лемме 1 $\rho(A) \ne \emptyset$ и оператор $R(\lambda)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt$, $\lambda > \omega$, совпадает с резольвентой оператора A. Обозначим через n целую часть α. В [6] доказано, что если $\{T(t),\ t \ge 0\}$ является полугруппой роста α, то семейство операторов $\{S(t),\ t \ge 0\}$, где $S(t) = T(t)C$ и

$$Cx := \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad x \in X, \quad \lambda > \omega, \tag{3}$$

образует C-полугруппу с генератором, равным генератору полугруппы $\{T(t),\ t \ge 0\}$. В нашем случае $n = 0$. Следовательно, оператор C имеет вид $Cx = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt$. Таким образом, получаем $C = (\lambda I - A)^{-1}$, семейство операторов $\{S(t),\ t \ge 0\}$ образует C-полугруппу с оператором $C = (\lambda I - A)^{-1}$, и генератором этой полугруппы является оператор A.

Оператор A является плотно определенным, и его резольвентое множество непусто. В [7] доказано, что если такой оператор порождает n раз интегрированную полугруппу, то он порождает C-полугруппу с оператором $C = (\lambda I - A)^{-n}$, $\lambda \in \rho(A)$. Верно и обратное. В силу этого утверждения оператор A является генератором один раз интегрированной полугруппы $\{V(t),\ t \ge 0\}$, где $V(t)x = (\lambda I - A) \int\limits_0^t S(\tau)x\, d\tau$, $x \in X$. $\square$

Используя результаты [2] о существовании решения задачи (1) с оператором A, порождающим интегрированную полугруппу, получаем

Следствие. Для любых $x \in D(A^2)$ задача Коши (1) с оператором A, порождающим полугруппу роста $0 < \alpha < 1$, имеет такое единственное решение, что $\|u(t)\| \leq Me^{\omega t}(\|x\| + \|Ax\|)$.

Замечание. Полугруппу роста $\alpha \geq 1$, так же, как и полугруппу роста $0 < \alpha < 1$, можно регуляризовать с помощью оператора C из формулы (3). Как показано в [4], этот оператор C совпадает с оператором $(\lambda I - A)^{-(n+1)}$, где $n = [\alpha]$, при этом оператор $(\lambda I - A)^{-(n+1)}$ ограничен, но не является $(n+1)$-й степенью резольвенты оператора A, т. к. оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ неограничен. Регуляризованное семейство операторов образует C-полугруппу с генератором A. Используя результаты о существовании решения задачи (1) с оператором A, порождающим C-полугруппу [3], получаем, что для любого $x \in R(C)$ существует такое единственное решение задачи (1) с оператором A, порождающим полугруппу роста $\alpha \geq 1$, что $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| \leq K\|C^{-1}x\|$.

Теперь рассмотрим пример семейства операторов $A(\gamma)$, зависящих от некоторого параметра $\gamma > 0$ и порождающих полугруппу роста $\alpha \geq 0$. Используя доказанные в теореме 1 результаты о связи полугрупп роста α с интегрированными и C-полугруппами, покажем, что при одних значениях параметра γ оператор $A(\gamma)$ порождает C-полугруппу, имеет непустое резольвентное множество и порождает интегрированную полугруппу; при других значениях параметра γ оператор $A(\gamma)$ хотя и порождает C-полугруппу, но имеет пустое резольвентное множество и не порождает интегрированную полугруппу.

Рассмотрим семейство операторов $A = A(\gamma)$ [8], [1]

$$Au = \begin{pmatrix} -g & -f \\ 0 & -g \end{pmatrix} u, \tag{4}$$
$$g(x) = 1 + x^2, \quad f(x) = x^{2\gamma}, \quad \gamma > 0,$$

в пространстве $E = \{L_1(\mathbf{R}) \times L_1(\mathbf{R}),\ \|u\|_E = \|u_1\|_1 + \|u_2\|_1\}$ с областью определения

$$D(A) = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in L_1(\mathbf{R}) \times L_1(\mathbf{R}) : gu_1 + fu_2,\ gu_2 \in L_1(\mathbf{R}) \right\}.$$

Построим формально оператор-функцию $U(t) = e^{At} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots$ Этот оператор представим в виде

$$U(t)u = e^{-tg} \begin{pmatrix} 1 & -tf \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u.$$

Тогда

$$\|U(t)\|_{L(E)} = 2 \max_{x \in \mathbf{R}} [e^{-t(1+x^2)} t |x^{2\gamma}|] = 2t^{1-\gamma}\gamma^\gamma e^{-t-\gamma} = O(t^{1-\gamma}) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

При $0 < \gamma \leq 1$ получаем оценки для резольвенты оператора A

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} R_A(\lambda) \right\| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - \omega)^{n+1}}, \quad M > 0, \quad \lambda > \omega,$$

которые означают, что оператор A порождает полугруппы класса C_0. Следовательно, при $0 < \gamma \leq 1$ семейство ограниченных операторов $\{U(t),\ t \geq 0\}$ образует полугруппу класса C_0.

Пусть $1 < \gamma < 2$, тогда $\|t^\alpha U(t)\| \leq M$, где $\alpha := \gamma - 1$. Следовательно, при этих значениях параметра γ семейство операторов $\{U(t),\ t \geq 0\}$ является полугруппой роста $0 < \alpha < 1$. Тогда по теореме 1 оператор A порождает один раз интегрированную полугруппу $\{V(t),\ t \geq 0\}$, где $V(t)x = \int\limits_0^t U(\tau)x\,d\tau$.

Пусть $2 \leq \gamma < 3$, тогда $\{U(t),\ t \geq 0\}$ является полугруппой роста α, где $1 \leq \alpha < 2$. Используя результаты работы [6] о связи полугрупп роста α и C-полугрупп, получаем, что семейство операторов $\{S(t),\ t \geq 0\}$, где $S(t) := U(t)C$ и $Cx := \int\limits_0^\infty te^{-\lambda t}U(t)x\,dt$, образует C-полугруппу.

Однако при этих значениях параметра γ оператор A имеет пустое резольвентное множество. Действительно,

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{(\lambda+g)^2}\begin{pmatrix}\lambda+g & -f\\ 0 & \lambda+g\end{pmatrix} = \frac{1}{(\lambda+1+x^2)^2}\begin{pmatrix}\lambda+1+x^2 & -x^{2\gamma}\\ 0 & \lambda+1+x^2\end{pmatrix},$$

и при $2<\gamma<3$ функция $-x^{2\gamma}/(\lambda+1+x^2)^2$ не является ограниченной. Значит, оператор A не имеет регулярных точек и, следовательно, не может порождать интегрированную полугруппу.

Аналогичные рассуждения показывают, что при $\gamma \geq 3$ семейство операторов $\{U(t), t\geq 0\}$ является полугруппой роста α, но резольвентное множество оператора A остается пустым. Таким образом, при $\gamma>2$ оператор A не порождает интегрированную полугруппу.

Иследованный оператор A, определяемый функциональной матрицей (4), связан с параболическими по Шилову системами, для которых операторы решения образуют полугруппу роста $\alpha>0$.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A(D)u(t,x),\quad t\geq 0,\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\quad u(0,x)=f, \tag{5}$$

где $u=(u_1,u_2,\dots,u_m)$ — вектор-функция, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — вектор начальных данных и $A(D)$ — дифференциальный оператор порядка r:

$$A(D)=\sum_{|\alpha|\leq r} A_\alpha D^\alpha,\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n,$$
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\dots D_n^{\alpha_n},\quad D_k=i\partial/\partial x_k,\quad k=1,2,\dots,n,$$

где A_α — матрицы размера $m\times m$. Рассматривая для простоты функции $u(t,\cdot)$ и $f(\cdot)$ как элементы пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$, применим к обеим частям системы уравнений из задачи (5) преобразование Фурье по пространственным переменным x. Обозначим образы Фурье функций $u(t,\cdot)$ и $f(\cdot)$ через $\widetilde{u}(t,\cdot)$ и $\widetilde{f}(\cdot)$ соответственно. Тогда задача (5) запишется в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\widetilde{u}(t,\lambda)}{dt} = A(\lambda)\widetilde{u}(t,\lambda),\quad t\geq 0,\quad \widetilde{u}(0,\lambda)=\widetilde{f}(\lambda),$$

в пространстве вектор-функций с координатами из $L^2(\mathbf{R}^n)$ и матрицей $A(\lambda)$, элементы которой полиномиально зависят от λ. Решение этой задачи имеет вид

$$\widetilde{u}(t,\lambda)=e^{A(\lambda)t}\widetilde{f}(\lambda).$$

Благодаря теореме Планшереля, оценки на матрицу $e^{A(\lambda)t}$ совпадают с оценками на оператор решения $U(t)$ исходной задачи (5), поэтому оператор решения $U(t)$ при каждом фиксированном $t>0$ будет ограниченным тогда и только тогда, когда

$$\exists M>0:\ \sup_{\lambda\in\mathbf{R}^n}\|e^{tA(\lambda)}\|_m\leq M.$$

Пусть $\Lambda_1(\lambda),\Lambda_2(\lambda),\dots,\Lambda_n(\lambda)$ — собственные значения матрицы $A(\lambda)$. Система (5) называется *параболической по Шилову* [9], если

$$\exists a,h>0,\ b\in\mathbf{R}:\ \Re\Lambda_k(\lambda)\leq -a|\lambda|^h+b.$$

В [10] было показано, что для параболических по Шилову систем справедлива оценка $\|e^{tA(\lambda)}\|_m\leq\frac{c}{t^\gamma}$, $\gamma=\frac{(r-h)(m-1)}{h}$, $c>0$. Как уже отмечалось выше, эта же оценка справедлива и для операторов решения исходной задачи. Тогда при $r<h$ семейство операторов решения образует полугруппу роста γ.

Нетрудно показать, что, например, при $k>0$ система $\frac{\partial u_1}{\partial t}=-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{\partial^k u_1}{\partial x^k}-\frac{\partial u_2}{\partial x^2}$ параболична по Шилову, и для операторов решения этой системы справедлива оценка $\|U(t)\|=c(t)/t^\gamma$, где $c(t)$ — ограниченная непрерывная функция на $[0,\infty)$, $\gamma = \max\{k/2-1, 0\}$ [9]. Отсюда следует, что для всех $k > 2$ данное семейство операторов является полугруппой роста $\gamma > 0$.

2. Связь между порождением оператором A голоморфной полугруппы с особенностью и порождением оператором iA интегрированной полугруппы

Определение 3 ([11]). Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $\{U(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ называется *голоморфной C_0-полугруппой угла $\pi/2$*, если оно удовлетворяет условиям

(i) функция $z \to U(z)$ голоморфна при $\operatorname{Re} z > 0$;
(ii) $U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$, $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 > 0$;
(iii) семейство операторов $\{U(t),\ t \geq 0\}$ образует C_0-полугруппу, где $z = t + is$.

Теорема 2. *Пусть оператор A порождает голоморфную C_0-полугруппу $\{U(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ угла $\pi/2$ и существуют $\alpha \geq 0$, $M > 0$ такие, что $\|U(z)\| \leq M\left(\frac{|z|}{\operatorname{Re} z}\right)^{\alpha}$. Тогда для всех $r > \alpha$ оператор iA порождает r раз интегрированную полугруппу.*

Доказательство. Для $r > \alpha$, как показано в [9], определен оператор $(I-A)^{-r}$, и для него справедливо равенство

$$(I-A)^{-r}x = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{r-1} U(u)x\, du. \tag{6}$$

Так как $r > 0$, то оператор $(I-A)^{-r}$ является ограниченным. Следовательно, резольвентное множество оператора A непусто и $1 \in \rho(A)$. Рассмотрим новое семейство операторов $\{V(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$, где $V(z)x := (I-A)^{-r}U(z)x$, $\operatorname{Re} z > 0$. При $r > \alpha$ семейство операторов $\{V(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ ограничено [12]. Используя равенство (6), получаем $U(z)(I-A)^{-r}x = (I-A)^{-r}U(z)x$, $x \in X$. Покажем, что для всех $\operatorname{Re} z_1, z_2 > 0$

$$(I-A)^{-r}V(z_1+z_2) = V(z_1)V(z_2) \ \text{ и } \ V(0) = (I-A)^{-r}.$$

Пусть $x \in X$, тогда

$$\begin{gathered}(I-A)^{-r}V(z_1+z_2)x = (I-A)^{-r}(I-A)^{-r}U(z_1+z_2)x = \\ = (I-A)^{-r}U(z_1)(I-A)^{-r}U(z_2)x = V(z_1)V(z_2)x. \\ V(0)x = (I-A)^{-r}U(0)x = (I-A)^{-r}x.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что семейство операторов $\{V(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ образует голоморфную C-полугруппу с оператором $C = (I-A)^{-r}$. Оператор $Gx := C^{-1}\frac{d}{dt}V(t)x|_{s=0}$ с максимальной областью определения называется генератором C-полугруппы $\{V(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ [12]. Известно [3], что этот оператор замкнут. Покажем, что $G = A$. Действительно, для $x \in D(A)$

$$(I-A)^r \frac{d}{dt}V(t)x|_{t=0} = (I-A)^r \frac{d}{dt}(I-A)^{-r}U(t)x|_{t=0} = \frac{d}{dt}U(t)x|_{t=0} = Ax.$$

Рассмотрим граничное значение этой полугруппы

$$W_r(s)x := \lim_{t\to 0}(I-A)^{-r}U(t+is)x, \quad s \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Этот предел существует для всех $x \in X_0 = \bigcup\limits_{t>0} U(t)[X]$. Действительно, пусть $x \in X_0$, тогда существуют такие $h > 0$, $y \in X$, что $x = U(h)y$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}(I-A)^{-r}U(t+is)x &= \lim_{t\to 0}(I-A)^{-r}U(t+is)U(h)y = \\ &= \lim_{t\to 0}(I-A)^{-r}U(t+h+is)y = (I-A)^{-r}U(h+is)y.\end{aligned}$$

В силу того, что на вещественной оси семейство $\{U(t),\ t \geq 0\}$ образует полугруппу класса C_0, множество X_0 плотно в X. Нетрудно показать, что полугруппа $\{V(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ равномерно ограничена в секторе $\{t + is,\ 0 < t < 1,\ |s| < a,\ a > 0\}$. Отсюда в силу теоремы Банаха–Штейнгауза предел в правой части равенства (7) существует для всех $x \in X$. Покажем, что семейство операторов $\{W_r(s),\ s \in \mathbf{R}\}$ образует C-группу с оператором $C = (I - A)^{-r}$. Действительно,

$$\begin{aligned} W_r(0)x &= \lim_{t\to 0}(I - A)^{-r}U(t)x = (I - A)^{-r}x, \\ W_r(s_1)W_r(s_2)x &= \lim_{t\to 0}(I - A)^{-r}U(t + is_1)(I - A)^{-r}U(t + is_2)x = \\ &= \lim_{t\to 0}(I - A)^{-r}(I - A)^{-r}U(2t + i(s_1 + s_2))x = (I - A)^{-r}W_r(s_1 + s_2)x. \end{aligned}$$

Из ограниченности операторов $U(z)$ и их сильной непрерывности следуют аналогичные свойства операторов $W_r(s)$, $s \in \mathbf{R}$. Таким образом, семейство операторов $\{W_r(s),\ s \in \mathbf{R}\}$ образует C-группу. Обозначим через B генератор этой полугруппы. Покажем, что $B = iA$. В силу голоморфности полугруппы $\{U(z),\ \operatorname{Re} z > 0\}$ при $t > 0$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t + is) = -i\frac{\partial}{\partial s}U(t + is). \tag{8}$$

Покажем, что при $t > 0$ справедливы равенства

$$AU(t + is)x = \frac{\partial}{\partial t}U(t + is)x, \quad x \in D(A), \tag{9}$$

$$BU(t + is)x = \frac{\partial}{\partial s}U(t + is), \quad x \in D(B). \tag{10}$$

Пусть $x \in D(A)$, тогда при $t > 0$

$$\begin{aligned} AU(t + is)x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[U(h)U(t + is)x - U(t + is)x] = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[U(h + t + is)x - U(t + is)x] = \frac{\partial}{\partial t}U(t + is)x. \end{aligned}$$

Пусть $x \in D(B)$ и $t > 0$, тогда, используя определение генератора C-полугруппы, получаем

$$\begin{aligned} BU(t + is)x &= (I - A)^r \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[W_r(h)U(t + is)x - (I - A)^{-r}U(t + is)x] = \\ &= (I - A)^r \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\lim_{t_1\to 0}(I - A)^{-r}U(t_1 + ih)U(t + is)x - (I - A)^{-r}U(t + is)x] = \\ &= (I - A)^r \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\lim_{t_1\to 0}(I - A)^{-r}U(t_1 + t + i(h + s))x - (I - A)^{-r}U(t + is)x] = \\ &= (I - A)^r \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(I - A)^{-r}U(t + i(h + s))x - (I - A)^{-r}U(t + is)x] = \frac{\partial}{\partial s}U(t + is)x. \end{aligned}$$

Пусть $x \in D(B)$, тогда, используя равенства (8) и (10), получаем

$$iAU(t)x = i\frac{\partial}{\partial t}U(t)x = \frac{\partial}{\partial s}U(t + is)x|_{s=0} = BU(t)x = U(t)Bx \to Bx \ \text{ при } \ t \to 0.$$

Так как iA — замкнутый оператор и $U(t)x \to x$, то $iAx = Bx$, т. е. $B \subset iA$. Пусть $x \in D(B)$, тогда, используя равенства (8) и (9), получаем

$$-iBU(t)x = -i\frac{\partial}{\partial s}U(t + is)x|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial t}U(t)x = AU(t)x = U(t)Ax \to Ax$$

при $t \to 0$. Поскольку B — замкнутый оператор и $U(t)x \to x$, то $-iBx = Ax$, т. е. $iA \subset B$. Следовательно, $iA = B$. Таким образом, генератором C-группы $\{W_r(s),\ s \in \mathbf{R}\}$ является оператор iA.

Рассмотрим новое семейство операторов $S(s) := (i)^{-r}W_r(s)$, т.е. $S(s)x = \lim_{t\to 0}(iI - iA)^{-r}\times$ $\times U(t+is)x$, $x \in X$. В силу того, что $i \in \rho(iA)$, оператор $(iI-iA)^{-r}$ при целых значениях r совпадает с r-й степенью резольвенты оператора iA. Семейство операторов $\{S(s),\ s\in\mathbf{R}\}$ образует $(iI-iA)^{-r}$-группу. Действительно,

$$S(0)x = (i)^{-r}\lim_{t\to 0}(I-A)^{-r}W_r(t)x = (i)^{-r}(I-A)^{-r}x = (iI-iA)^{-r}x,$$
$$S(s_1)S(s_2)x = (i)^{-r}(i)^{-r}W_r(s_1)W_r(s_2)x = (i)^{-r}(i)^{-r}(I-A)^{-r}W_r(s_1+s_2)x =$$
$$= (i)^{-r}(I-A)^{-r}(i)^{-r}W_r(s_1+s_2)x = (i)^{-r}(I-A)^{-r}S(s_1+s_2)x =$$
$$= (iI-iA)^{-r}S(s_1+s_2)x,\quad x\in X.$$

В силу того, что полугруппа $\{W_r(s),\ s\in\mathbf{R}\}$ сильно непрерывна и ограничена, семейство операторов $\{S(s),\ s\in\mathbf{R}\}$ тоже сильно непрерывно и ограничено. Таким образом, семейство операторов $\{S(s),\ s\in\mathbf{R}\}$ образует $(iI-iA)^{-r}$-группу. Пусть B — генератор $(iI-iA)^{-r}$-регуляризованной группы $\{S(s),\ s\in\mathbf{R}\}$. Возьмем $x\in D(A)$, тогда по определению

$$Bx = (iI-iA)^r\frac{d}{ds}S(s)x = (iI-iA)^r(i)^{-r}\frac{d}{ds}W_r(s)x =$$
$$= (i)^{-r}(i)^{-r}(i)^r(iI-iA)^r\frac{d}{ds}W_r(s)x = (i)^{-2r}(I-A)^r\frac{d}{ds}W_r(s)x = -iAx.$$

Таким образом, генератором группы $\{S(s),\ s\in\mathbf{R}\}$ является оператор $-iA$.

Рассмотрим новое семейство операторов $\{S_1(s),\ s\in\mathbf{R}\}$, где $S_1(s)x := S(-s)x$. Это семейство является $(iI-iA)^{-r}$-регуляризованной группой, и в силу того, что генератором $\{S(s),\ s\in\mathbf{R}\}$ является оператор $-iA$, генератором $\{S_1(s),\ s\in\mathbf{R}\}$ является оператор iA. Тогда в силу результата работы [7] о связи интегрированных и C-полугрупп оператор iA при целых $r>\alpha$ порождает r раз интегрированную полугруппу. $\square$

Известно [11], что оператор Лапласа Δ в пространствах $L^p(\mathbf{R}^N)$, $1\le p<\infty$, порождает голоморфную полугруппу $\{G(z),\ \operatorname{Re} z>0\}$ угла $\pi/2$ и, как показано в [12], эта полугруппа удовлетворяет оценке

$$\|G_p(z)\|_p \le \left(\frac{|z|}{\operatorname{Re} z}\right)^{N|1/p-1/2|},\quad \operatorname{Re} z>0.$$

Тогда из теоремы 2 следует, что в пространствах $L^p(\mathbf{R}^N)$, $1\le p<\infty$, для всех целых $r>N|1/p-1/2|$ оператор Шредингера $i\Delta$ порождает r раз интегрированную полугруппу. Значит, для всех $x\in D((i\Delta)^{r+1})$ существует единственное решение задачи (1) с оператором $A=i\Delta$ и $\|u(t)\|\le Me^{\omega t}\|x\|_r$, где $\|x\|_r$ — граф-норма порядка r оператора A. В частности, при $p=2$ получаем известный результат о том, что в пространстве $L^2(\mathbf{R}^N)$ оператор $i\Delta$ порождает полугруппу класса C_0 и задача (1) с этим оператором равномерно корректна на $D(A)$.

Литература

1. Мельникова И.В., Альшанский М.А. *Корректность задачи Коши в банаховом пространстве: регулярный и вырожденный случаи* // Итоги науки и техн. Сер. совр. матем. и ее прил. Тем. обзоры. Анализ-9 / ВИНИТИ. – 1995. – № 27. – С. 5–64.
2. Neubrander F. *Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem* // Pacific J. Math. – 1988. – V. 135. – P. 111–155.
3. Tanaka N. *On the exponentially bounded C-semigroups* // Tokyo J. Math. – 1987. – V. 10. – № 1. – P. 107–117.
4. Okazawa N. *A generation theorem for semigroups of growth order α* // Tohoku Math. J. – 1974. – V. 26. – P. 39–51.
5. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 829 с.

6. Miyadera I., Tanaka N. *Exponentially C-semigroups and generation of semigroups* // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – № 2. – P. 358–365.
7. Tanaka N., Miyadera I. *Exponentially bounded C-semigroups and integrated semigroups* // Tokyo J. Math. – 1989. – V. 12. – P. 101–115.
8. Davies E.B., Pang M.M. *The Cauchy problem and a generalization of the Hille–Yosida theorem* // Proc. London Math. Soc. – 1987. – V. 55. – P. 181–208.
9. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
10. Melnikova I., Zheng Q., Zhang J. *Semigroup regularization of weakly ill-posed Cauchy problems* // J. Inverse & Ill–posed probl. – 2002. – V. 6.
11. Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* – Berlin: Springer–Verlag, 1983. – 279 p.
12. Boyadzhiev K., Delaubenfels R. *Boundary values of holomorphic semigroups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 118. – P. 113–118.

Уральский государственный университет

Поступила
05.01.2001