ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 519.852

Г.Г. ЗАБУДСКИЙ

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

Рассматривается задача оптимального размещения взаимосвязанных объектов на линии. Структура связей между объектами задается с помощью графа. Вершинам графа соответствуют объекты, а ребро или дуга указывают на наличие связи между ними. Необходимо найти размещение вершин графа на линии с минимальной суммарной стоимостью связей. Таким задачам посвящены работы [1], [2], [4], [5]. Указанная задача в литературе называется задачей оптимального линейного упорядочения (ОЛУ).

Для произвольного графа задача ОЛУ является NP-трудной [4]. Для некоторых частных случаев предложены полиномиальные алгоритмы [1], [4], [5]. В данной работе предлагается полиномиальный алгоритм для размещения последовательно-параллельного графа специального вида ([3], гл. 1, п. 1, с. 47), который обобщает граф работы [1].

1. Постановка задачи и описание алгоритма

Имеется n связанных между собой точечных объектов. Задан частичный порядок их расположения на линии. Необходимо разместить их в n позиций, находящихся на линии на единичном расстоянии друг от друга. Размещение должно сохранять частичный порядок и иметь минимальную суммарную стоимость связей.

Структура связей и частичный порядок определяются с помощью ориентированного графа $G=(N,E)$, где $N=\{1,2,\dots,n\}$ — множество номеров объектов, и дуга $(i,j)\in E$ тогда и только тогда, когда объекты с номерами i и j связаны. Удельную стоимость этой связи обозначим через $C_{ij}>0$. Дуга (i,j) задает порядок расположения объектов i и j на линии. Объект i должен располагаться левее объекта j. Исходную задачу размещения объектов можно рассматривать как задачу размещения вершин графа G.

Пусть p — одно из таких размещений, а $p(k)$ — номер позиции, в которую размещена вершина k. Размещение p допустимо, если $p(i)\neq p(j)$ для $i,j\in N$, $i\neq j$, и $p(i)<p(j)$ для всех $(i,j)\in E$. Задача состоит в нахождении такого допустимого размещения p, для которого суммарная стоимость связей, т.е. величина

$$\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}(p(j)-p(i))$$

минимальна.

В данной статье рассматривается ориентированный граф G последовательно-параллельного типа. В графе G выделены две вершины s и t, которые соединены k простыми непересекающимися ориентированными цепями. На каждой из цепей графа задан порядок расположения объектов на линии. Вершина s должна быть расположена левее всех, а вершина t — правее всех вершин. Для простоты сначала рассмотрим граф G, состоящий из двух цепей. Вершины второй цепи будем обозначать теми же символами, что и первой с верхним индексом 1. Для нумерации дуг и удельных стоимостей связей удобно использовать обозначения с одним индексом. Дугу $(i-1,i)$ будем обозначать через A_i, ее вес — C_i; дугу $(s,1)$ — A_1, ее вес — C_1; дугу (i^1-1,i^1) — A_i^1, ее вес — C_i^1, и так далее.

Алгоритм поиска оптимального размещения вершин графа G на линии состоит из следующих шагов.

Ш1. На каждой из цепей, соединяющих s и t, находится дуга минимальной стоимости. Если таких несколько, то выбирается произвольная.

Ш2. Граф G по найденным на Ш1 дугам разрезается на два двухцепочных корневых дерева $L(N_L, E_L)$ и $R(N_R, E_R)$. Первое с корнем в вершине s, второе с корнем в вершине t (предварительно меняется на противоположную ориентация в дереве R).

Ш3. Ищется оптимальное размещение каждого из деревьев с учетом веса дуг, по которым сделан разрез.

Ш4. Полученные размещения объединяются следующим образом: сначала размещаются вершины дерева L, а затем — дерева R в обратном порядке.

2. Обоснование алгоритма

Прежде чем переходить к доказательству того, что алгоритм находит оптимальное размещение, сделаем некоторые замечания и докажем несколько теорем.

Будем говорить, что дуга (i, j) *растягивается* в некотором размещении p графа G если $p(j) - p(i) \neq 1$, т.е. вершины i и j размещены не в соседние позиции на линии.

Замечание 1. В статье [4] рассматривается задача ОЛУ, в которой граф G является корневым деревом. Частичный порядок расположения вершин в этом случае задается следующим образом. Корень должен размещаться в самой левой позиции. Если цепь от корня в вершину j проходит через вершину i, то вершина i должна быть расположена левее вершины j. То же самое можно сказать и о порядке расположения дуг. Там же доказана

Лемма. *Пусть A_i, A_j и A_k — три дуги на цепи. Дуга A_i левее A_j, а дуга A_j левее A_k. Если A_j — единственная дуга на цепи между вершиной i и вершиной $k-1$, которая растягивается в некотором оптимальном линейном упорядочении, то*

$$(C_i - C_j)/l_i \geq (C_j - C_k)/l_j,$$

где l_i — расстояние от вершины $i-1$ до вершины $j-1$, а l_j — расстояние от вершины $j-1$ до $k-1$. Расстояние l_i может быть интерпретировано как число дуг от $i-1$ до $j-1$ или как число вершин от i до $j-1$ (включая i и $j-1$).

В той же работе вводятся понятия *жестких* и *гибких* дуг. *Жесткие* дуги в любом оптимальном размещении не растягиваются. *Гибкие* дуги — это дуги, не являющиеся жесткими. Поиск жестких дуг проходит в два этапа и ведется на каждой цепи независимо от стоимости связей на других цепях. Дуги на цепи просматриваются начиная от корня и группируются в блоки, состоящие из жестких дуг. Каждый блок начинается с дуги, вес которой строго меньше весов всех предшествующих ей дуг.

На втором этапе для каждой из дуг A_i (это, вообще говоря, уже блок, т.е. дуга не единичной длины, а длины l_i) вычисляется отношение разности $r(A_i) = (C_i - C_{i+1})/l_i$. По каждой из цепей указанное соотношение должно быть невозрастающим. Если это не так, т.е., например, $r(A_i) < r(A_j)$, то дуга A_j жесткая. Введем аналогичные определения для графа G.

Дуга A_i называется *условно-минимальной* в G, если $C_i < \min C_j$ для $j < i$, $i < v$, либо $C_i < \min C_j$ для $j > i$, $i > u$, где A_v — первая (от s) дуга минимального веса, а A_u — последняя ($C_v = C_u$). Кроме того, первую, последнюю, а также дуги минимального веса на каждой цепи по определению будем называть условно-минимальными. Множество условно-минимальных дуг обозначим через M. Справедлива

Теорема 1. *Если дуга не является условно-минимальной, то она жесткая.*

Доказательство. Предположим, что $A_q \notin M$, и в то же время существует оптимальное линейное упорядочение p такое, что дуга A_q растягивается.

Рассмотрим сначала случай, когда $q < v$. Дуга A_q не может быть первой на цепи, т.к. в этом случае она по определению входила бы в M. Тогда слева от A_q есть хотя бы одна дуга из M. Пусть A_i — ближайшая слева от A_q условно-минимальная дуга. В размещении p может быть несколько дуг, включая A_q, которые растягиваются. Начиная от A_i до A_v все растянутые дуги в p обозначим через $A_j, A_k, \ldots, A_w, A_m$. Дуга A_i при этом может быть растянутой или нет. Дуга A_m последняя перед A_v, которая растягивается. Возможно, что $m = v$ и одна из дуг $A_j, A_k, \ldots, A_w, A_m$ — это дуга A_q.

Так как между A_i и A_q нет дуг из M и $A_q \notin M$, то $C_i \leq C_j$. Действительно, если $C_i > C_j$, то из того, что $A_i \in M$ и между A_i и A_j нет дуг из M, следует $A_j \in M$. Дуга A_j может быть расположена на линии либо левее A_q, либо с ней совпадать. Если $j \neq q$, то $A_j \in M$ и находится между A_i и A_q, а это противоречит выбору дуги A_i. Если A_j совпадает с A_q, то $A_q \in M$, что противоречит выбору A_q.

Дуга A_j — единственная между вершинами i и $k - 1$, которая растягивается. Тогда по замечанию 1 имеем

$$(C_i - C_j)/l_i \geq (C_j - C_k)/l_j,$$

где l_i — расстояние от вершины $i-1$ до вершины $j-1$, а l_j — расстояние от вершины $j-1$ до $k-1$. Из неравенства $C_i \leq C_j$ следует, что $C_j \leq C_k$. Продолжая процесс, получим последовательность неравенств

$$C_i \leq C_j \leq C_k \leq \cdots \leq C_w \leq C_m. \tag{1}$$

Если $v = m$, то получаем противоречие с выбором дуги минимального веса.

Если $v \neq m$, тогда от вершины w до вершины $v - 1$ дуга A_m единственная, которая растягивается, поэтому, применяя лемму, имеем

$$(C_w - C_m)/l_w \geq (C_m - C_v)/l_m,$$

где l_w и l_m — соответствующие расстояния. Так как A_v — первая дуга минимального веса на цепи, то $C_v < C_m$, откуда следует $C_w > C_m$. Продолжая процесс, получим неравенства

$$C_i > C_j > \cdots > C_w > C_m, \tag{2}$$

которые противоречат (1), т.е. дуга A_q жесткая.

В случае, когда $v < q < u$, очевидно, что ближайшей слева условно-минимальной для A_q будет некоторая дуга A_r такая, что $C_r = C_v$. Тогда, как описано выше, рассматриваем последовательность растянутых дуг, начиная от дуги A_r. Для них будут выполняться неравенства (1). Достаточно рассматривать эту последовательность до первой дуги минимального веса A_k, расположенную правее A_q. Если A_k растягивается, то это противоречит тому, что $C_q > C_k$: из (1) следует $C_q \leq C_k$. Если A_k не растягивается, то так же, как в первом случае, при $v \neq m$ получим условия (2), которые противоречат (1).

Если $q > u$, то рассматриваем последовательность растянутых дуг, начиная с A_q, до такой дуги A_f, для которой $C_f < C_q$. Дуга A_f существует, т.к. $A_q \notin M$. Получаем условия типа (1), причем последовательность обрываем на ближайшей слева от f растянутой дуге. Если растягивается дуга A_f, то $C_q < C_f$, а это противоречит выбору дуги A_f. Если A_f не растягивается, то, как в первом случае, получаем неравенства (2), которые противоречат тому, что $A_q \notin M$. □

Используя эту теорему, можем вместо исходного графа G рассмотреть некий другой граф, в котором, вообще говоря, меньше вершин и дуги имеют неединичную длину. Для этого оставим на каждой из цепей только условно-минимальные дуги, соединяя жесткие дуги в нерастягивающиеся блоки. Если не менять нумерацию, то в полученном таким образом графе удельные стоимости связей монотонно убывают от s до v, от v до u постоянны и от u до t монотонно возрастают. Далее будем считать, что граф G приведен к такому виду.

Замечание 2. В работе [4] для любой дуги $A_i \in M$ определяется отношение разности

$$r(A_i) = (C_i - C_j)/l_i, \tag{3}$$

где A_j — соседняя справа от A_i дуга. Отношения разности для дуг графа G будем считать по формуле (3) с учетом того, что для дуги A_i, $i > u$, дуга A_j — соседняя слева от A_i. Там же доказана теорема, которая позволяет выявлять жесткие дуги на цепи, используя отношения разности.

Если A_i, A_j, A_k — три последовательных дуги на цепи, для которых выполняется соотношение

$$r(A_i) = (C_i - C_j)/l_i < (C_j - C_k)/l_j = r(A_j),$$

то A_j — жесткая дуга.

Легко видеть, что теорема верна для рассматриваемого графа G с учетом введенного выше определения отношения разности.

Из теоремы 1 и замечания 2 следует, что выявление жестких дуг на каждой из цепей графа G можно проводить независимо от стоимостей связей на других цепях. После этого на каждой цепи от s до v отношения разности будут не возрастать, а от v до t — не убывать.

Будем говорить, что для некоторого размещения p графа G деревья $L(N_L, E_L)$ и $R(N_R, E_R)$ *пересекаются*, если найдутся вершины $i \in N_L$, $j \in N_R$ такие, что $p(i) > p(j)$.

Теорема 2. *Существует оптимальное размещение p^* графа G такое, что для любых $i \in N_L$, $j \in N_R$ справедливо $p(i) < p(j)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда на каждой из цепей по одной дуге минимального веса. Через A_v, A_v^1 обозначим дуги минимального веса, по которым сделан разрез на 1-й и 2-й цепях. Предположим, что для любого оптимального расположения графа G деревья L и R пересекаются. Рассмотрим случай, когда какое-то множество вершин второй цепи дерева L расположено на линии правее вершины v. Аналогично рассматривается случай, когда множество вершин первой цепи дерева L расположено правее вершины v^1 второй цепи дерева R. Пусть в некотором оптимальном расположении p графа G дуга A_w $(w > v)$, $w \in N_R$, — ближайшая справа от A_v, которая растягивается. Пусть между вершинами $w-1$ и w расположены вершины $z^1, \dots, y^1$, принадлежащие дереву L. Через d^1 обозначим суммарную длину дуг $A_z^1, \dots, A_y^1$.

Ясно, что

$$C_z^1 > C_y^1, \tag{4}$$

т.к. иначе дуга A_y^1 не была бы условно-минимальной и по теореме 1 она была бы жесткой.

Разместим вершины $z^1, \dots, y^1$ между вершинами $v-1$ и v, причем сама дуга A_v до этого может быть растянутой или нет. Получаем размещение, в котором меньше вершин дерева L расположено правее вершин дерева R. Увеличение стоимости при таком изменении размещения равно $C_y^1 d + C_v d^1$, а уменьшение — $C_z^1 d + C_w d^1$. Здесь d — это расстояние, на которое мы передвинули вершины $z^1, \dots, y^1$, т.е. число вершин первой цепи между вершинами v и w. Учитывая (4) и

$$C_v < C_w, \tag{5}$$

получаем

$$(C_y^1 - C_z^1)d^1 + (C_v - C_w)d < 0, \tag{6}$$

что противоречит оптимальности размещения p.

Если дуг минимального веса несколько и разрез проведен по произвольным таким дугам, то аналогично (как и выше) будем последовательно перемещать вершины второй цепи дерева L между вершинами разрезаемой дуги первой цепи. При этом неравенства (4), (5) и (6) могут быть нестрогими и при таком перемещении не будет увеличиваться суммарная стоимость связей между объектами. Действуя таким образом, получим размещение p^*, для которого деревья L и R не пересекаются. $\square$

Если разрезать граф G на деревья L и R, то для каждой дуги A_z первой цепи, принадлежащей дереву L, отношение разности будет таким

$$r(A_z) = (C_z - C_{z+1})/l_z.$$

Для дуги первой цепи дерева R

$$r(A_z) = (C_z - C_{z-1})/l_z,$$

аналогично для второй цепи.

Условно-оптимальным размещением дерева L будем называть размещение его вершин N_L, построенное алгоритмом из [4], в котором при вычислении отношения разности для "висячих" вершин учитываются веса разрезаемых дуг. Аналогично для дерева R. Для любого размещения p вершин графа G через p_L и p_R будем обозначать сужение p на множества N_L и N_R соответственно.

Докажем теорему, на которой основывается поиск оптимального размещения графа G с условно-оптимальным размещением каждого из деревьев, на которые он разрезается.

Теорема 3. *Существует оптимальное размещение p^* графа G, для которого p^*_L и p^*_R условно-оптимальны.*

Доказательство. Проведем доказательство для дерева L (для R аналогично). По теореме 2 достаточно рассматривать только такие размещения, в которых деревья не пересекаются. Пусть для произвольного оптимального размещения p графа G размещение p_L вершин дерева L имеет вид

$$s \ldots b^1 \ldots z^1\, k \ldots$$

Пусть p^L — некоторое условно-оптимальное размещение вершин дерева L — имеет вид

$$s \ldots k \ldots b^1 \ldots$$

Обозначим через w первую слева позицию, в которой размещения p_L и p^L не совпадают, т.е. $p_L(w) = b^1$, $p^L(w) = k$. Очевидно, первые несовпадающие вершины не могут принадлежать одной цепи. Пусть y — это позиция в размещении p_L, для которой $p_L(y) = k$, $y > w$ и $p_L(y-1) = z^1$. Для простоты длины блоков обозначим так же, как и вершины, а нумерацию вершин возьмем последовательной, т.е. вершина k соединена в цепи с вершиной $k+1$. Переставим k, z^1 и получим размещение

$$s \ldots b^1 \ldots k\, z^1 \ldots$$

При этом суммарная стоимость связей увеличилась на

$$C^1_z l_k + l^1_z C_{k+1},$$

уменьшилась на

$$C^1_{z+1} l_k + l^1_z C_k.$$

Из оптимальности размещения p графа G имеем

$$l_k(C^1_z - C_{z+1}) \geq l^1_z(C_k - C_{k+1}), \quad (C^1_z - C^1_{z+1})/l^1_z \geq (C_k - C_{k+1})/l_k.$$

Получаем $r(A^1_z) \geq r(A_k)$, но т.к. в условно-оптимальном размещении p^L дуга A_k расположена левее A^1_z, то $r(A_k) \geq r(A^1_z)$, т.е. $r(A^1_z) = r(A_k)$. Произведя цепь таких преобразований, получим размещение p^1_L, для которого $p^1_L(w) = k$, при этом целевая функция не увеличивается. Аналогичные действия с другими несовпадающими элементами приведут к размещению p^*_L, которое совпадает с p^L. Для R аналогично получим p^*_R. Объединяя p^*_L и p^*_R, получаем p^*, т.е. оптимальное размещение G. $\square$

Мы доказали, что предложенный выше алгоритм дает оптимальное размещение вершин двухцепочного графа. Алгоритм можно распространить на k-цепочный граф. Пусть граф G имеет k цепей, соединяющих s и t. Граф G' получен из G добавлением одной такой цепи. Обозначим через p^* ОЛУ графа G, тогда справедлива

Теорема 4. *Существует ОЛУ p' графа G', в котором относительное упорядочение p^* сохраняется.*

Доказательство. Заметим, что ОЛУ p графа G зависит только от отношения разности гибких дуг. Добавление новой цепи не влияет на отношения разности в графе G. Поэтому не будет изменений в относительном упорядочении графа G в ОЛУ графа G'. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что алгоритм для двухцепочного графа очевидно обобщается на граф с произвольным количеством цепей. В этом случае будут рассматриваться два корневых k-цепочных дерева. Отметим, что теоремы 1 и 3 обосновывают шаги 3, 4 алгоритма, а теорема 2 — шаги 1, 2. Теорема 4 обобщает алгоритм на случай произвольного количества цепей.

Отметим, что основная трудоемкость алгоритма заключается в выполнении шага 3, т.е. в поиске ОЛУ корневого k-цепочного дерева. Как отмечается в работе [4], такой алгоритм имеет трудоемкость порядка $O(n \log n)$ операций. Отыскание дуг минимальной стоимости в рассматриваемом k-цепочном графе требует не более $2n$ операций. В результате трудоемкость предложенного алгоритма не превосходит порядка $O(n \log n)$ операций.

Входная информация задается в виде списка взвешенных дуг графа. Длина списка не превосходит $6n$. Для работы алгоритма потребуется еще массив длины $6n$. В итоге алгоритм требует памяти порядка $12n$. Возможна некоторая ее экономия ввиду того, что для упорядочения вершин левого и правого деревьев можно использовать одни ячейки памяти.

Автор выражает благодарность Панюкову А.В. за полезное обсуждение работы.

Литература

1. Забудский Г.Г. *Задачи оптимального размещения объектов на линии с минимально допустимыми расстояниями.* – Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1990. – № 916. – 32 с.
2. Забудский Г.Г. *Задачи оптимального размещения взаимосвязанных объектов на линии* // Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации. – Омск: ОмГУ, 1992. – С. 5–25.
3. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. *Теория расписаний. Одностадийные системы.* – М.: Наука, 1984. – 384 с.
4. Adolphson D., Hu T.C. *Optimal linear ordering* // SIAM J. Appl. Math. – 1973. – V. 25. – № 3. – P. 403–423.
5. Picard J.C., Queyranne M. *On the one-dimensional space allocation problem* // Oper. Res. – 1981. – V. 29. – № 2. – P. 371-391.

Институт информационных технологий
и прикладной математики
Сибирского Отделения
Российской Академии Наук

Поступили
первый вариант 17.07.1995
окончательный вариант 02.05.1996