Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №12, с. 12–18 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

О.Г. АНТОНОВСКАЯ, В.И. ГОРЮНОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНКИ РАЗМЕРОВ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ НЕЛИНЕЙНОГО ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Аннотация. В данной статье описывается методика оценки размеров областей притяжения устойчивых состояний равновесия нелинейных дискретных динамических систем на основе метода функций Ляпунова. За оценку области притяжения принимается окрестность состояния равновесия, в которой первая разность функции Ляпунова отрицательна. Функция Ляпунова выбирается в виде положительно определенной квадратичной формы, для которой знакоотрицательность ее первой разности в силу линеаризованной системы обеспечивается с заданным запасом. Предложена методика расширения полученных оценок области притяжения.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, макроструктура пространства состояний, метод функций Ляпунова.

УДК: 517.968

Введение

Исследование структуры пространства состояний и зависимости ее от основных параметров системы является основной задачей изучения динамики систем [1], [2]. Разработка качественной теории непрерывных динамических систем связана с именами А. Пуанкаре, Ван дер Поля, А.М. Ляпунова, А.А. Андронова, Ю.И. Неймарка и других выдающихся ученых [1], [2]. Теория дискретных динамических систем [3]–[5] развита еще достаточно слабо. Это связано со значительными трудностями распространения качественных методов и результатов применения вычислительных методов для изучения непрерывных систем на дискретный случай [2], [6]–[8]. В общем случае трудности изучения пространства состояний нелинейных дискретных динамических систем вызваны большим разнообразием и сложностью возможных в них предельных движений, свойством несвязности траекторий движения, а также свойством неоднозначности продолжаемости решений в сторону убывающих значений времени ([2], с. 71; [6], сс. 8, 20).

Изучение макроструктуры пространства состояний дискретных систем связано с исследованием устойчивости "в малом"и устойчивости "в большом", когда определяются или оцениваются размеры области притяжения равновесного состояния. И поскольку при исследовании устойчивости "в большом" нельзя пользоваться линейными моделями системы, так как факт их устойчивости не зависит от начальных отклонений, постольку для изучения макроструктуры пространства состояний целесообразно использовать распространенный на дискретные системы прямой метод Ляпунова (или метод функций Ляпунова) ([2], сс. 87–97, 118–142; [5], с. 59-65; [9]).

Поступила 06.05.2015

Метод функций Ляпунова позволяет, в принципе, решать задачу точного оценивания макроструктуры пространства состояний дискретных систем. В ([2], с. 92–97) показано, что существуют разрешающие функции Ляпунова, дающие оценки областей притяжения состояний равновесия, совпадающие с самими областями притяжения. Однако установленный факт существования разрешающих функций Ляпунова носит общеметодологический характер и не содержит какого-либо алгоритма их построения в каждом конкретном случае. В настоящей статье описывается прикладная методика оценивания размеров областей притяжения устойчивых состояний равновесия дискретных динамических систем на основе применения прямого метода Ляпунова.

1. Постановка задачи

Пусть нелинейная дискретная динамическая система задана точечным отображением

$$\overline{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

имеющим устойчивую неподвижную точку $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. И пусть функции f_i имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Представим (1) в виде [10]

$$\overline{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \Omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

где $a_{ij} = (\partial f_i/\partial x_j)_0$ — постоянные, равные значениям частных производных функций последования в неподвижной точке, а Ω_i — остаточные члены второго порядка в разложении по формуле Тейлора

$$\Omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}x_j x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{3}$$

В силу непрерывности вторых производных для остаточных членов (3) на любом ограниченном множестве, содержащем неподвижную точку, можно указать оценку

$$|\Omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n)| \le N(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2), \quad N = Mn/2 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4}$$

где $|\partial^2 f_i/\partial x_j \partial x_k| \le M$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Требуется оценить размеры области притяжения устойчивой неподвижной точки методом функций Ляпунова, ограничиваясь рассмотрением заданного множества.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}). \tag{5}$$

Лемма 1. *Наибольшее значение координаты x_i на сечении $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V_0$ функции (5) равно $\sqrt{V_0 A_{ii}/\det K}$, где A_{ii} — алгебраическое дополнение элемента K_{ii} в матрице $K = (K_{ij})$, а $\det K$ — определитель матрицы K.*

Доказательство. Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим случай переменной x_1. В качестве функции Лагранжа выберем

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = x_1 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}x_i x_j - V_0\right). \tag{6}$$

Тогда величина экстремума по переменной x_1 на поверхности $V = V_0$ согласно методу неопределенных множителей Лагранжа является решением системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda \sum_{j=1}^{n} K_{1j} x_j = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 2\lambda \sum_{j=1}^{n} K_{kj} x_j = 0 \quad (k = 2, \dots, n), \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j - V_0 = 0. \tag{9}$$

Используя линейный характер системы уравнений (7),(8) относительно переменных x_j, имеем

$$x_1 = -\frac{A_{11}}{2\lambda \det K}.$$

С другой стороны, умножая уравнения (7) на x_1, (8) на x_k при $k > 1$ и складывая их, с учетом (9) находим, что

$$*x_1 + 2\lambda V_0 = 0, \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_{11}}{V_0 \det K}}.$$

Отсюда, выбирая точку максимума, получим $x_{1\max} = \sqrt{V_0 A_{11}/\det K}$. Случай x_i при $i > 1$ рассматривается аналогично. $\square$

Непосредственно из леммы 1 следует

Лемма 2. *Максимальному сечению* $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V_0$ *функции* (5)*, вписанному в множество* $|x_i| \leq b_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$*, соответствует значение* $V_{0m} = \min\limits_i \{b_i^2 \det K / A_{ii}\}$.

Замечание. Утверждение леммы 2 получается приравниванием $x_{i\max} = b_i$.

3. О решении задачи оценивания области притяжения устойчивой неподвижной точки методом функций Ляпунова

Выберем функцию Ляпунова в классе положительно определенных квадратичных форм (5) так, чтобы она была функцией Ляпунова соответствующего (2) линеаризованного точечного отображения

$$\overline{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и обеспечивала выполнение неравенства $\Delta V(x) < 0$ с заданным [11], [12] (в том числе максимальным [13], [14]) запасом, т. е. удовлетворяла при этом условию $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V) = -\delta$ $(\max\limits_i\{|z_i|^2 - 1\} \leq -\delta \leq 0)$, где

$$\Delta V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) - V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

— первая разность (5) в силу линеаризованного отображения, а $|z_i| < 1$, $z_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ — собственные числа матрицы отображения $A = (a_{ij})$. В [14] показано, что выбор коэффициентов формы (5), удовлетворяющей этому условию, можно осуществить с помощью простых явных соотношений.

Оценим первую разность такой функции Ляпунова для функций последования нелинейного отображения (2) подобно [10], [15].

Согласно лемме 1 в точках сечения $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ имеют место неравенства

$$|x_{imax}| \leq C_i \sqrt{V_0}, \quad C_i = \sqrt{\frac{A_{ii}}{\det K}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Но тогда согласно (4)

$$|\Omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq M_i V_0, \quad M_i = N(C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Следует отметить, что первая разность (5) в силу формул нелинейного отображения принимает вид

$$\Delta \overline{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta V(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i \Omega_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} \Omega_i \Omega_j.$$

Поскольку на сечении $\Delta V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq -\delta V_0$, то с учетом неравенств (10), (11) получаем

$$\Delta \overline{V} \leq -\delta V_0 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{il}||K_{ij}| C_l M_j V_0 \sqrt{V_0} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}| M_i M_j V_0^2.$$

Отсюда следует $\Delta \overline{V} < 0$, если

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}| M_i M_j V_0 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{il}||K_{ij}| C_l M_j \sqrt{V_0} - \delta < 0,$$

или

$$0 \leq \sqrt{V_0} \leq \Bigg(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{il}|\,|K_{ij}| C_l M_j + \Bigg(\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{il}|\,|K_{ij}| C_l M_j \Bigg)^2 + \\ + \delta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}| M_i M_j \Bigg)^{1/2} \Bigg) \Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}| M_i M_j \Bigg)^{-1},$$

т. е. первая разность в силу нелинейной системы отрицательна. Таким образом, доказана

Теорема. *Область*

$$S_y = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : V(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \min\{V_{0m}, V_{0y}\}\}, \tag{12}$$

где

$$V_{0y} = \Bigg(\Bigg(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{il}|\,|K_{ij}| C_l M_j + \Bigg(\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{il}|\,|K_{ij}| C_l M_j \Bigg)^2 + \\ + \delta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}| M_i M_j \Bigg)^{1/2} \Bigg) \Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}| M_i M_j \Bigg)^{-1} \Bigg)^2, \tag{13}$$

а $V_{0m} = \min\limits_i \{b_i^2 \det K / A_{ii}\}$, *является оценкой области притяжения устойчивой неподвижной точки* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *точечного отображения* (2).

4. Некоторые частные случаи

1. Пусть все корни характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, действительны и различны, причем $|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n| < 1$. В этом случае всегда существует линейное невырожденное преобразование координат, приводящее точечное отображение к каноническому виду ([10]). (Столбцы матрицы преобразования координат являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственным значениям $z_1, z_2, \dots, z_n$.)

Рассмотрим точечное отображение вида

$$\overline{x}_i = z_i x_i + \Omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{14}$$

Тогда в силу доказанной выше теоремы получим

Следствие 1. Область (12), где

$$V_{0y} = \Bigg(\Bigg(- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |z_i|\,|K_{ij}|C_i M_j + \Bigg(\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |z_i||K_{ij}|C_i M_j\Bigg)^2 + \\ + \delta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}|M_i M_j\Bigg)^{1/2}\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}|M_i M_j\Bigg)^{-1}\Bigg)^2, \tag{15}$$

а $V_{0m} = \min_i\{b_i^2 \det K / A_{ii}\}$, является оценкой области притяжения устойчивой неподвижной точки $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ точечного отображения (14).

В самом деле, для точечного отображения (14) $a_{il} = 0$ при $i \neq l$ и $a_{ii} = z_i$, $i, l = 1, 2, \dots, n$, и (15) следует из (13).

2. Отметитм, что согласно [14] квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V) = -\delta$, $\max\limits_i\{|z_i|^2 - 1\} \le -\delta \le 0$, для точечного отображения (14) можно выбрать в виде

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii}x_i^2 + K_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}x_{n-1}x_n + K_{nn}x_n^2,$$

где

$$K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}, \quad R(\delta) = (1-\delta)(z_{n-1} - z_n)^2(z_{n-1}z_n - 1 + \delta)^{-2}$$

$$(z_n^2 - 1 \le -\delta < 0),$$

где $K_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2 > 0$. В этом случае $A_{ii} = R(\delta)\Pi_{l\neq i}K_{ll}$ при $i = 1, 2, \dots, n-2$, $A_{n-1,n-1} = \Pi_{l=1}^{n-2}K_{ll}K_{nn}$ и $A_{nn} = \Pi_{l=1}^{n-1}K_{ll}$, а $\det K = R(\delta)\Pi_{l=1}^{n}K_{ll}$. Тогда следствие 1 переходит в

Следствие 2. Область (12), где

$$V_{0y} = \Bigg(-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}|z_i|\,|K_{ii}|C_i M_i + |K_{n-1,n}|(|z_{n-1}|C_{n-1}M_n + |z_n|C_n M_{n-1}) + \Bigg(\Bigg(\sum_{i=1}^{n}|z_i|K_{ii}C_i M_i\Bigg)^2 + \\ + \delta\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|K_{ij}|M_i M_j\Bigg)^{1/2}\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|K_{ij}|M_i M_j\Bigg)^{-1}\Bigg)^2,$$

а $V_{0m} = \min\{b_i^2 K_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, n-2,\ R(\delta) b_{n-1}^2 K_{n-1,n-1},\ R(\delta) b_n^2 K_{n,n}\}$ является оценкой области притяжения устойчивой неподвижной точки $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ точечного отображения (14).

5. Заключение

Следует отметить, что доказанная выше теорема дает аналитическую оценку области притяжения устойчивой неподвижной точки точечного отображения (2). Однако полученное значение V_{0y} для ее границы $V = V_{0y}$ может быть существенно занижено [16] в сравнении со значением V_0 для сечения $V = V_0$, реально вписанного в область притяжения. С целью уточнения полученной оценки в [16] была предложена следующая качественно-численная процедура, аналогичная той, которая используется при синтезе систем автоматического управления ([17], с. 355–381). Граница полученной оценки отображалась обратным точечным соответствием до тех пор, пока сохранялась его однозначность (т.е. взаимная однозначность исходного отображения (2)).

Литература

[1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний* (Физматгиз, М., 1959).

[2] Косякин А.А., Шамриков Б.М. *Колебания в цифровых автоматических системах* (Наука, М., 1981).

[3] Бромберг П.В. *Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования* (Оборонгиз, М., 1953).

[4] Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний* (Наука, М., 1972).

[5] Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем* (Мир, М., 1971).

[6] Капранов М.В., Томашевский А.И. *Регулярная и хаотическая динамика нелинейных систем с дискретным временем* (Изд. Дом МЭИ, М., 2009).

[7] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации* (Ин-т компьютерных исследов., М.–Ижевск, 2002).

[8] Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. *Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем* (Ин-т компьютерных исследов., М.–Ижевск, 2003).

[9] Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. *Нелинейные системы управления с частотно-имульсной модуляцией* (Техника, Киев, 1970).

[10] Неймарк Ю.И. *Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний.* I, Изв. вузов. Радиофизика **1** (1), 41–66 (1958).

[11] Антоновская О.Г. *О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами*, Дифференц. уравнения **49** (9), 1220–1224 (2013).

[12] Антоновская О.Г. *Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем*, Изв. вузов. Матем., № 2, 19–25 (2004).

[13] Антоновская О.Г. *О максимальном ограничении знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова*, Дифференц. уравнения **39** (11), 1562–1563 (2003).

[14] Антоновская О.Г., Горюнов В.И. *О выборе параметров квадратичной функции Ляпунова при решении динамических задач*, Вестн. Нижегородск. гос. ун-та **3** (1), 103–106 (2014).

[15] Антоновская О.Г., Горюнов В.И., Лобашов Н.И. *К анализу формы и длительности переходных процессов при переключениях синтезатора с делителем частоты и пропорционально-интегрирующим фильтром по диапазону*, Динамика систем: Сб. научн. тр. Горький, изд-во Горьковск. ун-та, 59–72 (1990).

[16] Горюнов В.И., Ерусланов В.Н., Лобашов Н.И. *Техническая полоса захвата одноконтурного синтезатора частоты* , Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи, Вып. 2, 88–94 (1990).

[17] Кунцевич В.М., Лычак М.М. *Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова* (Наука, М., 1977).

О.Г. Антоновская

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,

ул. Ильинская, д. 65, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, e-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

В.И. Горюнов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия,

e-mail: pmk@unn.ac.ru

O.G. Antonovskaya and V.I. Goryunov

On a method of evaluation of attraction domain for fixed point of nonlinear point mapping of arbitrary dimension

Abstract. In this paper we describe the method of attraction domain evaluation for equilibrium states of nonlinear discrete dynamic system based on Lyapunov functions method. Attraction domain evaluation size is equilibrium state neighborhood where the first difference of Lyapunov function is negative. Lyapunov function is chosen as positive quadratic form for which the negativity of its first difference by virtue of linearized system is guaranteed with given supply. We propose the method of attraction domain extension.

Keywords: discrete dynamic system, macro-structure of state space, Lyapunov function method.

O.G. Antonovskaya

University of Architecture and Civil Engineering,
65 Alekseevskaya str., Nizhny Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

V.I. Goryunov

Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: pmk@unn.ac.ru