ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 512.55

А.Н. АБЫЗОВ

ЗАМКНУТОСТЬ СЛАБО РЕГУЛЯРНЫХ МОДУЛЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМЫХ СУММ

В данной статье все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей. Модуль M называется слабо регулярным, если каждый его подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля M, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Модуль M называется 1-строго слабо регулярным, если каждый его циклический подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля M, является прямым слагаемым модуля M. Через $J(R)$ и $J(M)$ будем обозначать соответственно радикалы Джекобсона кольца R и модуля M.

Прямое слагаемое слабо регулярного модуля — слабо регулярный модуль, но прямая сумма двух слабо регулярных модулей, вообще говоря, не является слабо регулярным модулем. В данной статье изучаются кольца, над которыми модули сохраняют свойство слабой регулярности относительно взятия прямой суммы слабо регулярных модулей определенного типа.

Теорема 1. *Пусть R — полусовершенное кольцо. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $J^2(R)=0$;
2) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы локального и полупростого модулей, слабо регулярен*;
3) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы слабо регулярного и полупростого модулей, слабо регулярен*;
4) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы локального и простого модулей, слабо регулярен*;
5) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы локального проективного и простого модулей, слабо регулярен*;
6) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы проективного и полупростого модулей, слабо регулярен.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $M=xR\oplus Y$, где xR — локальный, а Y — полупростой подмодули. Без ограничения общности можно считать, что $xJ\neq 0$. Покажем, что M является слабо регулярным модулем. Поскольку согласно ([1], с. 78) каждый модуль над кольцом R является суммой локальных подмодулей, то достаточно показать, что каждый локальный подмодуль, не лежащий в $J(M)$, выделяется в виде прямого слагаемого в M. Пусть $N=(xr+y)R$ — локальный подмодуль, который не содержится в $J(M)$ и $y\in Y$. Если $xrJ=0$, то N — простой подмодуль, который не содержится в радикале и, следовательно, выделяется в виде прямого слагаемого в M. В случае, когда $xrJ\neq 0$, модуль N является локальным непростым и $Y\cap N=Y\cap J(N)\subset Y\cap J(xR\oplus Y)=J(Y)=0$, т.е. $Y\cap N=0$. Поскольку $J^2(R)=0$, то в этом случае имеет место равенство $xrR=xR$. Следовательно, $N\oplus Y=xR\oplus Y$.

2) $\Rightarrow$ 4). Очевидно.

4) $\Rightarrow$ 5). Очевидно.

5) $\Rightarrow$ 1). Допустим противное. Тогда у некоторого локального проективного модуля eR подмодуль eJ^2 не равен нулю. Так как модуль eJ не полупрост и согласно ([1], с. 78) является суммой локальных подмодулей, то в нем найдется локальный непростой подмодуль $M=xR$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $eR\oplus(M/MJ)$. Выделим подмодуль вида $(x,f(x))R$,

где f — канонический гомоморфизм из M в M/MJ. Если π — проекция модуля $eR \oplus (M/MJ)$ на модуль eR, то ее ограничение $\pi|_{(x,f(x))R}$ является изоморфизмом модуля $(x, f(x))R$ на модуль M. Следовательно, $(x, f(x))R$ — локальный подмодуль, являющийся прямым слагаемым в модуле $eR \oplus (M/MJ)$, т.е. $eR \oplus (M/MJ) = (x, f(x))R \oplus (a, b)R$, где $(a, b)R$ согласно ([2], с. 179) является простым подмодулем. Ясно, что a и x лежат в eJ и, следовательно, $(x, f(x))R \oplus (a, b)R \subset eJ \oplus (M/MJ)$, что противоречит последнему равенству.

1) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим произвольный правый R-модуль M вида $N \oplus Y$, где N — слабо регулярный, а Y — полупростой модули. Пусть $L = (a + b)R$ — не лежащий в $J(M)$ локальный подмодуль, причем $a \in N$, $b \in Y$. Покажем, что L является прямым слагаемым в M. Без ограничения общности можно считать, что $aJ \neq 0$. Тогда aR является локальным подмодулем модуля N, который не содержится в $J(N)$. Таким образом, для некоторого подмодуля N_1 модуля N выполняется $N = N_1 \oplus aR$. Тогда согласно импликации 1) $\Rightarrow$ 2) L является прямым слагаемым в $aR \oplus Y$ и, следовательно, в M.

3) $\Rightarrow$ 2). Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 6). Согласно ([3], с. 94) каждый проективный модуль над полусовершенным кольцом является слабо регулярным.

6) $\Rightarrow$ 5). Очевидно.

Следствие 1. Пусть R — полусовершенное кольцо. Тогда следующие условия равносильны:

1) R является либо полупростым, либо локальным, и $J^2(R) = 0$;
2) над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы слабо регулярного и полупростого модуля, 1-строго слабо регулярен.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть правый R-модуль M представим в виде прямой суммы слабо регулярного и полупростого модулей. Тогда из теоремы 1 следует, что он является слабо регулярным. Поскольку каждый циклический модуль над локальным кольцом является локальным и каждый локальный подмодуль, не содержащийся в $J(M)$, выделяется в виде прямого слагаемого, то модуль M 1-строго слабо регулярен.

2) $\Rightarrow$ 1). Согласно теореме 1 $J^2 = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $J(R) \neq 0$. Покажем, что R является локальным кольцом. Допустим противное. Тогда в кольце R найдутся два примитивных идемпотента e и f, для которых $eJf \neq 0$. Пусть g — примитивный идемпотент, ортогональный f. Рассмотрим внешнюю прямую сумму $eR \oplus \overline{g}R$, где $\overline{g}R = gR/gJ$. Выделим в ней подмодуль $(ejf, \overline{g})R$, где $ejf \neq 0$ и $j \in J$. Поскольку $(ejf, \overline{g})R$ является прямым слагаемым в $eR \oplus \overline{g}R$ и $(ejf, \overline{g})R = (ejf, 0)R \oplus (0, \overline{g})R$, то $(ejf, 0)R$ является прямым слагаемым в $eR \oplus \overline{g}R$, что противоречит его косущественности.

Теорема 2. *Над полусовершенным кольцом R следующие условия равносильны:*

1) *кольцо R является полуцепным справа, для которого $J^2(R) = 0$;*
2) *над кольцом R прямая сумма двух правых локальных модулей — слабо регулярный модуль;*
3) *прямая сумма двух правых слабо регулярных модулей — слабо регулярный модуль.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $M = xR \oplus yR$, где xR и yR — локальные подмодули модуля M. Если xR прост, то согласно теореме 1 модуль $xR \oplus yR$ является слабо регулярным. Поэтому будем считать, что $xJ \neq 0$ и $yJ \neq 0$. Тогда xR и yR являются проективными и согласно ([3], с. 94) модуль $xR \oplus yR$ слабо регулярен.

2) $\Rightarrow$ 1). Из теоремы 1 следует $J^2(R) = 0$. Покажем, что кольцо R является цепным справа. Допустим противное. Тогда для некоторого примитивного идемпотента e модуль eJ не прост и, следовательно, над кольцом R найдется локальный правый модуль M, у которого $MJ = M_1 \oplus M_2$, где M_1 и M_2 — простые модули. Рассмотрим каноническое вложение f модуля M в модуль $M/M_1 \oplus M/M_2$. Поскольку $f(M) \not\subset J(M/M_1 \oplus M/M_2)$, то согласно предположению $f(M)$ является прямым слагаемым в $M/M_1 \oplus M/M_2$. Из ([2], с. 176) следует, что у модулей M/M_1

и M/M_2 кольца эндоморфизмов локальны. Тогда согласно ([2], с. 179) $f(M)$ изоморфно либо M/M_1, либо M/M_2, что, очевидно, невозможно.

3) $\Rightarrow$ 2). Очевидно.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $M = A \oplus B$, где A и B — слабо регулярные правые R-модули. Рассмотрим некоторый локальный подмодуль $(a+b)R$, $a \in A$, $b \in B$, не лежащий в $J(A \oplus B)$. Без ограничения общности можно считать, что $(a+b)R$ не является простым. Тогда либо $aJ \neq 0$, либо $bJ \neq 0$. Пусть для определенности $aJ \neq 0$. Так как aR является гомоморфным образом $(a+b)R$ и, следовательно, является локальным подмодулем, то $A = C \oplus aR$, где C — некоторый подмодуль модуля A. Рассмотрим проекцию π модуля $A \oplus B$ на подмодуль aR относительно разложения $C \oplus aR \oplus B$. Тогда ограничение этой проекции на подмодуль $(a+b)R$ является эпиморфизмом между локальными цепными модулями длины два и, следовательно, этот эпиморфизм является изоморфизмом. Таким образом, $\ker \pi|_{(a+b)R} = (a+b)R \cap (C \oplus B) = 0$, и поскольку $\pi|_{(a+b)R}$ — эпиморфизм, то $(a+b)R + (C \oplus B) = A \oplus B$, т. е. $(a+b)R$ — прямое слагаемое в $A \oplus B$.

Следствие 2. Пусть R — полусовершенное кольцо. Тогда следующие условия равносильны:

1) R является либо полупростым, либо цепным справа кольцом, для которого $J^2(R) = 0$;
2) над кольцом R прямая сумма двух правых 1-строго слабо регулярных модулей — 1-строго слабо регулярный модуль.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Поскольку над локальным кольцом каждый слабо регулярный модуль является 1-строго слабо регулярным, то импликация следует из теоремы 2.

2) $\Rightarrow$ 1). Импликация непосредственно следует из следствия 1 и теоремы 2.

Литература

1. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории.* Т. 2. – М.: Мир, 1977. – 464 с.
2. Каш Ф. Модули и кольца. - М.: Мир, 1981. — 368 с.
3. Hamza H. *I_0-rings and I_0-modules* // Math. J. Okayama Univ. – 1998. – V. 40. – P. 91-97.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
03.10.2002