ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 512.542, 512.531.2

Ю.Б. МЕЛЬНИКОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЕЕ КЛАССОВЫХ ФУНКЦИЙ

Строение группы и строение полугруппы ее эндоморфизмов, разумеется, тесно связаны. Изучению этой взаимозависимости были посвящены работы ряда авторов (см., напр., [1], [2]). Оказалось, что в случае конечности исследуемой группы G можно установить тесную связь между полугруппой эндоморфизмов этой группы и линейным пространством классовых функций из G в поле комплексных чисел.

Все рассматриваемые группы конечны, а линейные пространства заданы над полем комплексных чисел. Под *представлением* понимается матричное представление над полем комплексных чисел. В этом случае для группы соответствие между ее представлением и характером этого представления является взаимно однозначным (с точностью до изоморфизма), и мы будем говорить "ядро характера", "неприводимый характер", и т. п. Пусть G — группа, тогда $\operatorname{Irr} G$ — множество всех ее неприводимых характеров, причем при необходимости будем считать его линейно упорядоченным. Функция с областью определения G и областью значений в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел называется *классовой*, если ее значения одинаковы на любых сопряженных в группе G элементах. Обозначим через V_G линейное пространство классовых функций группы G. Как известно, $\operatorname{Irr} G$ является базисом для V_G (см. [3]). Если φ — отображение множества A в множество B, то через x^φ обозначим образ элемента x из A при этом отображении, а через M^φ — образ подмножества M из A. Если φ — гомоморфизм группы G на H, и χ — характер некоторого представления ψ группы G, содержащий ядро φ в своем ядре, то через χ^φ обозначим характер представления ψ^φ, "наведенного" представлением ψ на $G^\varphi = H$ (как гомоморфном образе группы G). Если же ядро характера χ не содержит ядро гомоморфизма φ, то положим χ^φ равным нулевому вектору $\mathbf{O}$ пространства V_G. Если $\mathbf{O}$ — нулевой вектор из V_G, то положим $\mathbf{O}^\varphi$ равным нулевому вектору пространства V_H. Если S — подгруппа группы G, и η — характер представления θ группы S, то η^G — характер индуцированного с S на G представления θ^G. Матрица называется *матрицей перестановок* (подстановочной матрицей), если как в каждом ее столбце, так и в каждой ее строке все элементы нулевые, кроме одного, равного 1. Если X — матрица, то X^t — матрица, траспонированная к X.

Каждому эндоморфизму φ группы G поставим в соответствие описанным ниже способом линейный оператор $\mathbf{A}_\varphi$ (соответственно, $\mathbf{B}_\varphi$) пространства V_G в себя. Основной целью работы будет доказательство теоремы 1, утверждающей, что это соответствие является представлением (соответственно, антипредставлением).

Как известно, для однозначного определения операторов $\mathbf{A}_\varphi$ и $\mathbf{B}_\varphi$ достаточно задать действие операторов $\mathbf{A}_\varphi$ и $\mathbf{B}_\varphi$ на базисе пространства V_G, например, на $\operatorname{Irr} G$ (см. [3], лемма 11). Пусть $\operatorname{Irr} G = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r\}$. Если неприводимый характер χ_i содержит в своем ядре ядро

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код 94-01-00802-а).

эндоморфизма φ, то положим

$$\chi_i^{\mathbf{A}_\varphi} = (\chi_i^\varphi)^G = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(\varphi)} \chi_j.$$

В противном случае положим $\chi_i^{\mathbf{A}_\varphi} = \mathbf{O}$ (т. е. нулевому вектору пространства V_G), в частности, $a_{ij}^{(\varphi)} = 0$ для всех j.

Оператор $\mathbf{B}_\varphi$ определяется проще: положим

$$\chi_i^{\mathbf{B}_\varphi} = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}^{(\varphi)} \chi_j,$$

где коэффициенты $b_{ij}^{(\varphi)}$ определяются из соотношения

$$\chi_i\big|_{G^\varphi} = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}^{(\varphi)} \chi_j^\varphi,$$

причем, если $\chi_j^\varphi = \mathbf{O}$ (т. е. ядро характера χ_j не содержит ядро эндоморфизма φ), то положим $b_{ij}^{(\varphi)} = 0$. Благодаря последнему условию коэффициенты $b_{ij}^{(\varphi)}$ определяются однозначно. Очевидно, что матрицы $A_\varphi = \|a_{ij}^{(\varphi)}\|$ и $B_\varphi = \|b_{ij}^{(\varphi)}\|$ будут матрицами операторов $\mathbf{A}_\varphi$ и соответственно $\mathbf{B}_\varphi$ в базисе $\operatorname{Irr} G$.

Лемма 1. $A_\varphi = (B_\varphi)^t$. *В частности* (*ввиду ортонормированности* $\operatorname{Irr} G$), *операторы* $\mathbf{A}_\varphi$ *и* $\mathbf{B}_\varphi$ *сопряжены.*

Доказательство. Если неприводимое представление с характером χ_i не содержит в своем ядре ядро эндоморфизма φ, то $a_{ij} = 0$ для всех j. По определению оператора $\mathbf{B}_\varphi$ имеем $b_{ji} = 0$ для всех j. Значит, осталось рассмотреть случай, когда представление с характером χ_i содержит ядро эндоморфизма φ в своем ядре. Согласно закону взаимности Фробениуса (см. [3], теорема 15), имеем

$$a_{ij}^{(\varphi)} = ((\chi_i^\varphi)^G, \chi_j)_G = (\chi_i^\varphi, \chi_j|_{G^\varphi})_{G^\varphi} = \left(\chi_i^\varphi, \sum_{j=1}^{r} b_{jk}^{(\varphi)} \chi_j^\varphi\right)_{G^\varphi} = b_{ji}^{(\varphi)}. \quad \square$$

Теорема 1. *Отображение* τ_A (*соответственно,* τ_B), *ставящее каждому эндоморфизму* φ *конечной группы* G *линейный оператор* $\mathbf{A}_\varphi$ (*соответственно,* $\mathbf{B}_\varphi$) *пространства* V_G, *задает гомоморфизм* (*соответственно, антигоморфизм*) *полугруппы эндоморфизмов группы* G *в полугруппу линейных операторов пространства* V_G.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что для эндоморфизмов φ и ψ справедливо равенство $B_{\varphi\psi} = B_\psi B_\varphi$.

Итак, $\chi_i\big|_{G^\psi} = \sum\limits_{j=1}^{r} b_{ij}^{(\psi)} \chi_j^\psi$. Рассмотрим ограничение этой классовой функции группы G^ψ на $G^{\varphi\psi}$. Имеем

$$\chi_i|_{G^\varphi}\big|_{G^{\varphi\psi}} = \chi_i\big|_{G^{\varphi\psi}} = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}^{(\psi)} \chi_j^\psi\big|_{G^{\varphi\psi}}.$$

Но из равенства $\chi_j\|_{G^\varphi} = \sum\limits_{m=1}^{r} b_{jm}^{(\varphi)} \chi_m^\varphi$, подействовав на него эндоморфизмом ψ, получаем

$$(\chi_j|_{G^\varphi})^\psi = \chi_j^\psi|_{G^{\varphi\psi}} = \sum_{m=1}^{r} b_{jm}^{(\varphi)} \chi_m^{\varphi\psi}.$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{r} b_{im}^{(\varphi\psi)} \chi_m^{\varphi\psi} = \chi_i\big|_{G^{\varphi\psi}} = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}^{(\psi)} \chi_j^\psi\big|_{G^{\varphi\psi}} = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}^{(\psi)} \sum_{m=1}^{r} b_{jm}^{(\varphi)} \chi_m^{\varphi\psi} = \sum_{m=1}^{r} \chi_m^{\varphi\psi} \sum_{m=1}^{r} b_{ij}^{(\psi)} b_{jm}^{(\varphi)},$$

откуда, используя однозначность нахождения коэффициентов $b_{im}^{(\varphi\psi)}$, получаем требуемое равенство. $\square$

Представление τ_A, очевидно, не является точным. Действительно, группа $\operatorname{Inn} G$ внутренних автоморфизмов группы G под действием τ_A переходит в тождественный оператор пространства V_G, т. к. $\operatorname{Inn} G$ не переставляет классы сопряженных элементов группы G. Очевидно, что τ_A "склеивает" все эндоморфизмы, одинаково действующие на классы сопряженных элементов. Это утверждение уточняется в приведенной ниже теореме 2, которую мы предварим следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть θ — эндоморфизм конечной группы G, $\operatorname{Irr} G = \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$, причем ядра характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ содержат ядро эндоморфизма θ, а ядра характеров $\chi_{k+1}, \ldots, \chi_r$ не содержат, $\{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$ — множество всех классов сопряженных элементов группы G, $m_i = |C_i|$, χ — характер некоторого представления группы G, содержащий ядро эндоморфизма θ в своем ядре. Допустим также, что $C_j \cap G^\theta = C_{u_1}^\theta \cup C_{u_2}^\theta \cup \cdots \cup C_{u_v}^\theta$, причем $\{C_{u_t} \mid 1 \le t \le v\}$ — множество всех классов сопряженных элементов группы G, образы которых (относительно действия θ) попадают в C_j. Обозначим через m'_u мощность множества C_u^θ, и через l_u — количество классов сопряженных элементов группы G, образ которых (относительно действия θ) совпадает с C_u^θ. Тогда для всякого g из $C_j \cap G^\theta$ имеем*

$$(\chi^\theta)^G(g) = \frac{|C_G(g)|}{|G^\theta|} \sum_{t=1}^{v} \frac{m'_{u_t}}{l_{u_t}} \chi(g_{u_t}).$$

Доказательство. Из формулы $(*)$ ([3], с. 73) получим

$$(\chi^\theta)^G(g) = \frac{|C_G(g)|}{|G^\theta|} \sum_{x \in g^G \cap G^\theta} \chi^\theta(x) = \frac{|C_G(g)|}{|G^\theta|} \sum_{t=1}^{v} \frac{m'_{u_t}}{l_{u_t}} \chi^\theta(g_{u_t}^\theta),$$

откуда следует требуемое равенство. $\square$

Теорема 2. *Пусть φ и ψ — эндоморфизмы конечной группы G, $\{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$ — множество всех классов сопряженных элементов этой группы. Для выполнения равенства $A_\varphi = A_\psi$ необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, G^φ и G^ψ были изоморфны и включение $C_i^\varphi \subseteq C_j$ имело место если и только если $C_i^\psi \subseteq C_j$.*

Доказательство. Из каждого класса C_i выберем по одному представителю g_i. Заметим, что, очевидно, для любого эндоморфизма θ группы G множество $C_i^\theta \cap C_j$ не пустое тогда и только тогда, когда $C_i^\theta \subseteq C_j$.

Необходимость. Пусть $A_\varphi = A_\psi$. Очевидно, что ядро $\operatorname{Ker} \varphi$ эндоморфизма φ совпадает с $\operatorname{Ker} \psi$. Пусть $m_i = |C_i|$, и $C_j \cap G^\varphi = C_{i_1}^\varphi \cup C_{i_2}^\varphi \cup \cdots \cup C_{i_n}^\varphi$, и $C_j \cap G^\psi = C_{j_1}^\psi \cup C_{j_2}^\psi \cup \cdots \cup C_{j_m}^\psi$. Можно считать, что ядра характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ содержат ядро эндоморфизма φ (и ядро ψ), а ядра характеров $\chi_{k+1}, \cdots, \chi_r$ не содержат.

По определению A_φ имеем $(\chi_u^\varphi)^G(g) = (\chi_u^\psi)^G(g)$ для всякого u с условием $1 \le u \le k$. Согласно лемме 2

$$\frac{|C_G(g)|}{|G^\varphi|} \sum_{p=1}^{n} \frac{m'_{u_p}}{l_{i_p}} \chi_u(g_{i_p}) = \frac{|C_G(g)|}{|G^\psi|} \sum_{q=1}^{m} \frac{m'_{u_q}}{l_{j_q}} \chi_u(g_{j_q}) \quad (\text{здесь } 1 \le u \le k),$$

откуда следует равенство

$$\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{m'_{u_p}}{l_{i_p}} \chi_u(g_{i_p}) \right) - \left(\sum_{q=1}^{m} \frac{m'_{u_q}}{l_{j_q}} \chi_u(g_{j_q}) \right) = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений $\sum\limits_{v=1}^{k} x_v\chi_q(g_v) = 0$, $1 \le q \le k$, которую можно записать иначе $\sum\limits_{v=1}^{k} x_v\chi_q^{\varphi}(g_v^{\varphi}) = 0$, $1 \le q \le k$. По лемме 11 из [3] матрица коэффициентов этой системы уравнений невырожденная. Поэтому все $x_v = 0$. Для (1) это означает, что $\{g_{i_p} \mid 1 \le p \le n\} = \{g_{j_q} \mid 1 \le q \le m\}$. Следовательно, $n = m$ и можно считать, что $i_p = j_p$. Необходимость доказана.

Достаточность. Очевидно, что ядра эндоморфизмов φ и ψ совпадают, поскольку по условию $C_j^{\varphi} = \{1\}$ тогда и только тогда, когда $C_j^{\psi} = \{1\}$. Будем вновь считать, что для $1 \le i \le k$ ядро характера χ_i содержит ядро эндоморфизма φ, а для $k+1 \le i \le r$ не содержит.

По лемме 2 для $1 \le i \le k$ и $\theta = \varphi$ получаем в силу $m = n$

$$\sum_{v=1}^{r} a_{iv}^{(\varphi)}\chi_v(g_j) = (\chi_i^{\varphi})^G(g_j) = \frac{|C_G(g_j)|}{|G^{\varphi}|}\sum_{t=1}^{n}\frac{m'_{u_t}}{l_{u_t}}\chi_i(g_{u_t}) =$$
$$= \frac{|C_G(g_j)|}{|G^{\psi}|}\sum_{t=1}^{n}\frac{m'_{u_t}}{l_{u_t}}\chi_i(g_{u_t}) = (\chi_i^{\psi})^G(g_j) = \sum_{v=1}^{r} a_{iv}^{(\psi)}\chi_v(g_j).$$

Для $k+1 \le i \le r$ в силу совпадения ядер эндоморфизмов φ и ψ имеем $a_{ij}^{(\varphi)} = a_{ij}^{(\psi)} = 0$. Таким образом, матрицы A_φ и A_ψ совпадают. $\square$

Лемма 3. *A_φ является матрицей перестановок тогда и только тогда, когда φ — автоморфизм группы G.*

Доказательство. Этот результат очевиден: достаточно заметить, что A_φ будет матрицей перестановок тогда и только тогда, когда эндоморфизм φ индуцирует подстановку на $\operatorname{Irr} G$.

Лемма 4. *Собственные значения матрицы перестановок размерности $r \times r$ представляют собой корни степени $r\,!$ из 1.*

Доказательство. Пусть для матрицы перестановок A, комплексного числа λ и матрицы-строки X справедливо равенство $XA = \lambda X$. Заметим, что A индуцирует перестановку координат матрицы-строки X, поэтому $A^{r!} = E$ — единичная матрица, ибо мощность каждой орбиты делит $r\,!$. Значит, $X = XE = XA^{r!} = \lambda^{r!}X$, откуда $\lambda^{r\,!} = 1$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 3. *Ненулевые собственные значения операторов A_φ и B_φ представляют собой корни степени $m\,!$ из 1, где m — количество классов сопряженных элементов группы G^{φ^n}, $n = \text{гл}(K_\varphi)$ (см. [4]), т. е. n — наименьшее такое неотрицательное целое число, для которого ядро эндоморфизма φ^n совпадает с ядром эндоморфизма φ^{n+1}.*

Доказательство. Пусть ядра неприводимых характеров χ_i содержат ядро эндоморфизма φ^n для $1 \le i \le k$ и не содержат — для $k+1 \le i \le r$. Тогда $k = m$. Кроме того, B_{φ^n} переводит в этом случае V_G в W — подпространство, натянутое на первые m базисных векторов $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r\}$. Следовательно, все собственные векторы, отвечающие ненулевому собственному значению, содержатся в W. Пусть ψ — ограничение эндоморфизма φ на G^{φ^n}. Как известно, (см. [4]) ψ будет автоморфизмом группы G^{φ^n}. Обозначим через B матрицу, образованную из элементов матрицы B_φ, стоящих на пересечении первых m строк и столбцов этой матрицы. Очевидно, что $B{=}B_\psi$. Заметим, что W — это B_φ-инвариантное пространство, и, как уже отмечалось, оно содержит все собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям. Значит, характеристический многочлен матрицы B_φ имеет вид $f(\lambda) = \lambda^{r-m}g(\lambda)$, где $g(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы B, равной B_ψ. Но корни многочлена $g(\lambda)$ согласно лемме 4 представляют собой корни степени $m\,!$ из 1. $\square$

Литература

1. Долгарев А.И. *Некоторые идеалы полугруппы эндоморфизмов группы и связанные с ними свойства группы* // Современная алгебра. – Л., 1976. – Вып. 4. – С. 66–75.
2. Пуусемп П.А. *Абстрактная характеристика групп Шмидта по их полугруппам эндоморфизмов* // Тр. Таллинского политехнического института. – 1984. – № 568. – С. 91–105.
3. Белоногов В.А., Фомин А.Н. *Матричные представления в теории конечных групп.* – М.: Наука, 1974. – 126 с.
4. Мельников Ю.Б. *О строении сверхкопируемых p-групп* // Алгебра и логика, Новосибирск. – 1988. – № 4. – С. 422–439.

Уральский государственный технический университет

Поступили
первый вариант 23.12.1994
окончательный вариант 30.04.1998